

# 快衰落 Rayleigh 信道下短 LDPC 码两类 BP-Based 译码的优化设计

郑贺<sup>①</sup> 胡捍英<sup>②</sup> 陆佩忠<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(西南电子电信技术研究所 成都 610041)

<sup>②</sup>(信息工程大学通信工程系 郑州 450002)

<sup>③</sup>(复旦大学计算机科学与工程系 上海 200433)

**摘要:** 该文基于最小均方误差(MMSE)准则,对快衰落瑞利(Rayleigh)信道下短码长低密度校验(LDPC)码的 Scaled BP-Based 和 Offset BP-Based 两类改进译码算法进行了优化设计。利用该准则,得出了两类改进算法的最优校正因子,并给出了相应的数值计算。对码长为 504 和 1008 的 1/2 码率(3,6)规则 LDPC 码实验仿真显示,使用该准则设计的两类算法能够取得优于置信传播(BP)算法的译码性能。

**关键词:** 置信传播;改进的 BP-Based 算法;MMSE 准则;短码长 LDPC 码

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)07-1588-04

## Optimization of Two BP-Based Decoding Algorithms for Short LDPC Codes on Fast Rayleigh Fading Channel

Zheng He<sup>①</sup> Hu Han-ying<sup>②</sup> Lu Pei-zhong<sup>③</sup>

<sup>①</sup>(Southwest Inst. of Electron & Telecom Technology, Chengdu 610041, China)

<sup>②</sup>(Dept. of Communications Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

<sup>③</sup>(Dept. of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** By using the Minimum Mean Square Error (MMSE) criterion, the design of two improved Belief Propagation (BP)-based, i.e., the scaled BP-based and offset BP-based algorithms is presented, for decoding of short Low-Density Parity-Check (LDPC) codes on the fast Rayleigh fading channel. Based on the MMSE criterion, theoretical formulas and numerical calculations on the optimum factors for these two BP-based algorithms are provided. The simulation results for the (3,6) regular LDPC codes of lengths 504 and 1008 on the fast Rayleigh fading channel demonstrate that the scaled BP-based and offset BP-based algorithms with the proposed factors can achieve the performance better than that of the BP algorithm.

**Key words:** Belief propagation; Improved BP-based algorithms; MMSE criterion; Short LDPC codes

### 1 引言

Gallager 于 1962 年首先提出<sup>[1]</sup>,并由 MacKay 和 Neal 重新发现<sup>[2]</sup>的低密度校验(LDPC)码现已引起编码领域的广泛关注。LDPC 码是一类由稀疏校验矩阵定义的线性分组码,对于该校验矩阵,可以给其关联一个包含两类节点(即变量节点与校验节点)的 Tanner 图<sup>[3]</sup>。校验矩阵的每一行对应于 Tanner 图中的一个校验节点,每一列对应于一个变量节点;校验矩阵中的非零元素对应于该图中变量节点与校验节点相连的一条边。LDPC 码的迭代译码即通过相连变量节点与校验节点间的消息传递来完成。众所周知,置信传播(BP)算法<sup>[2, 4]</sup>为 LDPC 码基于 Tanner 图的迭代译码提供了很好的数学工具。在加性高斯白噪声(AWGN)和各种衰落信道下,

采用 BP 算法译码的 LDPC 码能够取得与香农限接近的优异译码性能。

LDPC 码是第四代(4G)移动通信系统的备选编译码方案之一。对于移动环境而言,低复杂度、低延迟的译码算法更具实用价值。为了更好地实现 LDPC 码在性能与计算复杂度上的折衷,相继提出了各种基于 BP 的迭代译码算法<sup>[5-8]</sup>。Fossorier 等人首先提出了简化的 UMP BP-Based 算法<sup>[5]</sup>,该算法只需要实数加运算,而且是通用(Universal)的由于其不依赖于信道的任何状态信息。在信道状态变化频繁情况下(如快衰落 Rayleigh 信道),译码算法的这种 Universal 特性颇具吸引力。UMP BP-Based 算法在降低 BP 译码复杂度的同时,也带来了译码性能上的较大损失。因此,又提出了两类改进译码算法<sup>[6, 7]</sup>,称为 Scaled BP-Based<sup>[1]</sup>与 Offset BP-Based 算法。

