一种新型的快速递归 V-BLAST 检测算法

罗振东　　赵　明　　刘思杨　　刘元安
(北京邮电大学电信工程学院　北京　100876)

摘　要：该文提出了一种新型的快速递归 V-BLAST 算法。此算法采用一种简单的矩阵伪逆递推关系，利用前一次迭代时得到的迫零加权矩阵和加权向量直接计算出下一次迭代的迫零加权矩阵和加权向量。与现有的 V-BLAST 检测算法相比，所提出的算法在保证最优性能的前提下，具有更低的计算复杂度和更快的处理速度。

关键词：无线通信；多入多出(MIMO)系统；V-BLAST；迫零串行干扰删除；递归算法

中图分类号：TN92　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2007)07-1546-05

A Novel Fast Recursive V-BLAST Detection Algorithm

Luo Zhen-dong　　Zhao Ming　　Liu Si-yang　　Liu Yuan-an
(*School of Telecommunication Engineering*, *Beijing University of Posts and Telecommunications*, *Beijing* 100876, *China*)

Abstract: A novel fast recursive V-BLAST detection algorithm is proposed in this paper. Since a simple recursive relationship of computing pseudoinverses is exploited in the algorithm, the Zero-Forcing (ZF) weight matrix and the ZF weight vector at each iteration can be directly computed from the ZF weight matrix and vector determined at the previous iteration. It is shown that the proposed algorithm not only guarantees the optimal detection performance, but also has lower computational complexity and faster processing speed than the existing algorithms.

Key words: Wireless communications; Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) systems; Vertical Bell LAboratories layered Space-Time (V-BLAST); Zero-Forcing Successive Interference Cancellation (ZF-SIC); Recursive algorithm

1　引言

在无线衰落环境下，采用多个发射天线和接收天线可以成倍地提高无线通信系统的信道容量，这种采用多个收发天线的系统通常被称为多入多出(MIMO)系统[1–3]。由于MIMO系统能够突破无线频率资源限制，有效提高系统频谱效率，因此被认为是未来高速无线通信系统的主要物理层技术之一[4,5]。

1996 年，贝尔实验室的Foschini等人提出了著名的贝尔实验室分层空时(BLAST)结构[2]，它能够在MIMO系统中实现非常高的频谱效率，被公认为是MIMO技术发展的里程碑。然而，最早提出的BLAST技术(常被称为对角分层空时，即：D-BLAST)复杂度很高，难以实际应用。1998 年，贝尔实验室的Wolniansky和Golden等人又提出了D-BLAST的简化版本——垂直分层空时(V-BLAST)[6,7]，即：在发射端，M根发射天线同时同频发射不同的数据符号；在接收端，检测算法在每个抽样时间包含M次迭代，在每次迭代时先将已经被恢复的符号所产生的干扰从接收数据中删除，然后再采用迫零算法(或最小均方误差算法)计算加权矩阵，将剩下的发射符号中信噪比最大的符号恢复出来。上述的检测算法通常被称为V-BLAST检测算法，根据计算加权矩阵的算法的不同，V-BLAST检测算法又分为迫零串行干扰删除(ZF-SIC)算法和最小均方误差串行干扰删除(MMSE-SIC)算法。

贝尔实验室利用其搭建的实验平台证明了：在室内传播环境下，当平均信噪比(SNR)为 24–34dB 时采用迫零串行干扰删除算法的 V-BLAST 系统的频谱效率可达到 20–40bit/(s·Hz)。然而，由于传统检测算法需要进行多次矩阵伪逆运算，因而复杂度较高，当发射天线数目(M)等于接收天线数目(N)时，该算法的复杂度达到了 $\mathcal{O}(M^4)$ 。能否降低该算法的复杂度是其能否实际应用的关键，也是摆在国内外研究人员面前的一个难题。

为了降低 V-BLAST 算法的复杂度，目前已经提出了一些简化算法。文献[8,9]提出了一些次优的检测算法，这些算法虽然大幅度降低了计算复杂度，但也损失了一定的性能。文献[10, 11]提出的两种快速算法在保证最优性能的前提下，将 V-BLAST 检测算法的复杂度降至 $\mathcal{O}(M^3)$ 的数量级，其中文献[10]提出的快速递归算法是现有的最优算法中复杂度最低的。

