

双 Haar 小波变换系数的 MAP 估计及在图像去噪中的应用

刘英霞 王欣

(山东大学信息科学与工程学院 济南 250100)

摘要: 小波变换作为一种新的工具, 在信号去噪中得到了重要的应用。本文对双 Haar 小波变换系数, 提出了 MAP 的估计方法, 并对其在图像去噪中的应用进行了讨论。实验表明所提出的小波收缩算法与软门限方法相比较, 用于图像去噪时可以给出更好的结果。

关键词: 小波变换; MAP 估计; 图像去噪

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)05-1038-03

MAP Estimate of Double Haar Wavelet Coefficients and Its Application to Image Denoising

Liu Ying-xia Wang Xin

(School of Information Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250100, China)

Abstract: As a new tool, the wavelet transform has been used successfully in signal denoising. In this paper, the MAP estimate of double Haar wavelet transform coefficients is developed. Also, its application to image denoising is discussed. Examples show that the proposed approach is better than the soft thresholding in image denoising.

Key words: Wavelet transform; MAP estimate; Image denoising

1 引言

小波变换作为一种新的信号分析工具, 在信号去噪中得到了重要应用。Mallat 等人^[1]首先提出了一种最大模重建的方法, 它主要利用信号的小波变换系数的极大模值, 来重建原始信号, 从而达到抑制信号中的噪声的目的。Donoho^[2]则提出了一种软门限去噪的方法, 它是通过设定一个固定的门限来对小波系数进行收缩, 达到消除噪声的影响。由于该方法简单有效、便于应用, 故一经提出便受到人们的广泛注意。后续的研究工作包括对软门限中门限值的设定进行了深入的探讨^[3], 特别是Moulin^[4]等人证明了软门限可以看成当信号模型为Laplace分布时的最大后验估计。最近, Hansen^[5]等人利用最小描述长度(MDL)原理, 给出了一种小波收缩算法。Xie^[6]等人对该算法进行了改进。由于利用小波变换可以有效地分离信号中不同的频率分量, 而与噪声相比, 信号的能量往往又集中在低频部分。因此基于小波变换域的这些信号的去噪方法与传统的滤波方法相比, 往往会给出更好的结果。

在图像处理中, 利用小波域去噪的一个重要问题就是小波基的选取。我们希望选取的小波基应该具有良好的边缘检测性能。实验表明^[7], Haar小波具有最好边缘检测效果, 原因是相对于其它小波而言, Haar小波具有最短的支集。但在实际使用中, 基于Haar小波的图像去噪效果并不理想。因此, 我们宁愿牺牲一些边缘检测效果, 而选择具有较长支集的小波, 以获得更好的滤波效果。

从本质上说, 小波变换可以看成为多通道滤波器组的一个特殊情况^[8]。如何把多通道滤波器组用于信号的去噪是一个非常吸引人的研究领域。文献[9]中提出了一种双Haar小波, 它可以看成为三通道滤波器组。双Haar小波与Haar小波一样, 具有良好的边缘检测性能, 不同之处就是它具有更好的平滑噪声的功能, 因此非常适用于信号的去噪。

本文针对双 Haar 小波变换, 给出了基于 MAP 的小波收缩算法。该算法充分利用了信号的双 Haar 小波两个变换系数间的相关特性, 以便得到小波系数的最佳估计。实例表明, 与现有的软门限去噪方法相比, 它可以给出更好的去噪结果。

2 双 Haar 小波变换

在给出双 Haar 小波变换定义之前, 我们首先介绍三通道滤波器组。图 1 为一离散三通道滤波器组的方框图。从图中可以看出, 输入信号 $x(n)$ 被低通滤波器 $H_0(z)$ 和高通滤波器 $H_1(z)$, $H_2(z)$ 分解为尺度部分 $x_0(n)$ 和细节部分 $x_1(n)$, $x_2(n)$ 。经过三抽取后, 尺度信号 $x_0(n)$ 可以继续被分解。另外, 从图中可以看出, 分解后的信号经过三插值后, 通过相应的重建滤波器 $G_0(z)$ 和 $G_1(z)$, $G_2(z)$ 就可以得到输出信号。对于多通道滤波器组, 我们要求信号具有完全重建特性, 即 $y(n) = x(n)$ 。