2005-12-13 收到,2006-08-07 改回

国家自然科学基金(10171017, 90204013),教育部全国优秀博士学位论文作者专项基金(200084)和上海市科技发展基金(035115019)资助课题

<sup>1)</sup>在文献[6]和文献[7]中,类似的算法称为 Normalized BP-Based 算法。

为了使改进的译码算法取得较好的译码性能,对于短码长规则LDPC码(即码长大约为 1kbits 以下),Chen和Fossorier利用等幅度均值(EMM)准则获得了加性高斯白噪声(AWGN)信道下Scaled BP-Based算法的校正因子<sup>[6]</sup>。事实上,该EMM准则并不是最优的, Kim等人又提出了更优的最小均方误差(MMSE)准则<sup>[9]</sup>。但文献[6]和文献[9]的分析,仅局限于AWGN信道下的Scaled BP-Based算法。本文拟利用该MMSE准则对快衰落 Rayleigh 信道下, Scaled BP-Based和Offset BP-Based两类改进译码算法进行优化设计,并对不同短码长规则LDPC码进行实验仿真。

## 2 LDPC 码的 BP 和几类 BP-Based 译码算法

考虑 $(d_v, d_c)$ 规则LDPC码情况,其中 $d_v \geq 2$ 与 $d_c \geq 2$ 分别为变量节点与校验节点的度。以下讨论的各种译码算法均在对数域上进行,即算法采用对数似然比(LLR),而非概率作为其度量。在不指定某个节点的情况下,记BP和几类BP-Based译码算法的变量节点输出消息为 $v$ ;BP算法的校验节点输出消息为 $u$ , UMP BP-Based, Scaled BP-Based和Offset BP-Based算法的校验节点输出消息分别为: $u_1$ ,  $u_2$ 和 $u_3$ 。对于BP算法而言,变量节点的输出消息表示为

$$v = u^{(0)} + \sum_{i=1}^{d_v-1} u^{(i)} \quad (1)$$

其中 $u^{(i)}(i=1,2,\dots,d_v-1)$ 为除接收消息 $v$ 的校验节点外,其余 $d_v-1$ 个与该变量节点相连校验节点输入的LLR值; $u^{(0)}$ 为该变量节点在信道输出端的LLR值。相应地,在BP算法中,校验节点的输出消息则满足如下Tanh法则<sup>[4]</sup>:

$$\tanh\left(\frac{u}{2}\right) = \prod_{j=1}^{d_c-1} \tanh\left(\frac{v^{(j)}}{2}\right)$$

即等价于<sup>[8]</sup>

$$u = \left( \prod_{j=1}^{d_c-1} \operatorname{sgn}(v^{(j)}) \right) \cdot 2 \tanh^{-1} \left( \prod_{j=1}^{d_c-1} \tanh\left(\frac{|v^{(j)}|}{2}\right) \right) \quad (2)$$

其中 $v^{(j)}(j=1,2,\dots,d_c-1)$ 为除接收消息 $u$ 的变量节点外,其余 $d_c-1$ 个与该校验节点相连变量节点输入的LLR值。

几类BP-Based算法与BP算法的区别仅在于校验节点对其输入消息的处理方式不同。在UMP BP-Based算法<sup>[5]</sup>中,有

$$u_1 = \prod_{j=1}^{d_c-1} \operatorname{sgn}(v^{(j)}) \cdot \min_{j=1,2,\dots,d_c-1} |v^{(j)}| \quad (3)$$

在Scaled BP-Based算法<sup>[6,7]</sup>中,校验节点的输出消息由下式取代<sup>2)</sup>

$$u_2 = \alpha \cdot u_1 \quad (4)$$

而在Offset BP-Based算法<sup>[7]</sup>中,则有

$$u_3 = \operatorname{sgn}(u_1) \cdot \max\{|u_1| - \beta, 0\} \quad (5)$$

<sup>2)</sup>在Normalized BP-Based算法中,  $u_2 = u_1 / \alpha$ , 其中 $\alpha$  ( $\alpha \geq 1$ )称为归一化因子。

