

## 自校正分布式观测融合 Kalman 滤波器

邓自立 郝 钢

(黑龙江大学自动化系 哈尔滨 150080)

**摘要:** 对于带未知噪声统计和带具有相同右因子的观测阵的多传感器系统,应用加权最小二乘(WLS)法可得到一个等价的融合观测方程。该文应用现代时间序列分析方法,基于新息模型参数的在线辨识,可估计未知噪声方差,进而提出了自校正加权观测融合 Kalman 滤波器。在新息模型参数估计是一致的和观测数据是有界的假设下,该文证明了自校正 Kalman 滤波器收敛于当噪声统计已知时的全局最优融合 Kalman 滤波器,因而它具有渐近全局最优性。最后给出了一个 4 传感器跟踪系统的仿真例子并验证了其有效性。

**关键词:** 多传感器信息融合; 分布式观测融合; 自校正 Kalman 滤波器; 噪声方差估计; 现代时间序列分析方法  
**中图分类号:** TP391,O211.64 **文献标识码:** A **文章编号:** 1009-5896(2007)08-1850-05

## Self-tuning Distributed Measurement Fusion Kalman Filter

Deng Zi-li Hao Gang

(Department of Automation, Heilongjiang University, Harbin 150080, China)

**Abstract:** For the multisensor system with unknown noise statistics, and with the measurement matrices having a same right factor, based on Weighted Least Squares(WLS) method, an equivalent fusion measurement equation is obtained. Using the modern time series analysis method, based on on-line identification of the innovation model parameters, unknown noise variances can be estimated, and a self-tuning weighted measurement fusion Kalman filter is presented. Under the assumptions that the parameter estimation of the innovation model is consistent and the measurement data are bounded, it is proved that the self-tuning Kalman filter converges to globally optimal fusion Kalman filter with known noise statistics, so that it has asymptotic global optimality. A simulation example for a tracking system with 4-sensor shows its effectiveness.

**Key words:** Multisensor information fusion; Distributed measurement fusion; Self-tuning Kalman filters; Noise variance estimation; Modern time series analysis method

### 1 引言

目前,多传感器信息融合已成为备受人们关注的热门领域,在C<sup>3</sup>I(指挥、控制、通信和情报)系统和许多民事领域得到了广泛的应用。对于基于Kalman滤波的多传感器观测数据融合,有两种观测融合方法<sup>[1]</sup>。一种是集中式观测融合方法,它用扩维方法合并多传感器的观测方程为一个观测方程,其优点是可得全局最优状态估计。但由于观测维数增加,引起计算负担增大,不便于实时应用。另一种是加权观测融合方法或分布式观测融合方法。它采用加权方式,将各个观测方程融合成一个维数不大的观测方程。目前有基于加权最小二乘算法(WLS)的两种加权观测融合算法<sup>[1]</sup>,它们与集中式观测融合算法相比,具有数值上相同的Kalman估计器,因而具有全局最优性,并且明显地减小了计算负担,便于实时应用。在实际应用中,模型的噪声统计一般是未知的。处理含未知噪声统计系统的渐近最优滤波问题叫自校正滤

波<sup>[2]</sup>,具有重要的工程应用意义。用经典Kalman滤波方法不能解决这类问题,因为它要求模型参数和噪声统计精确已知<sup>[3,4]</sup>。目前关于信息融合自校正滤波的研究和报道甚少<sup>[5]</sup>,而且文献<sup>[5]</sup>采用分布式状态融合方法,只能得到次优融合Kalman滤波器<sup>[6,7]</sup>。本文针对这种情形,用现代时间序列分析方法<sup>[4]</sup>,对含未知噪声统计并且观测阵有相同右因子的多传感器系统,基于局部ARMA新息模型和观测融合MA新息模型的在线辨识,提出了一种具有渐近全局最优性的自校正加权观测融合Kalman滤波器,并证明了它的收敛性。

### 2 问题阐述

考虑多传感器定常离散线性随机系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi\mathbf{x}(t) + \Gamma\mathbf{w}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{H}_i\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), i = 1, \dots, L \quad (2)$$

其中  $t$  为离散时间,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$  为状态,  $\mathbf{y}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  为第  $i$  传感器的观测,  $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  为观测噪声,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$  为输入噪声,  $\Phi, \Gamma, \mathbf{H}_i$  为已知的适当维常阵。