本文不考虑次优检测算法，而研究原有算法的简化处理方案。文中利用一种简单的矩阵伪逆递推关系，推导出了一种新型的快速递归迫零串行干扰删除检测算法，该算法根据前一次迭代时得到的迫零加权矩阵和加权向量递推出下一次迭代的迫零加权矩阵和加权向量。与现有的 V-BLAST 检测算法相比，所提出算法在保证最优性能的前提下具有更高

2005-11-29 收到，2006-07-03 改回
国家 863 计划“B3G-TDD”(2003AA12331004)资助课题

的运算效率。当 $M=N$ 时，该算法仅需要 $\frac{11}{4}M^3+\mathcal{O}(M^2)$ 次复数乘法和加法运算。

本文的主要内容安排如下：第 2 节简要介绍 V-BLAST 技术的基本原理；第 3 节推导所提出的快速递归算法；第 4 节分析该算法的复杂度；第 5 节给出本文的结论。

2　V-BLAST 技术简介

2.1 系统模型

V-BLAST 系统的基带信号输入输出关系可表示为如下公式：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{x}=[x_1\ \ x_2\ \ \cdots\ \ x_M]^{\mathrm{T}}$，$x_m$ 表示从第 m 根天线发射的数据符号($m=1,2,\cdots,M$)，它们具有相同的发射功率；$\boldsymbol{y}=[y_1\ \ y_2\ \ \cdots\ \ y_N]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}=[\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \cdots\ \varepsilon_N]^{\mathrm{T}}$，$y_n$ 和 ε_n 分别表示第 n 根接收天线接收到的复信号和噪声($n=1,2,\cdots,N$)；$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_N$ 服从独立同分布的零均值复高斯分布；M 和 N 分别表示发射天线数目和接收天线数目($M\le N$)；$\boldsymbol{H}$ 是 $N\times M$ 维的复信道矩阵，且令 $\boldsymbol{h}_m$ 表示 $\boldsymbol{H}$ 的第 m 列。文中，上标 $^{\mathrm{T}}$，*，$^{\mathrm{H}}$ 和 † 分别表示矩阵的转置、共轭、共轭转置和伪逆。

2.2 传统的 V-BLAST 检测算法

由文献[6]可知，传统的 V-BLAST 检测算法如下：

初始化：令 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{H}$，$i=1$。

算法步骤：

步骤 1　计算第 i 次迭代的加权矩阵 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{H}_i^\dagger$；

步骤 2　确定 p_i 和 k_i，这里 p_i 和 k_i 分别表示信噪比最大的符号所对应的 $\boldsymbol{H}_i$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的列序号；

步骤 3　取出 $\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{H}}$ 的第 p_i 列作为第 i 次迭代的加权向量 $\boldsymbol{\omega}_i$，即 $\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{H}}$ 是 $\boldsymbol{W}_i$ 的第 p_i 行；

步骤 4　计算第 i 次迭代的判决统计量 $\tilde{x}_{k_i}=\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_i$；

步骤 5　对 $\tilde{x}_{k_i}$ 进行硬判决得到判决值 $\hat{x}_{k_i}$；

步骤 6　如果 $i<M$ 则执行下一步骤，否则算法结束。

步骤 7　计算 $\boldsymbol{y}_{i+1}=\boldsymbol{y}_i-\boldsymbol{h}_{k_i}\hat{x}_{k_i}$，将 $\boldsymbol{h}_{k_i}$ 从 $\boldsymbol{H}_i$ 中删除得到矩阵 $\boldsymbol{H}_{i+1}$；

步骤 8　令 $i=i+1$，然后返回步骤 1。

注：为了方便下文推导，上述步骤与经典算法[6]相比略有调整。

在上述步骤中，$\boldsymbol{H}_i$ 表示从 $\boldsymbol{H}$ 去掉 $\boldsymbol{h}_{k_1},\boldsymbol{h}_{k_2},\cdots,\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}$ 等列后得到的 $N\times(M-i+1)$ 维矩阵($i=2,3,\cdots,M$)；p_i 实际上是加权矩阵 $\boldsymbol{W}_i$ 中具有最小 Frobenius 范数的行的序号，并且 p_i 和 k_i 满足下列关系式：

$$k_i=(\boldsymbol{\Omega}_i)_{p_i} \tag{2}$$

这里，$(\bullet)_m$ 表示向量的第 m 个元素；向量 $\boldsymbol{\Omega}_i$ 的定义为：$\boldsymbol{\Omega}_1=[1\ \ 2\ \ \cdots\ \ M]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\Omega}_i$ 表示从 $\boldsymbol{\Omega}_{i-1}$ 中删除值为 k_{i-1} 的元素所形成的向量($i=2,3,\cdots,M$)。