在这两类改进BP-Based译码算法中,分别使用了乘性和加性校正因子。其中,乘性因子 $\alpha(0 < \alpha \leq 1)$ 称为尺度因子(scale factor),加性因子 $\beta(\beta \geq 0)$ 称为偏移因子(offset factor)。显然,最优的 $\alpha$ 与 $\beta$ 值是信噪比(SNR)的函数且与迭代次数有关。与文献[6]和文献[7]的做法类似,本文对于所有的迭代及SNR值, $\alpha$ 与 $\beta$ 均设定为某一定值。

## 3 基于 MMSE 的两类 BP-Based 译码优化设计

### 3.1 MMSE 准则下 $\alpha$ 与 $\beta$ 值确定

对于上述几类BP-Based算法而言,由于校验节点在对输入LLR信息的处理过程中引入了近似,因而与BP算法相比这些近似方法可能会带来译码性能上的损失。对于短码长LDPC码,第一次迭代的外信息近似会严重影响整个迭代过程的译码性能<sup>[6]</sup>。第一次迭代译码时,由于校验节点输入给变量节点的外信息为0,根据式(1)此时变量节点的输出消息为 $v = u^{(0)}$ 。以下讨论的也是此类消息作为式(2)至式(5)校验节点输入LLR的情况。

对于Scaled BP-Based算法,在MMSE准则下, $\alpha$ 的取值应使均方误差 $E[(|u| - |u_2|)^2] = E[(|u| - \alpha \cdot |u_1|)^2]$ 最小。此时,可得 $\alpha$ 最优取值为

$$\alpha = \frac{E[|u| \cdot |u_1|]}{E[|u_1|^2]} \quad (6)$$

同理,对于Offset BP-Based算法,在MMSE准则下, $\beta$ 的取值应使均方误差 $E[(|u| - |u_3|)^2] = E[(|u| - \max\{|u_1| - \beta, 0\})^2]$ 最小。由此,可得 $\beta$ 近似最优取值为

$$\beta \approx E[|u_1|] - E[|u|] \quad (7)$$

### 3.2 MMSE 准则下 $\alpha$ 与 $\beta$ 值计算

本文的整个分析和算法设计过程,考虑的是二进制移相键控(BPSK)调制方式( $\{0 \rightarrow +1, 1 \rightarrow -1\}$ )。下面将讨论,如何利用MMSE准则计算快衰落 Rayleigh 信道下的 $\alpha$ 与 $\beta$ 值。由3.1节的分析知,式(2)和式(3)中的消息 $v^{(j)}(j=1, 2, \dots, d_c-1, d_c-1)$ 取值均为来自于信道的LLR值。

在BPSK调制快衰落Rayleigh信道下,记信道的噪声方差为 $\sigma_n^2$ 。由于该信道下无边信息可以获得,故此时信道的初始LLR值可近似表示为<sup>[10]</sup>:  $u^{(0)} = 2r \cdot E[a] / \sigma_n^2$ ,其中 $r$ 为BPSK调制后信道的输出值, $a$ 为信道的归一化衰落因子,其概率密度函数为 $p(a) = 2a \cdot \exp(-a^2)$ ,且 $E[a^2] = 1$ ,  $E[a] = 0.8862$ 。这里要指出的是,在两类BP-Based算法的设计中,本文未对 $u^{(0)}$ 做关于 $2E[a] / \sigma_n^2$ 的归一化处理。由于讨论的两类信道均为对称信道,且对称信道下线性码的误比特率(BER)与发送码字无关,不失一般性,假定发送为全零码字。根据式(6)和式(7),要获得MMSE准则下 $\alpha$ 与 $\beta$ 的最优取值,需计算若干个统计均值。