**假设 1**  $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$  和  $\mathbf{v}_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  是零均值、方差阵各为  $\mathbf{Q}_w$  和  $\mathbf{R}_i$  的相互独立的白噪声:

2005-11-15 收到, 2006-06-13 改回

国家自然科学基金(60374026)和黑龙江大学自动控制重点实验室基金(F04-01)资助课题

$$E \begin{bmatrix} \mathbf{w}(t) \\ \mathbf{v}_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T(k) & \mathbf{v}_i^T(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_i \end{bmatrix} \delta_{tk} \quad (3)$$

其中  $E$  为均值号,  $T$  为转置号,  $\delta_{tt} = 1$ ,  $\delta_{tk} = 0 (t \neq k)$ , 且  $\mathbf{v}_i(t)$  与  $\mathbf{v}_j(t) (i \neq j)$  相互独立:

$$E[\mathbf{v}_i(t)\mathbf{v}_j^T(k)] = \mathbf{0}, \quad i \neq j, \forall t, k \quad (4)$$

**假设 2**  $(\Phi, \mathbf{H}_i)$  为完全可观时,  $(\Phi, \Gamma)$  为完全可控对, 且各传感器观测方程具有相同的右因子  $m \times n$  矩阵  $\mathbf{H}$ , 即

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{U}_i \mathbf{H} \quad (5)$$

其中  $\mathbf{U}_i$  为  $m_i \times m$  矩阵, 且  $(\Phi, \mathbf{H})$  为完全可观对,  $\beta$  可观性指数。

**假设 3** 矩阵  $\sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{U}_i$  是可逆的。

应用加权最小二乘法(WLS)<sup>[3]</sup>, 等价于  $L$  个观测方程组式(2)的加权观测融合方程为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (6)$$

其中  $\mathbf{y}(t)$  为  $m \times 1$  加权融合观测向量,  $\mathbf{v}(t)$  为  $m \times 1$  加权融合观测噪声,

$$\mathbf{y}(t) = \left[ \sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{U}_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{y}_i(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{v}(t) = \left[ \sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{U}_i \right]^{-1} \sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{v}_i(t) \quad (8)$$

由式(7)和假设 3, 显然  $\mathbf{v}(t)$  有方差阵  $\mathbf{R}$  为

$$\mathbf{R} = \left[ \sum_{i=1}^L \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{U}_i \right]^{-1} \quad (9)$$

文献[1]证明系统式(1)和式(2)的集中式融合全局最优 Kalman 估计器等价于加权观测融合系统式(1)和式(6)的最优 Kalman 估计器。问题是: 当噪声方差阵  $\mathbf{Q}_w$  和  $\mathbf{R}_i (i = 1, \dots, L)$  未知时, 对加权观测融合系统式(1)和式(6)求自校正加权观测融合 Kalman 估计器。

### 3 全局最优加权观测融合 Kalman 滤波器

由式(1)和式(6)有

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(\mathbf{I}_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma\mathbf{w}(t-1) + \mathbf{v}(t) \quad (10)$$

其中  $\mathbf{I}_n$  为  $n \times n$  单位阵,  $q^{-1}$  为单位滞后算子,  $q^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t-1)$ 。引入有理分式矩阵左素分解<sup>[8]</sup>

$$\mathbf{H}(\mathbf{I}_n - q^{-1}\Phi)^{-1}\Gamma q^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(q^{-1})\mathbf{B}(q^{-1}) \quad (11)$$

其中多项式矩阵  $\mathbf{A}(q^{-1})$  和  $\mathbf{B}(q^{-1})$  有形式

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}(q^{-1}) &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{A}_{n_a} q^{-n_a} \\ \mathbf{B}(q^{-1}) &= \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{B}_{n_b} q^{-n_b} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中  $n_a$  和  $n_b$  为阶次,  $\mathbf{A}_i$  和  $\mathbf{B}_i$  为系数矩阵, 且  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{I}_m$ ,  $\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$ 。将式(11)代入式(10)引出 ARMA 新息模型

$$\mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{y}(t) = \mathbf{D}(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (13)$$

$$\mathbf{D}(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{B}(q^{-1})\mathbf{w}(t) + \mathbf{A}(q^{-1})\mathbf{v}(t) \quad (14)$$

其中矩阵多项式矩阵  $\mathbf{D}(q^{-1}) = \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1 q^{-1} + \dots + \mathbf{D}_{n_d} q^{-n_d}$  是稳定的,  $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}_m$ ,  $n_d$  为阶次。新息  $\boldsymbol{\varepsilon}(t) \in \mathbf{R}^m$  是零均值、