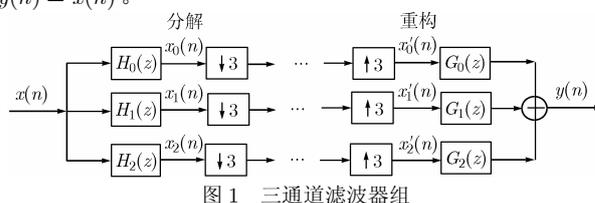


图 1 三通道滤波器组

双 Haar 小波是基于两个 Haar 小波的三通道小波变换,其分析滤波器组为

$$H_0(z) = (z + 1 + z^{-1})/3 \quad (1)$$

$$H_1(z) = (1 - z^{-1})/3 \quad (2)$$

$$H_2(z) = (1 - z)/3 \quad (3)$$

其重建滤波器组为

$$G_0(z) = (z + 1 + z^{-1}) \quad (4)$$

$$G_1(z) = (-2z + 1 + z^{-1}) \quad (5)$$

$$G_2(z) = (z + 1 - 2z^{-1}) \quad (6)$$

实际上,通过简单的推导可以得到三通道滤波器组信号重建的条件为^[8]:

$$\frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 G_k(z)H_k(z) = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{k=0}^2 G_k(z)H_k(zW_3^n) = 0, \quad n = 1, 2 \quad (8)$$

这里 $W_3 = \exp(-j2\pi/3)$ 。这样把 $H_k(z)$, $G_k(z)$, $k = 0, 1, 2$ 代入式(7)和式(8),就可以证明它们符合完全重建条件。

由定义可以看出, $H_1(z)$ 和 $H_2(z)$ 为两个 Haar 小波, $H_0(z)$ 为一均值滤波器。因此,双 Haar 小波滤波器组具有良好的边缘检测性能和平滑噪声的能力。但是该滤波器组不是正交滤波器组,故用于信号去噪时,必须要设计新的小波收缩算法。我们将在下一小节对该问题进行讨论。

3 双 Haar 小波系数的 MAP 估计

为给出小波域去噪的具体算法,我们假设某一混有噪声的输入序列可以表示为

$$x(n) = s(n) + w(n) \quad (9)$$

这里 $s(n)$ 是原始信号, $w(n)$ 为均值为零的 Gauss 白噪声。

设在某一尺度下 $x(n)$ 经过双 Haar 小波变换后,其小波系数分别为 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 。则有

$$x_1(n) = s_1(n) + w_1(n) \quad (10)$$

$$x_2(n) = s_2(n) + w_2(n) \quad (11)$$

其中 $s_1(n)$ 和 $s_2(n)$, $w_1(n)$ 和 $w_2(n)$ 分别表示 $s(n)$ 和 $w(n)$ 经过双 Haar 小波变换后的小波系数。

令 $\mathbf{x} = [x_1(n) \ x_2(n)]^T$, $\mathbf{s} = [s_1(n) \ s_2(n)]^T$, $\mathbf{w} = [w_1(n) \ w_2(n)]^T$ 。则式(10)和式(11)可以写成下述的矩阵形式:

$$\mathbf{x} = \mathbf{s} + \mathbf{w} \quad (12)$$

显然, $w_1(n)$ 和 $w_2(n)$ 是具有相同分布的零均值 Gauss 白噪声。设其方差为 σ_w^2 , 那么概率密度函数可以写为

$$p_w(\mathbf{w}) = \frac{1}{2\pi\sigma_w^2} \exp\left[-\frac{w_1^2 + w_2^2}{2\sigma_w^2}\right] \quad (13)$$