为表述方便,引入函数 $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ 。

当发送为零码字时,  $u^{(0)}$  的概率密度函数表示为

$$f(x) = \frac{\sigma_n^3}{\sqrt{2\pi}E[a](2\sigma_n^2+1)} \exp\left(-\frac{\sigma_n^2}{8(E[a])^2}x^2\right) + \frac{\sigma_n^4 x \cdot Q\left(-\frac{\sigma_n}{2E[a]\sqrt{2\sigma_n^2+1}}x\right)}{2(E[a])^2(2\sigma_n^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_n^4}{4(E[a])^2(2\sigma_n^2+1)}x^2\right) \quad (8)$$

显然, 随机变量  $|u^{(0)}|$  的取值范围为:  $(0, +\infty)$ , 记其概率分布函数为  $G(x)$  ( $x > 0$ )。根据式 (8) 及  $G(x) = \Pr\{|u^{(0)}| \leq x\} = \int_{-x}^x f(t)dt$ , 可得

$$G(x) = 1 - 2Q\left(\frac{\sigma_n}{2E[a]}x\right) - \frac{1}{\sqrt{2\sigma_n^2+1}} \left[1 - 2Q\left(\frac{\sigma_n}{2E[a]\sqrt{2\sigma_n^2+1}}x\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_n^4}{4(E[a])^2(2\sigma_n^2+1)}x^2\right) \quad (9)$$

从而, 由  $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ , 可得  $|u^{(0)}|$  的密度函数为

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sigma_n^3}{E[a](2\sigma_n^2+1)} \exp\left(-\frac{\sigma_n^2}{8(E[a])^2}x^2\right) + \frac{\sigma_n^4 x \cdot \left[1 - 2Q\left(\frac{\sigma_n}{2E[a]\sqrt{2\sigma_n^2+1}}x\right)\right]}{2(E[a])^2(2\sigma_n^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \exp\left(-\frac{\sigma_n^4}{4(E[a])^2(2\sigma_n^2+1)}x^2\right) \quad (10)$$

由于  $v^{(j)}$  ( $j=1,2,\dots,d_c-1$ ) 均为来自于信道的LLR值, 其密度函数与  $u^{(0)}$  相同。为表示方便, 再记  $|v|_{\min} = \min_{j=1,2,\dots,d_c-1} |v^{(j)}|$ , 由式(3)可知  $|u_1| = |v|_{\min}$ 。若  $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(d_c-1)}$  相互统计独立, 则  $|u_1|$  的概率密度函数  $h(x)$  ( $x > 0$ ) 可计算为

$$h(x) = (d_c - 1)g(x) \cdot (1 - G(x))^{d_c-2} \quad (11)$$

下面将讨论如何计算式(6)和式(7)中的各个均值。对于与  $|u|$  有关的均值  $E[|u| \cdot |u_1|]$  和  $E[|u|]$ , 结合式(2)和式(3), 采用蒙特卡洛仿真方法对其进行计算。对于与  $|u_1|$  有关的均值  $E[|u_1|]$  和  $E[|u_1|^2]$ , 则可用积分式计算得到。利用式(9)至式(11),  $E[|u_1|]$  和  $E[|u_1|^2]$  的计算式为

$$E[|u_1|^k] = \int_0^\infty x^k \cdot h(x) dx, \quad k=1,2 \quad (12)$$

### 4 数值计算

利用式(6)至式(12)和第 3 节中的有关分析, 计算得到了快衰落Rayleigh信道下一系列 1/2 码率( $d_v, d_c$ )规则LDPC

码在不同 SNR 值的尺度因子  $\alpha$  与偏移因子  $\beta$ , 如图 1 和图 2 所示。对于短码长 LDPC 码, 文献[6]引入 SNR 临界区 (critical range) 的定义, 指出对于高于或低于该区域的 SNR 值, Scaled BP-Based 算法的译码性能对于  $\alpha$  值变化不甚敏感, 并选取该区域内某一 SNR 对应的  $\alpha$  值作为 Scaled BP-Based 算法的尺度因子。在本文中, 我们研究发现无边信息快衰落 Rayleigh 信道下, 临界区应由其相应的有边信息衰落信道的 BP 译码 BER 曲线来指定。本文中, 称该曲线为参考曲线(reference curve), 码长为 504 和 1008 的(3,6)码参考曲线已在图 3 和图 4 中由虚线标出。同时, 我们还发现对于不同码长的 LDPC 码, 临界区的选取是不同的。