方差阵为  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  的白噪声,  $\mathbf{D}(q^{-1})$  和  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  可用 Gevers-Wouters 算法<sup>[4]</sup>求得。应用现代时间序列分析方法<sup>[4]</sup>, 基于 ARMA 新息模型式(13), 由假设 1 和假设 2, 系统式(1)和式(6)的稳态全局最优 Kalman 滤波器<sup>[4]</sup>为

$$\hat{\mathbf{x}}(t|t) = \Psi_f \hat{\mathbf{x}}(t-1|t-1) + \mathbf{K}_f \mathbf{y}(t) \quad (15)$$

$$\Psi_f = [\mathbf{I}_n - \mathbf{K}_f \mathbf{H}] \Phi \quad (16)$$

$$\mathbf{K}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{H}\Phi^{\beta-1} \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m - \mathbf{R}\mathbf{Q}_\varepsilon^{-1} \\ \mathbf{M}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{\beta-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{X}^+$  表示矩阵  $\mathbf{X}$  的伪逆,  $\mathbf{X}^+ = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T$ , 而矩阵  $\mathbf{M}_k$  可递推计算为

$$\mathbf{M}_k = -\mathbf{A}_1 \mathbf{M}_{k-1} - \dots - \mathbf{A}_{n_a} \mathbf{M}_{k-n_a} + \mathbf{D}_k \quad (18)$$

其中规定  $\mathbf{M}_i = \mathbf{0}, (i < 0)$ 。

### 4 自校正加权观测融合 Kalman 滤波器

当噪声统计  $\mathbf{R}_i$  和  $\mathbf{Q}_w$  未知时, 由式(7)和式(9)及式(14)~式(17)看到, 为了实现自校正 Kalman 滤波器, 要求辨识  $\mathbf{R}_i, \mathbf{D}_i (i = 0 \dots n_d), \mathbf{Q}_\varepsilon$ , 而不要求辨识  $\mathbf{Q}_w$ 。但  $\mathbf{Q}_w$  的影响已隐含在  $\mathbf{D}_i, \mathbf{Q}_\varepsilon, \mathbf{D}_{ij}$  和  $\mathbf{Q}_{\varepsilon i}$  中。为了辨识  $\mathbf{R}_i$ , 由式(1), 式(2), 类似于式(10)~式(14)的推导, 有第  $i$  传感器子系统的 ARMA 新息模型为

$$\mathbf{A}_i(q^{-1})\mathbf{y}_i(t) = \mathbf{D}_i(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_i(t), \quad i = 1, \dots, L \quad (19)$$

其中第  $i$  子系统新息  $\boldsymbol{\varepsilon}_i(t)$  是零均值、方差阵为  $\mathbf{Q}_{\varepsilon i}$  的白噪声,  $\mathbf{D}_i(q^{-1}) = \mathbf{D}_{i0} + \mathbf{D}_{i1}q^{-1} + \dots + \mathbf{D}_{i n_{di}} q^{-n_{di}}$  是稳定的,  $n_{di}$  为阶次,  $\mathbf{D}_{i0} = \mathbf{I}_{m_i}$ , 且有关系

$$\mathbf{D}_i(q^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_i(t) = \mathbf{B}_i(q^{-1})\mathbf{w}(t) + \mathbf{A}_i(q^{-1})\mathbf{v}_i(t) \quad (20)$$

其中  $\mathbf{D}_i(q^{-1})$  和  $\mathbf{Q}_{\varepsilon i}$  可用 Gevers-Wouters<sup>[4]</sup>算法求得。

**定理 1** 第  $i$  子系统的观测噪声方差阵  $\mathbf{R}_i$  和  $\mathbf{Q}_w$  可通过解如下矩阵方程组求得

$$\begin{aligned} \sum_{j=k}^{n_{di}} \mathbf{D}_{ij} \mathbf{Q}_{\varepsilon i} \mathbf{D}_{i,j-k}^T &= \sum_{j=k}^{n_{bi}} \mathbf{B}_{ij} \mathbf{Q}_w \mathbf{B}_{i,j-k}^T + \sum_{j=k}^{n_a} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{A}_{i,j-k}^T, \\ k &= 0, \dots, n_{di} \end{aligned} \quad (21)$$