3　快速递归 V-BLAST 检测算法

传统算法需要多次计算矩阵伪逆，导致算法的复杂度较高，以下提出一种新型的快速递归算法，该算法利用前一次迭代时的计算结果直接递推出下一次迭代的加权矩阵和加权向量，在不损失性能的前提下大幅度降低了算法的复杂度。

3.1 基本递推公式

本小节讨论如何利用第 $i-1$ 次迭代的加权矩阵($\boldsymbol{W}_{i-1}$)递推出第 i 次迭代的加权矩阵 $\boldsymbol{W}_i$ ($i=2,3,\cdots,M$)。首先，根据文献[12]的定理 3.1.3 给出如下引理：

引理 1　设 $\boldsymbol{A}\in\mathcal{C}^{n\times m}$，$\boldsymbol{b}\in\mathcal{C}^{n\times1}$，$\boldsymbol{c}\in\mathcal{C}^{m\times1}$。令 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})$，$\gamma=1+\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^\dagger$。

(1) 若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，$\gamma=0$，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}})^\dagger=\boldsymbol{A}^\dagger-\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^\dagger\boldsymbol{A}^\dagger-\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^\dagger+\boldsymbol{g}^\dagger\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}})^\dagger\boldsymbol{g}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} \tag{3}$$

(2) 若 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，$\gamma\ne0$，则

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}})^\dagger=\boldsymbol{A}^\dagger+\frac{1}{\gamma^*}\boldsymbol{v}\boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^\dagger-\frac{\gamma^*}{\sigma_1}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}} \tag{4}$$

其中 $\mathcal{C}^{n\times m}$ 表示 $n\times m$ 维的复矩阵空间，$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，$\boldsymbol{0}$ 表示零向量或矩阵，$\boldsymbol{p}_1=-(\|\boldsymbol{g}\|^2/\gamma^*)\boldsymbol{v}-\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}}=-(\|\boldsymbol{v}\|^2/\gamma^*)\boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^\dagger-\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}$，$\sigma_1=\|\boldsymbol{g}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2+|\gamma|^2$，$\|\bullet\|$ 表示矩阵的 Frobenius 范数。

下面讨论如何利用引理 1 从 $\boldsymbol{W}_{i-1}$ 递推出 $\boldsymbol{W}_i$。

令 $\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}$ 表示将 $\boldsymbol{H}_{i-1}$ 的第 p_{i-1} 列置零得到的矩阵，显然 $\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}$ 只比 $\boldsymbol{H}_i$ 多一个全零的第 p_{i-1} 列。根据伪逆的基本性质可知，$\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}^\dagger$ 仅比 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{H}_i^\dagger$ 多一个全零行(即 $\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}^\dagger$ 的第 p_{i-1} 行为零向量)，删除 $\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}^\dagger$ 的第 p_{i-1} 行即可得到 $\boldsymbol{W}_i$。令 $\boldsymbol{e}_{n,i}$ 表示一个 $n\times1$ 维的列向量，它除了第 i 个元素为 1 以外其它元素全为 0，则

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}=\boldsymbol{H}_{i-1}-\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}(\boldsymbol{e}_{M-i+2,p_{i-1}})^{\mathrm{H}} \tag{5}$$

令引理 1 中的 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}_{i-1}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}$，$\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{e}_{M-i+2,p_{i-1}}$，则有 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{H}_{i-1}\boldsymbol{e}_{M-i+2,p_{i-1}}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}$。因此可得

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}} \tag{6}$$

引理 2　$\boldsymbol{u}$ 是零向量($\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$)。