为了得到小波系数的 MAP 估计,我们必须对信号的先验概率分布有所了解。在这里,我们对小波系数采用下述二维 Gauss 概率密度模型:

$$p_s(\mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \exp\left[-\frac{s_1^2 + s_2^2}{2\sigma_s^2}\right] \quad (14)$$

其中 σ_s^2 为信号小波系数的方差。另外,我们也可以采用其它的信号模型,从而得到不同的小波系数收缩算法^[10]。

根据定义,MAP 估计要求当给定观测向量 \mathbf{x} 后,出现 \mathbf{s} 的概率最大,即 \mathbf{s} 的估计值:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\mathbf{s}} p_{s|\mathbf{x}}(\mathbf{s} | \mathbf{x}) = \arg \max_{\mathbf{s}} [p_{\mathbf{x}|\mathbf{s}}(\mathbf{x} | \mathbf{s})p_s(\mathbf{s})] \quad (15)$$

通过取对数运算及式(13),可得等效的表达式:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} &= \arg \max_{\mathbf{s}} [\log p_{\mathbf{x}|\mathbf{s}}(\mathbf{x} | \mathbf{s}) + \log p_s(\mathbf{s})] \\ &= \arg \max_{\mathbf{s}} \left[C - \frac{(x_1 - s_1)^2}{2\sigma_w^2} - \frac{(x_2 - s_2)^2}{2\sigma_w^2} - \frac{s_1^2 + s_2^2}{2\sigma_s^2} \right] \end{aligned} \quad (16)$$

其中 C 为常数。这样经过求偏导取零值后,有

$$(x_1 - s_1)/\sigma_w^2 - s_1/\sigma_s^2 = 0 \quad (17)$$

$$(x_2 - s_2)/\sigma_w^2 - s_2/\sigma_s^2 = 0 \quad (18)$$

对 s_1 和 s_2 分别求解后,就可以得到小波系数的 MAP 估计:

$$\hat{s}_k(n) = x_k(n) \left[1 - \frac{\sigma_w^2}{\sigma_s^2 + \sigma_w^2} \right], \quad k = 1, 2 \quad (19)$$

由式(10)和式(11)可以得到

$$x_k^2(n) = \sigma_s^2 + \sigma_w^2, \quad k = 1, 2 \quad (20)$$

代入式(19)后有

$$\hat{s}_k(n) = x_k(n) \left[1 - \frac{\sigma_w^2}{x_k^2(n)} \right], \quad k = 1, 2 \quad (21)$$

注意到 $x_k^2(n) = \sigma_s^2 + \sigma_w^2 \geq \sigma_w^2$ 故当 $x_k^2(n) \leq \sigma_w^2$ 时,可以令 $\hat{s}_k(n) = 0$ 。故最后得到小波系数的最佳估计:

$$\hat{s}_k(n) = \begin{cases} x_k(n) \left[1 - \frac{\sigma_w^2}{x_k^2(n)} \right], & x_k^2(n) > \sigma_w^2 \\ 0, & x_k^2(n) \leq \sigma_w^2 \end{cases}, \quad k = 1, 2 \quad (22)$$

由式(22)给出的小波系数估计算法也是一种小波系数的收缩算法。与软门限方法相比较,它的收缩值不是固定的,而是随小波系数幅度的变大而缩小,从而使信号的边缘得到更为有效的保护。

4 双 Haar 小波用于去除图像的 Gauss 白噪声

上面给出了双 Haar 小波的小波系数的 MAP 估计,下面将举例说明该方法与软门限方法在去除 Gauss 白噪声时能力的不同。需要说明的是,由于软门限于去噪时,需要采用正交基。而双 Haar 小波是非正交小波,因此不适用于软门限。为了进行合理的比较,对软门限,我们选用了二次样条 Bio3.1 双正交小波^[11]。其原因是该小波的支集长度为 4,与支集长度为 3 的双 Haar 小波基本相等。