其中规定  $\mathbf{B}_{ij} = \mathbf{0} (j > n_{bi}), \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{0} (j > n_{ai})$ 。特别在  $n_{di} = n_{ai} = n_{bi}$  且  $\mathbf{A}_{n_{ai}}$  非异时,  $\mathbf{R}_i$  可简单地计算为

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{A}_{n_{ai}}^{-1} \mathbf{D}_{n_{di}} \mathbf{Q}_{\varepsilon i} \quad (22)$$

**证明** 计算式(20)两边 MA 过程的相关函数立刻得式(21)。在  $n_{di} = n_{ai} = n_{bi}$  时, 注意  $\mathbf{B}_{i0} = \mathbf{0}, \mathbf{D}_{i0} = \mathbf{I}_{m_i}, \mathbf{A}_{i0} = \mathbf{I}_{m_i}$ , 在式(21)中置  $k = n_{di}$ , 有关系

$$\mathbf{D}_{i n_{di}} \mathbf{Q}_{\varepsilon i} = \mathbf{A}_{n_{ai}} \mathbf{R}_i \quad (23)$$

这引出式(22)。注意, 在式(21)中  $\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}$  是已知的, 而  $\mathbf{D}_{ij}, \mathbf{Q}_{\varepsilon i}$  可通过辨识 ARMA 新息模型式(19)得到。对固定的  $i$ , 记由  $\mathbf{R}_i$  和  $\mathbf{Q}_w$  的未知元素组成的  $n_i \times 1$  列向量为  $\boldsymbol{\theta}_i$ , 式(21)的  $(n_{di} + 1)$  个矩阵方程可按  $\boldsymbol{\theta}_i$  写成线性方程组

$$\boldsymbol{\Omega}_i \boldsymbol{\theta}_i = \boldsymbol{\omega}_i \quad (24)$$

其中  $\Omega_i$  是由  $A_{ij}$  和  $B_{ij}$  的元素的初等运算产生, 因而是已知的, 而  $n_i \times 1$  列向量  $\Omega_i$  是由  $D_{ij}$  和  $Q_{\varepsilon i}$  的元素的初等运算(四则运算)产生, 因而是未知的。假设  $\Omega_i$  列满秩, 因而  $\Omega_i$  亦行满秩, 即  $\text{rank } \Omega_i = n_i$ 。故可从中选  $n_i$  个线性无关的方程构成新的线性方程组

$$\Omega_{i0} \theta_i = \omega_{i0} \tag{25}$$

其中  $\Omega_{i0}$  是已知的  $n_i \times n_i$  非异方阵。于是可得到

$$\theta_i = \Omega_{i0}^{-1} \omega_{i0} \tag{26}$$

其中  $\omega_{i0}$  由  $D_{ij}$  和  $Q_{\varepsilon i}$  的元素的初等运算产生, 因而是  $D_{ij}$  和  $Q_{\varepsilon i}$  的元素的连续函数, 记为

$$\omega_{i0} = \omega_{i0}(D_{i1}, \dots, D_{in_i}, Q_{\varepsilon i}) \tag{27}$$

因而由式(26)可得到  $R_i$  的未知元素为  $D_{ij}$  和  $Q_{\varepsilon i}$  的元素的连续函数, 记为

$$R_i = R_i(D_{i1}, \dots, D_{in_i}, Q_{\varepsilon i}) \tag{28}$$

用 ARMA 新息模型式(19)的递推辨识器可得到估值  $\widehat{D}_{ij}$  和  $\widehat{Q}_{\varepsilon i}$ , 代入式(28), 可得到基于第  $i$  子系统对  $R_i$  的估值

$$\widehat{R}_i = R_i(\widehat{D}_{i1}, \dots, \widehat{D}_{in_i}, \widehat{Q}_{\varepsilon i}) \tag{29}$$

且在特殊情况下由式(22)有  $R_i$  的估值

$$\widehat{R}_i = A_{n_{ai}}^{-1} \widehat{D}_{n_{ai}} \widehat{Q}_{\varepsilon i} \tag{30}$$

证毕

自校正加权观测融合 Kalman 估计器可分如下 3 步实现:

第 1 步 置  $z_i(t) = A(q^{-1})y_i(t)$ , 式(19)简化为子系统的 MA 新息模型

$$z_i(t) = D_i(q^{-1})\varepsilon_i(t) \tag{31}$$

用子系统 MA 新息模型式(31)的递推辨识器(例如递推增广最小二乘法(RELS), 二段递推最小二乘法<sup>[4]</sup>等)可得在时刻  $t$  处  $D_{ij}$  和  $Q_{\varepsilon i}$  的估值  $\widehat{D}_{ij}$  和  $\widehat{Q}_{\varepsilon i}$ , 进而可得  $R_i$  的估值  $\widehat{R}_i$ 。为简单计, 省略估值的时标。