证明　设 $\boldsymbol{u}\ne\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{A}=\|\boldsymbol{u}\|^{-2}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$。由于 $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，可得 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。因为 $\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一列，所以 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{b}=0$。然而，直接计算可得 $\boldsymbol{u}^\dagger\boldsymbol{b}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{b}/\|\boldsymbol{u}\|^2=\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)\boldsymbol{b}/[\boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger)\boldsymbol{b}]=1$。以上两个结论相互矛盾，因此 $\boldsymbol{u}$ 只能是零向量。　证毕

由于 $(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\dagger=\boldsymbol{A}^\dagger$，还可得到如下公式：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\|^2&=\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}})\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{A})\boldsymbol{c}=1+\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^\dagger\boldsymbol{b}=\gamma\end{aligned} \tag{7}$$

由引理 2 和式(7)可知，引理 1 中的条件“ $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，$\gamma=0$ ”等价于 $\gamma=0$ 的情况，条件“ $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，$\gamma\ne0$ ”等

价于$\gamma \neq 0$的情况。因此，可将要解决的问题分成$\gamma = 0$和$\gamma \neq 0$两种情况，然后分别利用式(3)和式(4)求解。

(1) $\gamma = 0$：首先，$\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}$，然后利用式(3)可得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}^{\dagger} &= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}})^{\dagger}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\dagger} + \boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}})^{\dagger}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\dagger} + \boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger}(\boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\dagger}\boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\dagger} + \boldsymbol{g}\boldsymbol{g}^{\dagger}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\theta}^{\dagger}\end{aligned} \tag{8}$$

由于$\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{\omega}_{i-1}$，再将式(8)等号两边的矩阵同时删除第$p_{i-1}$行，得到

$$\boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{V}_{i-1} - \boldsymbol{V}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{\dagger} \tag{9}$$

其中$\boldsymbol{V}_{i-1}$为删除$\boldsymbol{W}_{i-1}$的第p_{i-1}行后得到的矩阵；$\boldsymbol{\omega}_{i-1}$为$\boldsymbol{W}_{i-1}^{\mathrm{H}}$的第$p_{i-1}$列，也就是第$i-1$次迭代的加权向量。

易知：当$\boldsymbol{H}_{i-1}$列满秩时，$\gamma = 0$，即可采用上式计算$\boldsymbol{W}_i$。注：当$\gamma = 0$时，$\boldsymbol{H}_{i-1}$不一定列满秩。

(2) $\gamma \neq 0$：先给出如下公式：

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{g}\|^2 &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}\\ &= -\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = 1-\gamma\end{aligned} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = -(1/\gamma - 1)\boldsymbol{v} - \boldsymbol{g} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{H}} = -\boldsymbol{g}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger} - \boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} = -2\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} \tag{12}$$

$$\sigma_1 = (1-\gamma)\gamma + \gamma^2 = \gamma \tag{13}$$

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{g} \tag{14}$$

将式(10)~式(14)代入式(4)可得

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{H}}_{i-1}^{\dagger} &= \boldsymbol{A}^{\dagger} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} - 2\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}\right)\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} + \frac{2\gamma-1}{\gamma}\boldsymbol{v}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} - 2\boldsymbol{g}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} + \frac{2\gamma-1}{\gamma}\boldsymbol{c}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}\\ &= \boldsymbol{A}^{\dagger} + \frac{2\gamma-1}{\gamma}\boldsymbol{c}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}\end{aligned} \tag{15}$$

将式(15)等号两边的矩阵同时删除第p_{i-1}行得到

$$\boldsymbol{W}_i = \boldsymbol{V}_{i-1} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{V}_{i-1}\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{\mathrm{H}} \tag{16}$$

其中$\boldsymbol{V}_{i-1}$的定义同式(9)，$\gamma = 1 + \boldsymbol{c}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b} = 1 - \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}$。注：除了第$p_{i-1}$行以外，矩阵$\boldsymbol{c}\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{H}}$的元素均为0。