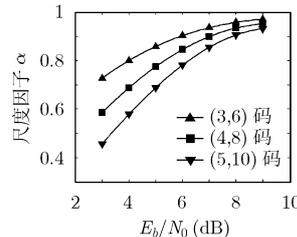


图 1 不同 SNR 值的 MMSE 尺度因子

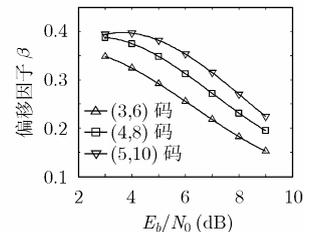


图 2 不同 SNR 值的 MMSE 偏移因子

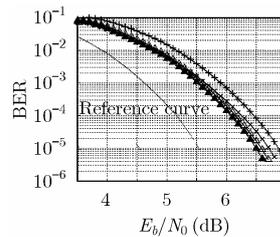


图 3 码长 504 的(3,6)码 BER 仿真性能

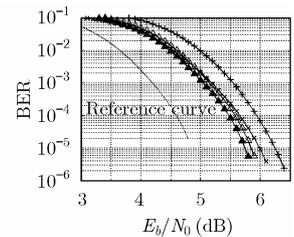


图 4 码长 1008 的(3,6)码 BER 仿真性能

例如, 对于码长为 504 的码, 临界区取为: 参考曲线 BER 为  $10^{-3}$  至  $10^{-4}$  对应的 SNR 区域 (即文献[6]给出的定义); 对于码长为 1008 的码, 由于其码长增加, 其临界区相应地取为: 参考曲线 BER 为  $10^{-4}$  至  $10^{-5}$  对应的区域。对于码长为 504 和 1008 的码, 我们在临界区内选取的 SNR 值, 其分别对应的参考曲线 BER 近似为  $2 \times 10^{-4}$  和  $2 \times 10^{-5}$ 。例如, 对于快衰落 Rayleigh 信道下码长为 504 的(3,6)规则码, 根据仿真图 3, 应选取  $E_b/N_0=5.0$  dB; 再根据图 1, 可确定出 Scaled BP-Based 算法的尺度因子为  $\alpha = 0.86$ ; 对于 Offset BP-Based 算法, 则根据图 2 可确定出其偏移因子为  $\beta = 0.29$ 。同理, 可得到该衰落信道下码长为 1008 的(3,6)码  $\alpha$  与  $\beta$  值。这些结果及其对应选取的 SNR 值, 已在表 1 中列出。

表 1 MMSE 准则获得的(3,6)码  $\alpha$  与  $\beta$  值

码长	选取 SNR ( $E_b/N_0$ )	$\alpha$	$\beta$
504	5.0	0.86	0.29
1008	4.8	0.85	0.30

## 5 实验仿真

如 3.2 节所述,在两类改进 BP-Based 算法的设计中,我们没有对  $u^{(0)}$  做关于  $2E[a]/\sigma_n^2$  的归一化处理。但为保留算法在快衰落 Rayleigh 信道下的 Universal 特性,仿真中需做此处理。归一化处理后,表 1 给出的尺度因子不变,而偏移因子则要发生相应的改变。以码长为 504 的(3,6)码为例,由于选取的  $E_b/N_0=5.0\text{dB}$ ,即  $\sigma_n^2 = 0.316$ ,故将  $\beta = 0.29$  除以  $2E[a]/\sigma_n^2$ ,即可得到其归一化偏移因子为 0.052。类似地,可计算得到该衰落信道下,码长为 1008 的码字归一化偏移因子为 0.056。