第 2 步 将在时刻  $t$  处估值  $\widehat{R}_i$  代入式(7)可得在时刻  $t$  处加权融合观测  $y(t)$  的估值  $\widehat{y}(t)$ 。引入新的观测方程  $z(t) = A(q^{-1})y(t)$ , 则有观测融合 MA 新息模型

$$z(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t) \tag{32}$$

定义  $\widehat{z}(t) = A(q^{-1})\widehat{y}(t)$ , 则有近似 MA 新息模型

$$\widehat{z}(t) = D(q^{-1})\varepsilon(t) \tag{33}$$

由上式用其递推辨识算法<sup>[4]</sup>可得在时刻  $t$  处的估值  $\widehat{D}_i, i = 0 \dots n_d$  和  $\widehat{Q}_\varepsilon$ 。进而由式(13)可得在时刻  $t$  处新息  $\varepsilon(t)$  的递推估值为

$$\widehat{\varepsilon}(t) = A(q^{-1})\widehat{y}(t) - \widehat{D}_1 \widehat{\varepsilon}(t-1) - \dots - \widehat{D}_{n_d} \widehat{\varepsilon}(t-n_d) \tag{34}$$

进而  $Q_\varepsilon$  的采样估值为<sup>[2]</sup>

$$\widehat{Q}_\varepsilon(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \widehat{\varepsilon}(i) \widehat{\varepsilon}^T(i) \tag{35}$$

第 3 步 将估值  $\widehat{R}_i, \widehat{D}_i, \widehat{Q}_\varepsilon, \widehat{y}(t)$  代入式(9)和式(16)-式(18)可得估值  $\widehat{R}, \widehat{M}_k, \widehat{K}_f, \widehat{\Psi}_f$  进而由式(15)可得自校正加权

观测融合 Kalman 滤波器

$$\widehat{x}^s(t|t) = \widehat{\Psi}_f \widehat{x}^s(t-1|t-1) + \widehat{K}_f \widehat{y}(t) \tag{36}$$

上述 3 步在每时刻  $t$  重复进行。

定理 2 多传感器系统式(1)和式(2)在假设 1-假设 3 下, 设噪声统计  $Q_w$  和  $R_i$  未知, 若 MA 新息模型式(31)和式(32)的参数估计是一致的, 即当  $t \rightarrow \infty$  时, 以概率 1 有  $\widehat{D}_{ij} \rightarrow D_{ij}, \widehat{D}_i \rightarrow D_i$ , 且设  $y_i(t)$  以概率 1 有界, 则自校正加权观测融合 Kalman 估计器式(36)以概率 1 收敛于当  $Q_w$  和  $R_i$  已知时的稳态全局最优 Kalman 估计器式(15), 即当  $t \rightarrow \infty$  有

$$(\widehat{x}^s(t|t) - \widehat{x}(t|t)) \rightarrow 0, \text{ w.p.1} \tag{37}$$

即它具有渐近全局最优性。

证明 由假设  $\widehat{D}_{ij} \rightarrow D_{ij}$ , 引出<sup>[2]</sup>  $\widehat{Q}_{\varepsilon i} \rightarrow Q_{\varepsilon i}$ , 从而由式(29)引出  $\widehat{R}_i \rightarrow R_i$ , 进而由式(7)和  $y_i(t)$  的有界性引出

$$(\widehat{y}(t) - y(t)) \rightarrow 0, \text{ w.p.1} \tag{38}$$

且由式(9)引出

$$\widehat{R} \rightarrow R, \text{ w.p.1} \tag{39}$$

由假设  $\widehat{D}_i \rightarrow D_i$ , 引出<sup>[2]</sup>  $\widehat{Q}_\varepsilon \rightarrow Q_\varepsilon$  和  $\widehat{M}_i \rightarrow M_i$ , 进而由式(16)和式(17)引出

$$\widehat{K}_f \rightarrow K_f, \widehat{\Psi}_f \rightarrow \Psi_f, \text{ w.p.1} \tag{40}$$