将式(9)与式(16)相结合，可得如下定理：

定理1 $\boldsymbol{W}_i$ ($i = 2,3,\cdots,M$)的递推公式为

$$\boldsymbol{W}_i = \begin{cases}\boldsymbol{V}_{i-1} - \boldsymbol{V}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{\dagger}, & 若\gamma_i = 0\\ \boldsymbol{V}_{i-1} + \dfrac{1}{\gamma_{i-1}}\boldsymbol{V}_{i-1}\boldsymbol{h}_{k_{i-1}}\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{\mathrm{H}}, & 若\gamma_i \neq 0\end{cases} \tag{17}$$

其中为了避免出现歧义，这里用γ_i代替了γ。

说明：无论信道矩阵$\boldsymbol{H}$是否为列满秩矩阵，均可采用式(17)计算加权矩阵。特别要注意的是，由于$\boldsymbol{H}$是一个随机矩阵，理论上来说它几乎总是列满秩矩阵，因此γ_i也几乎总是为0；即使实际中出现$\gamma_i \neq 0$的情况，由于此时的信道矩阵是列缺秩的，因此V-BLAST检测算法也难以正确恢复数据。所以，实际中可认为γ_i总是为0，并直接利用式(17)的第一个等式计算$\boldsymbol{W}_i$，从而进一步简化计算。

另外，由于$\boldsymbol{H}_M$仅是一个向量，因此直接计算$\boldsymbol{W}_M = \boldsymbol{H}_M^{\dagger}$比由$\boldsymbol{W}_{M-1}$递推$\boldsymbol{W}_M$的算法更简单，即

$$\boldsymbol{W}_M = \begin{cases}\boldsymbol{H}_M^{\mathrm{H}}/\|\boldsymbol{H}_M\|^2, & 若\|\boldsymbol{H}_M\|^2 \neq 0\\ \boldsymbol{0}, & 若\|\boldsymbol{H}_M\|^2 = 0\end{cases} \tag{18}$$

3.2 初始加权矩阵的计算方法

为了实现从$\boldsymbol{W}_{i-1}$到$\boldsymbol{W}_i$的递推运算，首先需要计算初始加权矩阵$\boldsymbol{W}_1$。由于$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{H}^{\dagger}$，因此可采用各种伪逆的计算方法来得到$\boldsymbol{W}_1$，如：奇异值分解法、QR算法、Greville递推法等。其中，Greville递推法是一种非常高效的计算方法[13]，以下利用Greville递推法直接给出$\boldsymbol{W}_1$的递推公式。

设$\boldsymbol{\mathcal{H}}_m = [\boldsymbol{h}_1\ \ \boldsymbol{h}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{h}_m]$，$m = 1,2,\cdots,M$，则

$$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{\mathcal{H}}_M^{\dagger} \tag{19}$$

其中$\boldsymbol{\mathcal{H}}_M^{\dagger}$可由如下递推公式得到

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_1^{\dagger} = \boldsymbol{h}_1^{\dagger} \tag{20}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_m^{\dagger} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{H}}_{m-1}^{\dagger} - \boldsymbol{d}_m\boldsymbol{b}_m^{\mathrm{H}}\\ \boldsymbol{b}_m^{\mathrm{H}}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{d}_m = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{m-1}^{\dagger}\boldsymbol{h}_m \tag{22}$$

$$\boldsymbol{b}_m^{\mathrm{H}} = \begin{cases}\boldsymbol{c}_m^{\dagger}, & 若\boldsymbol{c}_m \neq \boldsymbol{0}\\ (1+\boldsymbol{d}_m^{\mathrm{H}}\boldsymbol{d}_m)^{-1}\boldsymbol{d}_m^{\mathrm{H}}\mathrm{H}_{m-1}^{\dagger}, & 若\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{c}_m = \boldsymbol{h}_m - \boldsymbol{\mathcal{H}}_{m-1}\boldsymbol{d}_m \tag{24}$$

3.3 新算法的步骤

将上述两种递推方法相结合，得到本文所推荐的新算法：

初始化：令$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{\Omega}_1 = [1\ \ 2\ \ \cdots\ \ M]^{\mathrm{T}}$，$i = 1$。