由于本文提出的方法是在 Haar 小波的基础上得到结论,而 Haar 小波具有良好的保持图像边缘的特点,因此该方法在去噪的同时能够保持图像的细节部分。

本节将举例说明它们可以有效地用于图像的去噪。为了便于比较,所有实验仅在第一个小波变换尺度下进行处理。一维信号的小波变换可以很容易推广到二维。下面的例子就是利用混有噪声的 Lena 图像来比较不同的小波对图像去噪能力的不同。

例 1: 图 2(a) 给出了原始 Lena 图像。对该图像叠加方差分别为 100, 200, 300 和 400 的 Gauss 白噪声后, 得到 4 幅被噪声污染的图像。然后对这 4 幅图像分别用基于二次样条 Bio3.1 双正交小波的软门限方法和基于双 Haar 小波的 MAP 方法处理后, 其信噪比的改进列于表 1 中。图 2 (b) 为原始 Lena 图像叠加方差为 200 的 Gauss 白噪声后的图像。图 2(c)和 2(d)为该噪声图像分别经过基于二次样条 Bio3.1 双正交小波的软门限和基于双 Haar 小波的 MAP 方法处理后的图像。可以看出, 后者在不同的噪声情况下, 均能给出较好的结果。



图 2

表 1 不同方法信噪比改进比较表(dB)

噪声方差	100	200	300	400
Soft 方法	0.53	1.51	1.92	2.16
MAP 方法	2.12	3.44	4.02	4.72

5 结束语

本文首先介绍了双 Haar 小波基的结构, 然后在信号模型和噪声模型均为 Gauss 分布的情况下, 给出了双 Haar 小波变换系数的 MAP 估计的方法。该算法从本质上说, 是一种小波收缩算法。它与软门限算法的不同之处就是小波系数

的收缩量随着小波系数幅度的增大而减少, 从而使信号的边缘得到更为有效的保护。实验表明该算法与软门限方法相比, 用于图像的去噪中给出了更好的结果。

参考文献

- [1] Mallat S and Zhong S. Characterization of signals for multiscalar edges. *IEEE Trans. on PAMI*, 1992, 14(7): 710-732.
- [2] Donoho D. De-noising by soft thresholding. *IEEE Trans. on IT*, 1995, 41(3): 613-627.
- [3] Donoho D and Johnstone I M. Adapting to unknowing smoothness via wavelet shrinkage *J. Amer. Statist. Associ.*, 1995, 90(2): 1200-1224.
- [4] Moulin P and Liu J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors. *IEEE Trans. on Information Theory*, 1999, 45(4): 909-919.
- [5] Hansen M and Yu B. Wavelet thresholding via MDL for natural images. *IEEE Trans. on Information Theory*, 2000, 46(8): 1778-1788.
- [6] Xie J, Zhang D, and Xu W. Spatially adaptive wavelet denoising using the minimum description length principle. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2004, 13(2): 179-187.
- [7] Nowak R D. Wavelet-based Rician noise removal for Magnetic resonance imaging. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1999, 8(10): 1408-1419.
- [8] Nguyen T Q and Vaidyanathan P P. Structures for M-channel perfect-reconstruction FIR QMF banks which yield linear-phase analysis filters. *IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing*, 1990, ASSP-38(3): 433-446.
- [9] Wang X. Nonlinear multiwavelet transform based soft shresholding In Conf. IEEE APCCAS'2000, Tianjing, Dec. 2000: 775-778.
- [10] Sendur L and Selesnik I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2002, 11(11): 2744-2756.
- [11] Mallat S. A wavelet tour of signal processing. New York: Academic Press, 1999.

刘英霞: 女, 1973 年生, 博士生, 研究方向为图像处理与计算机视觉。

王欣: 男, 1947 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为非线性滤波、图像处理与计算机视觉, 现为中国电子学会电路与系统分会委员。