置  $\widehat{\Psi}_f = \Psi_f + \Delta \widehat{\Psi}_f, \widehat{K}_f = K_f + \Delta \widehat{K}_f$ , 则由式(40)引出当  $t \rightarrow \infty$  有

$$\Delta \widehat{\Psi}_f \rightarrow 0, \Delta \widehat{K}_f \rightarrow 0, \text{ w.p.1} \tag{41}$$

由式(7)和  $y_i(t)$  的有界性引出  $y(t)$  以概率 1 有界, 注意  $\widehat{y}(t) = \widehat{y}(t) - y(t) + y(t)$ , 于是有范数不等式

$$\|\widehat{y}(t)\| \leq \|\widehat{y}(t) - y(t)\| + \|y(t)\|, \text{ w.p.1} \tag{42}$$

由式(38)引出  $\|\widehat{y}(t) - y(t)\|$  有界, 由  $y(t)$  有界引出  $\|y(t)\|$  有界, 从而  $\|\widehat{y}(t)\|$  以概率 1 有界。置  $e(t) = \widehat{x}^s(t|t) - \widehat{x}(t|t)$ , 由式(36)减式(15)引出

$$e(t) = \Psi_f e(t-1) + u(t) \tag{43}$$

$$u(t) = \Delta \widehat{\Psi}_f \widehat{x}^s(t-1|t-1) + K_f(\widehat{y}(t) - y(t)) + \Delta \widehat{K}_f \widehat{y}(t) \tag{44}$$

由  $\widehat{y}(t)$  的有界性和  $\Psi_f$  的稳定性, 由文献[2]引理 5.5.1 引出  $\widehat{x}^s(t|t)$  以概率 1 有界。于是由式(38)和式(41)引出以概率 1 有  $u(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ 。从而由文献[2]引理 5.5.2 引出概率 1 有  $e(t) \rightarrow 0(t \rightarrow \infty)$ , 即式(37)成立。因  $\widehat{x}(t|t)$  是全局最优的, 故  $\widehat{x}^s(t|t)$  具有渐近全局最优性。证毕

注意  $y_i(t)$  是随机过程, 已知的  $y_i(t)$  的观测数据可看成  $y_i(t)$  的一个实现(一个采样函数), 由此计算出的  $\widehat{x}^s(t|t)$  和  $\widehat{x}(t|t)$  可看成是自校正融合器和最优融合器的一个实现。假如对一个实现而言, 式(37)成立, 则称  $\widehat{x}^s(t|t)$  按实现收敛于  $\widehat{x}(t|t)$ 。它比以概率 1 收敛性弱。以概率 1 收敛的概念意味着除了带零概率的实现集合外, 对其余每个实现而言按实现收敛成立。在许多应用问题中人们通常只知道随机过程的一个实现, 例如水文、气象或天文观测历史数据。因此随机过

程按实现收敛性概念具有重要理论和应用意义。

**定理 3** 多传感器系统式(1)和式(2)在假设 1-假设 3 下, 设白噪声统计  $Q_w$  和  $R_i$  未知, 若观测数据是有界的, 即  $y_i(t)$  ( $i = 1, \dots, L$ ) 的一个实现是有界的, 则自校正加权观测融合 Kalman 估计器式(36)按实现收敛于当  $Q_w$  和  $R_i$  已知时的稳态全局最优 Kalman 估计器式(15)。

**证明** 平行于定理 2 的证明立即得证。证毕

对单输入单输出系统, 有关参数均为标量, 记  $Q_w = \sigma_w^2$ ,  $R_i = \sigma_{ri}^2$ ,  $Q_{\varepsilon i} = \sigma_{\varepsilon i}^2$ ,  $A_{ij} = a_{ij}$ ,  $B_{ij} = b_{ij}$ ,  $D_{ij} = d_{ij}$ , 有如下定理:

**定理 4** 对单输入单输出系统式(1)和式(2)在假设 1-假设 2 下, 若  $\Phi$  为非异矩阵, 则有  $n_{ai} = n_{bi} = n_{di} = n$ , 且有

$$\sigma_{ri}^2 = d_{im} \sigma_{\varepsilon i}^2 / a_{im} \quad (45)$$

$$\sigma_w^2 = \left[ \sigma_{\varepsilon i}^2 \sum_{j=0}^n d_{ij}^2 - \sigma_{ri}^2 \sum_{j=0}^n a_{ij}^2 \right] / \sum_{j=0}^n b_{ij}^2 \quad (46)$$