算法步骤：

步骤1 计算扩展加权矩阵$\boldsymbol{W}_i$，此步骤分以下3种情况：

如果$i = 1$，则利用递推公式(19)~式(24)计算$\boldsymbol{W}_1$，然后执行步骤2。

如果$2 \le i \le M-1$，则利用递推公式(17)计算$\boldsymbol{W}_i$，然后执行步骤2。

如果$i = M$，则利用式(18)计算$\boldsymbol{W}_M$，然后执行步骤2。

步骤2 确定p_i和k_i，此步骤分以下两种情况：

当$i \le M-1$时，令p_i为$\boldsymbol{W}_i$的所有行中Frobenius范数最小的行的序号，$k_i = (\boldsymbol{\Omega}_i)_{p_i}$，然后执行下一步。

当$i = M$时，令$p_i = 1$，$k_i = \boldsymbol{\Omega}_M$，然后执行下一步。

步骤3 取出$\boldsymbol{W}_i^{\mathrm{H}}$的第$p_i$列作为第$i$次迭代的加权向量$\boldsymbol{\omega}_i$。

步骤4 计算第i次迭代的判决统计量$\tilde{x}_{k_i} = \boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{H}}\boldsymbol{y}_i$。

步骤5 对$\tilde{x}_{k_i}$进行硬判决得到判决值$\hat{x}_{k_i}$。

步骤6 若$i < M$，则执行下一步骤；否则算法结束。

步骤7 计算$\boldsymbol{y}_{i+1} = \boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{h}_{k_i}\hat{x}_{k_i}$，从$\boldsymbol{\Omega}_i$的元素中删除$k_i$

得到 $\boldsymbol{\Omega}_{i+1}$，删除 $\boldsymbol{H}_i$ 的第 k_i 列得到矩阵 $\boldsymbol{H}_{i+1}$。

步骤 8　令 $i=i+1$，然后返回步骤 1。

由于上述算法只是采用更简便的计算方法来实现 V-BLAST 检测，并未改变原算法的原理，因此理论上与原算法具有完全相同的性能。在实际系统中，由于信号处理器的计算精度有限，当递推次数非常大时可能会造成计算结果的数值不稳定。但是，由于实际系统的天线数目一般较少，所以新算法的递推次数非常有限；而且由前两小节给出的公式可知，新算法的每次递推计算都非常简单，并有较高的数值稳定性。因此，新算法的数值稳定性也较高，对检测性能的影响可忽略不计。

4　复杂度分析

本节分析所提出算法的计算复杂度。为了方便分析，以下先计算各步骤所需的实数乘/除法和加/减法的次数，然后再给出相应的复数乘法和加法的次数。

步骤1的复杂度分析：

当 $i=1$ 时，需要计算式(20)~式(24)。其中，计算式(20)所需的实数乘法和加法次数为 $4N$ 和 $2N-1$；对于任意给定的 m（$m=2,3,\cdots,M$），计算式(21)~式(24)所需的实数乘法次数分别为 $4(m-1)N$，$4(m-1)N$，$4(m-1)N$ 和 $4N$，所需的实数加法次数分别为 $4(m-1)N$，$2(m-1)(2N-1)$，$4(m-1)N$ 和 $2N-1$。因此，当 $i=1$ 时步骤1所需的实数乘法和加法次数分别为 $6M^2N-2MN$ 和 $6M^2N-M^2-4MN$。

当 $2\le i\le M-1$ 时，需要计算加权矩阵 $\boldsymbol{W}_i$。对于给定的 i，判断 γ_i 是否为0的操作所需的实数乘法和加法次数均为 $4N$，计算 $\boldsymbol{W}_i$ 所需的实数乘法和加法次数分别为 $4(2M-2i+3)N$ 和 $8MN-8iN-2M+10N+2i-3$，因此，当 $2\le i\le M-1$ 时步骤1所需的实数乘法和加法次数分别为 $4M^2N+4MN-24N$ 和 $4M^2N+2MN-M^2-20N+4$。

当 $i=M$ 时，需要计算扩展加权矩阵 $\boldsymbol{W}_M$，所需的实数乘法和加法次数分别为 $4N$ 和 $2N-1$。

综合以上3种情况可得步骤1所需的实数乘法和加法次数分别为 $10M^2N+2MN-20N$ 和 $10M^2N-2M^2-2MN-18N+3$，而相应的复数乘法和加法次数分别为 $\frac{5}{2}M^2N+\frac{1}{2}MN-5N$ 和 $\frac{5}{2}M^2N-M^2-\frac{3}{2}MN-4N+\frac{3}{2}$。