为表述方便,将基于 MMSE 准则设计的改进算法,简称为 MMSE 算法。在快衰落 Rayleigh 信道下,分别对码长为 504 和 1008 的(3,6)规则 LDPC 码 MMSE Scaled/Offset BP-Based 算法 BER 性能进行了实验仿真,如图 3 和图 4 所示。为便于比较,在这些图中亦加入了 BP 和 UMP BP-Based 算法的仿真性能。对于所有(包括参考曲线)的仿真,最大迭代译码次数均设定为 1000 次;迭代译码的终止条件均为:当硬判决序列  $\hat{c}$  与 LDPC 码的校验矩阵  $\mathbf{H}$  满足校验关系  $\mathbf{H} \cdot \hat{c}^T = 0$  时,停止迭代。

由图 3 和图 4 可见,快衰落 Rayleigh 信道下,MMSE Scaled/Offset BP-Based 两类算法明显优于 UMP BP-Based 算法,且亦优于 BP 算法。图 3 表明,对于码长为 504 的(3,6)码,译码 BER= $10^{-5}$  时,MMSE Scaled BP-Based 和 MMSE Offset BP-Based 算法所需的  $E_b/N_0$  分别优于 UMP BP-Based 算法 0.3 和 0.2dB,亦分别优于 BP 算法 0.2 和 0.1dB。类似地,对于码长为 1008 的(3,6)码(见图 4),在译码 BER= $10^{-5}$  时,两类 MMSE BP-Based 算法优于 UMP BP-Based 算法 0.4 至 0.5dB,且优于 BP 算法 0.15 至 0.25dB。

## 6 结束语

在快衰落 Rayleigh 信道下,本文基于 MMSE 准则对短码长 LDPC 码的 Scaled BP-Based 和 Offset BP-Based 译码算法进行了优化设计。该衰落信道下,对码长为 504 和 1008 的(3,6)规则码实验仿真显示,基于 MMSE 准则设计的 Scaled/Offset BP-Based 算法能够取得优于 BP 算法的译码性能。

## 参 考 文 献

- [1] Gallager R G. Low-density parity-check codes. *IRE Trans. Inform. Theory*, 1962, 8(1): 21–28.
- [2] MacKay D J C and Neal R M. Near-Shannon-limit performance of low-density parity-check codes. *Electron. Lett.*, 1996, 32(18): 1645–1646.
- [3] Tanner R M. A recursive approach to low complexity codes. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 1981, 27(5): 533–547.
- [4] Chung S Y, Richardson T J, and Urbanke R L. Analysis of sum-product decoding of low-density parity-check codes using a Gaussian approximation. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 657–670.
- [5] Fossorier M, Mihaljevic M, and Imai H. Reduced complexity iterative decoding of low-density parity check codes based on belief propagation. *IEEE Trans. on Commun.*, 1999, 47(5): 673–680.
- [6] Chen J and Fossorier M. Near optimum universal belief propagation based decoding of low-density parity check codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 2002, 50(3): 406–414.
- [7] Chen J and Fossorier M. Density evolution for two improved BP-based decoding algorithms of LDPC codes. *IEEE on Commun. Letters*, 2002, 6(5): 208–210.
- [8] Chen J, Dholakia A, and Eleftheriou E, et al. Reduced-complexity decoding of LDPC codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 2005, 53(8): 1288–1299.
- [9] Kim N and Park H. Modified UMP-BP decoding algorithm based on mean square error. *Electron. Lett.*, 2004, 40(13): 816–817.
- [10] Hou J, Siegel P H, and Milstein L B. Performance analysis and code optimization of low density parity-check codes on Rayleigh fading channels. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2001, 19(5): 924–934.

- 郑 贺: 男, 1979 年生, 博士, 主要研究兴趣为信道编译码及调制/解调技术。
- 胡捍英: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 长期从事信号处理与通信方面的研究与教学工作。
- 陆佩忠: 男, 1961 年生, 教授, 博士后, 博士生导师, 主要研究兴趣为纠错编码、信息安全、图像处理。