**证明** 由  $\Phi$  非异和完全可观、可控性假设有  $A_i(q^{-1}) = \det(I_n - q^{-1}\Phi)$ ,  $B_i(q^{-1}) = H_i \text{adj}(I_n - q^{-1}\Phi)\Gamma q^{-1}$ ,  $n_{ai} = n_{bi} = n$ ,  $b_{i0} = 0$ ,  $a_{i0} = 1$ ,  $a_{im} \neq 0$ , 因而由式(14)引出  $n_{di} = n$ 。由式(22)引出式(45)。在式(21)中置  $k = 0$  引出式(46)。

证毕

### 5 仿真例子

考虑 4 传感器雷达跟踪系统

$$\mathbf{x}(t+1) = \Phi \mathbf{x}(t) + \Gamma w(t) \quad (47)$$

$$\mathbf{y}_i(t) = H_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}_i(t), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (48)$$

其中  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$ ,  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  和  $x_3(t)$  各为在采样时刻  $tT_0$  处运动目标的位置、速度和加速度。 $\mathbf{y}_i(t)$  为第  $i$  传感器对位置的观测信号,  $w(t)$  和  $\mathbf{v}_i(t)$  是零均值, 方差阵各为  $Q_w$  和  $R_i$  的相互独立白噪声, 且  $Q_w = \sigma_w^2$ ,  $R_1 = \text{diag}(\sigma_{v11}^2, \sigma_{v12}^2)$ ,  $R_2 = \text{diag}(\sigma_{v21}^2, \sigma_{v22}^2)$ ,  $R_3 = \sigma_{v3}^2$ ,  $R_4 = \sigma_{v4}^2$  是未知的, 已知  $H_3 = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $H_4 = [0 \ 1 \ 0]$ ,  $\Gamma = [0 \ 0 \ 1]^T$ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 & 0.5T_0 \\ 0 & 1 & T_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad H_1 = H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

问题是求自校正加权观测融合 Kalman 滤波器  $\hat{\mathbf{x}}_s(t|t) = [\hat{x}_1^s(t|t) \ \hat{x}_2^s(t|t) \ \hat{x}_3^s(t|t)]^T$ 。仿真中取  $T_0 = 1$ ,  $\sigma_w^2 = 0.025$ ,  $\sigma_{v11}^2 = 0.03$ ,  $\sigma_{v12}^2 = 0.05$ ,  $\sigma_{v21}^2 = 0.04$ ,  $\sigma_{v22}^2 = 0.06$ ,  $\sigma_{v3}^2 = 0.07$ ,  $\sigma_{v4}^2 = 0.08$ 。易知  $U_1 = I_2$ ,  $U_2 = I_2$ ,  $U_3 = [1 \ 0]$ ,  $U_4 = [1 \ 0]$ , 且

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

引入左素分解式(11)经计算可得观测融合 MA 信息模型<sup>[4]</sup>

$$\mathbf{z}(t) = (I_2 + D_1 q^{-1} + D_2 q^{-2}) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \quad (51)$$

$$\mathbf{z}(t) = \left( I_2 + \begin{bmatrix} -1 & -1.5T_0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} q^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} q^{-2} \right) \mathbf{y}(t) \quad (52)$$

用两段最小二乘法<sup>[2]</sup>, 自校正加权观测融合 Kalman 滤波器的辨识结果如图 1-图 3 所示。位置及速度跟踪曲线仿真图如图 4-图 6 所示。在图 1-图 6 中实线表示真实值, 虚线表示估值。自校正加权观测融合滤波器与全局最优加权观测融合滤波器的误差曲线如图 7-图 9 所示。图 1-图 3 可看到参数估计具有一致性。由图 4-图 6 看到自校正