步骤2~步骤8的复杂度分析：

对于给定的 i（$i=1,2,\cdots,M-1$），确定 p_i 所需的实数乘法和加法次数分别为 $2(M-i+1)N$ 和 $2(M-i+1)N-1$，确定 $\boldsymbol{y}_{i+1}$ 需要的实数乘法和加法次数均为 $4N$；对于给定的 i（$i=1,2,\cdots,M$），确定 $\tilde{x}_{k_i}$ 需要的实数乘法和加法次数分别为 $4N$ 和 $4N-2$；其它操作的复杂度可忽略不计。因此，步骤 2~ 步骤 8 所需的实数乘法和加法次数分别为 $M^2N+9MN-6N$ 和 $M^2N+9MN-3M-6N+1$，相应的复数乘法和加法的次数分别为 $\frac{1}{4}M^2N+\frac{9}{4}MN-\frac{3}{2}N$ 和 $\frac{1}{4}M^2N+\frac{9}{4}MN-\frac{3}{2}M-\frac{3}{2}N+\frac{1}{2}$。

综上所述，本文提出的算法所需的总的复数乘法次数为

$$\frac{11}{4}M^2N+\frac{11}{4}MN-\frac{13}{2}N=\frac{11}{4}M^2N+\mathcal{O}(MN)$$

所需的总的复数加法次数为

$$\begin{aligned}&\frac{11}{4}M^2N-M^2+\frac{3}{4}MN-\frac{3}{2}M-\frac{11}{2}N+2\\&=\frac{11}{4}M^2N+\mathcal{O}(M^2+MN)\end{aligned}$$

特别是当 $M=N$ 时，所提出的算法所需的复数乘法和加法次数分别为

$$\frac{11}{4}M^3+\frac{11}{4}M^2-\frac{13}{2}M=\frac{11}{4}M^3+\mathcal{O}(M^2)$$

$$\frac{11}{4}M^3-\frac{1}{4}M^2-7M+2=\frac{11}{4}M^3+\mathcal{O}(M^2)$$

传统算法[6]需要多次计算矩阵伪逆，其复杂度达到了 $\mathcal{O}(M^4)$ 的数量级，显然远高于本文提出的算法。文献[10]提出的快速递归算法是目前已知的最优V-BLAST算法中复杂度最低的，文中直接给出了MMSE-SIC算法的复杂度，其提出的ZF-SIC算法与MMSE-SIC算法的不同点在于：ZF-SIC算法需要在利用式(28)进行递推前先要计算初始矩阵，实际上是求一个 $M\times M$ 维方阵的逆(详见文献[10])，此处假设采用Greville算法来计算这个初始矩阵。利用文献[10]已有的分析，再经简单计算可得文献[10]提出的ZF-SIC算法所需要的复数乘法和加法次数分别为

$$\begin{aligned}&\frac{7}{6}M^3+3M^2N-2M^2+4MN-\frac{1}{6}M-N\\&=\frac{7}{6}M^3+3M^2N+\mathcal{O}(M^2+MN)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}M^3+\frac{5}{2}M^2N-4M^2+\frac{5}{2}MN-M-N\\&=\frac{3}{2}M^3+\frac{5}{2}M^2N+\mathcal{O}(M^2+MN)\end{aligned}$$

当 $M=N$ 时，文献[10]的算法所需的复数乘法和加法次数分别为

$$\frac{25}{6}M^3+2M^2-\frac{7}{6}M=\frac{25}{6}M^3+\mathcal{O}(M^2)$$

$$4M^3-\frac{3}{2}M^2-2M=4M^3+\mathcal{O}(M^2)$$

由上述分析可知，对于较大的 M，新算法所需的复数乘法和加法次数分别只是文献[10]提出的算法的66%和68.75%。

然而，实际的V-BLAST系统通常仅能装配较少的天线。表1中给出了 $M=2,3,\cdots,10$ 时，本文提出的算法和文献[10]的算法的所需的复数乘法、复数加法以及浮点运算次数(flops)的具体值。注：flops主要反映算法的计算速度，1次复数乘法需要6次浮点运算，1次复数加法需要2次浮点运算。如表1

所示，本文提出的新算法在3种指标上均优于文献[10]提出的算法，而且天线数目越少优势越明显。

表1 两种递归算法的复杂度比较

M		2	3	4	5	6	7	8	9	10
复数乘法	文献[10]	39	127	294	565	965	1519	2252	3189	4355
	本文	20	79.5	194	380	654	1032.5	1532	2169	2960
复数加法	文献[10]	22	88.5	224	452.5	798	1284.5	1936	2776.5	3830
	本文	9	53	146	304.5	545	884	1338	1923.5	2657
flops	文献[10]	278	939	2212	4295	7386	11683	17384	24687	33790
	本文	138	583	1456	2889	5014	7963	11868	16861	23074

5 结束语

本文提出了一种快速递归 V-BLAST 检测算法。该算法能够利用前一次迭代时得到的计算结果直接递推出下一次迭代的迫零加权矩阵和加权向量，在不损失性能的前提下达到了更低的计算复杂度和更快的处理速度。当发射天线数目 (M) 与接收天线数目 (N) 相同时，该算法仅需要 $\frac{11}{4}M^3+\mathcal{O}(M^2)$ 次复数乘法和加法运算。此外，文中所给出的矩阵伪逆递推公式可以被广泛用于简化类似的伪逆计算问题。

参 考 文 献

[1] Telatar I E. Capacity of multiantenna Gaussian channels. *Euro. Trans. on Telecommun.*, 1999, 10(6): 585–595.

[2] Foschini G J. Layered space-time architecture for wireless communication in a fading environment when using multi-element antennas. *Bell Labs Tech. J.*, 1996, 1(2): 41–59.

[3] Foschini G J and Gans M J. On limits of wireless communication in a fading environment when using multiple antennas. *Wireless Personal Commun.*, 1998, 6(3): 311–335.

[4] Gesbert D, Shafi M, and Shiu D, *et al.*. From theory to practice: an overview of MIMO space–time coded wireless systems. *IEEE J. on Select. Areas Commun.*, 2003, 21(3): 281–302.

[5] Paulraj A J, Gore D A, and Nabar R U, *et al.*. An overview of MIMO communications——a key to gigabit wireless. *Proc. IEEE.* 2004, 92(2): 198–218.

[6] Wolniansky P W, Foschini G J, and Golden G D, *et al.*. V-BLAST: An architecture for realizing very high data rates over the rich-scattering wireless channel. Proc. Int. Symp. Signals, Systems and Electronics (ISSE). Pisa, Italy, September 1998: 295–300.

[7] Golden G D, Foschini C J, and Valenzuela R A, *et al.*. Detection algorithm and initial laboratory results using V-BLAST space-time communication architecture. *Electron. Lett.*, 1999, 35(1): 14–16.

[8] Tao Xiaofeng, Elena C, and Yu Zhuizhuan, *et al.*. New detection algorithm of V-BLAST space-time code. Proc. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC) 2001 Fall, Atlantic City, NJ, Oct. 2001: 2421–2423.

[9] Wong W K, Tsui Chi-Ying, and Cheng R S. A low complexity architecture of the V-BLAST system. Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC) 2000, Chicago, IL, Sept. 2000: 310–314.

[10] Benesty J, Huang Y, and Chen J. A fast recursive algorithm for optimum sequential signal detection in a BLAST system. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1722–1730.

[11] B Hassibi. A fast square-root implementation for BLAST. Conf. Rec. Thirty-Fourth Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput., Pacific Grove, CA, 2000: 1255–1259.

[12] Campbell S L and Meyer C D. Generalized Inverses of Linear Transformations. London, San Francisco: Pitman, 1979, Chapter 3.

[13] Ben-Israel A and Greville T. Generalized Inverses: Theory and Applications. New York: Wiley, 1977, Chapter 7.

罗振东： 男，1975 年生，博士生，从事无线通信中的信号处理技术、编译码技术和自适应传输技术的研究.

赵 明： 男，1981 年生，硕士生，研究方向为无线通信中的空时信号处理和多用户检测技术.

刘思杨： 男，1984 年生，硕士生，研究方向为无线通信中的空时信号处理技术.

刘元安： 男，1963 年生，教授，博士生导师，主要从事信息安全、无线通信等相关领域的理论和技术的研究.