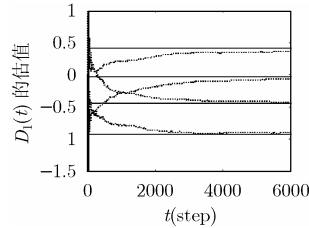


图 1 估值  $\hat{D}_1(t)$  的收敛性

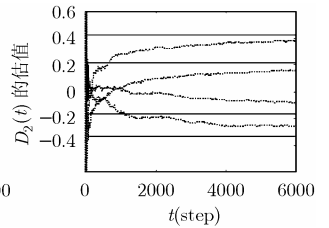


图 2 估值  $\hat{D}_2(t)$  的收敛性

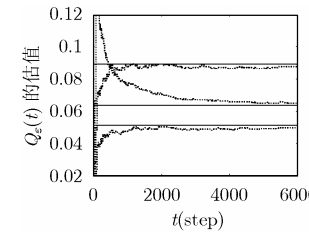


图 3 估值  $\hat{Q}_\varepsilon(t)$  的收敛性

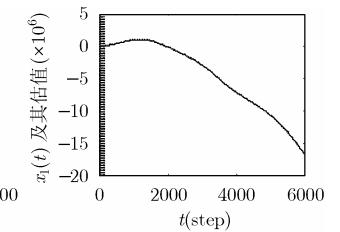


图 4 位置  $x_1(t)$  和自校正 Kalman 融合滤波器  $\hat{x}_1^s(t|t)$

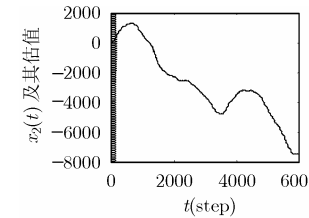


图 5 速度  $x_2(t)$  和自校正 Kalman 融合滤波器  $\hat{x}_2^s(t|t)$

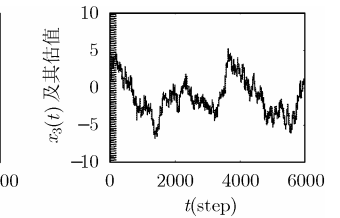


图 6 加速度  $x_3(t)$  和自校正 Kalman 融合滤波器  $\hat{x}_3^s(t|t)$

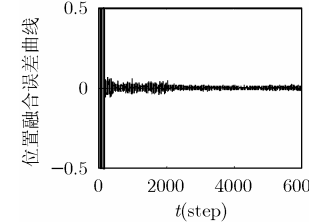


图 7 自校正融合和全局最优 Kalman 滤波器的位置误差曲线

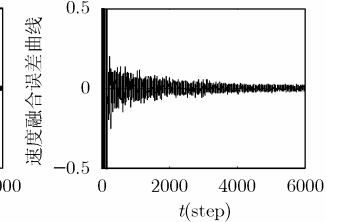


图 8 自校正融合和全局最优 Kalman 滤波器的速度误差曲线

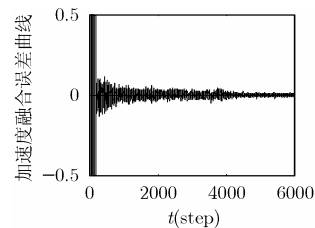


图 9 自校正融合和全局最优 Kalman 滤波器的加速度误差曲线

Kalman 滤波器具有良好的跟踪精度。由图 7-图 9 看到它具有渐近全局最优性。

## 6 结束语

对带未知噪声方差的多传感器系统, 允许各传感器观测阵具有不同维数, 但具有相同的右因子, 本文应用现代时间序列分析方法, 基于新息模型参数的在线辨识可估计噪声方差, 进而提出了一种自校正分布式观测融合 Kalman 滤波器。在以概率 1 收敛或按实现收敛意义下, 证明了它收敛于全局最优 Kalman 滤波器。同分布式状态融合自校正 Kalman 滤波器相比, 它具有计算量小, 且具有渐近全局最优性优点。

## 参 考 文 献

- [1] 邓自立, 郝钢, 吴孝慧. 两种加权观测融合方法的全局最优性和完全功能等价性. 科学技术与工程, 2005, 5(13): 860-865.
- [2] 邓自立. 自校正滤波理论及其应用——现代时间序列分析方法. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2003: 1-343.

- [3] Kailath T, Sayed A H, and Hassibi B. Linear Estimation. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 2000: 78-116.
- [4] 邓自立. 最优估计理论—建模、滤波、信息融合估计. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005: 1-490.
- [5] 邓自立, 马建为, 高媛. 两传感器自校正信息融合 Kalman 滤波器. 科学技术与工程, 2003, 3(4): 321-324.
- [6] Sun Shuli and Deng Zili. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter. *Automatica*, 2004, 40(6): 1017-1023.
- [7] Deng Zili, Gao Yuan, and Mao Lin, *et al.* New approach to information fusion steady-state Kalman filtering. *Automatica*, 2005, 41(10): 1695-1707.
- [8] 郑大钟. 线性系统理论(第 2 版). 北京: 清华大学出版社, 2002: 441-466.

邓自立: 男, 1938 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为状态估计、信息融合等.

郝 钢: 男, 1980 年生, 硕士, 研究方向为信息融合状态估计.