

# 基于修正小波阈值的图像变分分解

姜东焕 宋国乡

(西安电子科技大学理学院应用数学系 西安 710071)

**摘要:** Daubechies 等人(2004)首先提出了图像的变分分解和小波软阈值之间的联系。小波软阈值会对图像边缘造成过度光滑,使重构图像在边缘附近产生吉布斯震荡现象,为克服该问题,本文用具有更高正则性的分段  $n$  次多项式小波阈值和指数阈值做图像分解,得到图像分解的变分泛函的近似最小值。当  $n$  越大时,图像分解的变分问题的近似最小值越逼近精确最小值。这样得到了图像的变分分解和修正小波阈值之间的联系。实验结果表明该模型用于图像分解的有效性。

**关键词:** 图像分解;变分问题;小波阈值;近似最小值

**中图分类号:** TN911.73

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2007)05-1035-03

## Image Variational Decomposition Based on Modified Wavelet Threshold

Jiang Dong-huan Song Guo-xiang

(Department of Mathematics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** The relation of variational image decomposition and wavelet soft threshold was discovered recently by Daubechies and Teschke. A major issue is that thresholded coefficients entail oversmoothing of edges, coefficients set to zero yield Gibbs oscillations in the vicinity of edges, while coefficients remain corrupted generate artifacts. To overcome this problem, piecewise  $n$ -degree polynomial threshold and exponential threshold are used to decompose images in this paper, both of which have higher regularity. The near-minimizer of the variational function of image decomposition is obtained. Here,  $n$  may be chosen as any positive number and the bigger the degree  $n$  is, the better the approximation quality is. Thus, the connection of image variational decomposition and the modified wavelet threshold are obtained. Experimental results demonstrate the effectiveness of the model.

**Key words:** Image decomposition; Variational issue; Wavelet threshold; Near-minimizer

### 1 引言

近来,图像分解成了图像分析中一项新的研究领域和任务。与图像恢复一样,可以将该问题看作一个逆问题,用正则化和最小化变分泛函的方法分解图像。具体来说,就是把图像  $f$  分解成  $u + v$ , 其中  $u$  表示  $f$  的结构,它包含了  $f$  的主要特征,  $v$  是由纹理和噪声组成的震荡部分。Rudin 等人<sup>[1]</sup>首先提出了用总变分最小化恢复图像,用有界变差空间刻画分段光滑部分  $u$ , 用  $L_2$  空间刻画图像的噪声部分  $v = f - u$ :

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} F(u) = \lambda \int_{\Omega} |f - u|^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u|$$

通过解泛函的欧拉方程得到上述最小化问题的解。

由于  $L_2$  空间不能很好地刻画图像震荡部分, Osher 等人<sup>[2]</sup>提出用  $H^{-1}(\Omega)$  空间来刻画。该模型为

$$\inf_u E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| + \lambda \int_{\Omega} |f - u|_{H^{-1}}^2$$

Daubechies 等人<sup>[3]</sup>用 Besov 空间  $B_{1,1}^1$  代替上述模型中的

有界变差空间刻画图像结构部分, 由于 Besov 空间可以用小波系数来描述, 这就避免了解偏微分方程。其变分问题是

$$\inf_{u,v} F_f(v,u) = \|f - (u+v)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \gamma \|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 2\alpha |u|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \quad (1)$$

式(1)的解可由 Donoho<sup>[4]</sup>引入的小波阈值得到。因此, 最小解  $u, v$  可看作是  $f$  的小波逼近。该模型的优势在于不用解高阶偏微分方程, 而是用小波软阈值得到图像的分解部分。

### 2 基础知识

设  $f$  表示区域  $\Omega \doteq [0,1]^2$  上的一幅图像, 选用  $L_2(\Omega)$  上的紧支撑周期小波分解  $f$ 。假设  $\phi, \tilde{\phi}$  分别为尺度函数及其对偶,  $\psi^i, \tilde{\psi}^i, i = 1, 2, 3$  表示由一维正交小波的张量积构成的小波及其对偶。为简单, 引入下面记号:

$$J \doteq \{ \lambda = (i, j, k) : k \in J_j, j \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3 \},$$

$$J_{j_0} \doteq \{ \lambda = (i, j, k) : k \in J_j, j \geq j_0, i = 1, 2, 3 \}$$

若  $\lambda \in J_j$ , 那么定义  $|\lambda| \doteq j$ 。令  $\phi_{j,k}(x) = 2^j \phi(2^j x - k)$ , 图像  $f$  的小波变换为

$$f = \sum_{\lambda \in J} \langle f, \tilde{\psi}_{\lambda} \rangle \psi_{\lambda} = \sum_k \langle f, \tilde{\phi}_{j_0,k} \rangle \phi_{j_0,k} + \sum_{\lambda \in J_{j_0}} \langle f, \tilde{\psi}_{\lambda} \rangle \psi_{\lambda}$$

将图像  $f$  置于 Besov 空间  $B_q^{\beta}(L_p(\Omega))$  中研究是合适

的<sup>[5,6]</sup>。我们只需要Besov空间范数与小波系数的范数之间(当  $p = q$  时)的等价性, 即

$$|f|_{B_p^\beta(L_p(\Omega))} \sim \left( \sum_{\lambda \in J_{j_0}} 2^{|\lambda|sp} \left| \langle f, \tilde{\psi}_\lambda \rangle \right|^p \right)^{1/p}, \quad s = \beta + 1 - 2/p$$

### 3 图像分解的变分问题的近似解

考虑变分问题:

$$\|f - g\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2t \|g\|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \quad (2)$$

该变分问题在小波域中的形式为  $\sum_{\lambda \in J} \left\{ |f_\lambda - g_\lambda|^2 + 2t |g_\lambda| \right\}$ 。其中,

$f_\lambda, g_\lambda$  表示第  $\lambda$  个小波系数。因为该变分问题是可分的, 因此泛函的最小值可通过单独求出每一项的最小值而得到, 即

$$|f_\lambda - g_\lambda|^2 + 2t |g_\lambda| \quad (3)$$

根据文献[6]可知, 式(3)的精确最小值是  $(g_i^*)_\lambda = S_t(f_\lambda)$ , 即

$$g_i^* = \sum_{\lambda \in J} S_t(f_\lambda) \psi_\lambda \quad (4)$$

其中  $S_t$  是阈值参数为  $t$  的小波软阈值函数。

在处理实图像时, 为使得小波逼近在保留与丢掉的小波系数之间产生更光滑的过度, 所用的滤波器对参数  $t$  就要有更高的正则性。为此, 杨维等<sup>[7]</sup>提出了分段  $n$  次多项式阈值和  $n$  次指数阈值, 分别表示为

$$S_t^n(x) = \begin{cases} 1 - t^n/x|x|^n, & |x| > t \\ 0, & |x| \leq t \end{cases} \quad (5)$$

$$G_t^n(x) = a^{-ht^n/|x|^n} x, \quad a > 1, \quad h > 0 \quad (6)$$

其中  $n$  为任意正数。文中称这两类阈值为修正小波阈值。

下面证明修正小波阈值是泛函式(1)的近似最小值。首先给出近似最小值的定义及两个引理。

**定义 1**<sup>[8]</sup> 对给定的  $t > 0$ , 如果存在一个不依赖  $t$  或  $f$  的正常数  $C$  使得

$$\|f - \tilde{g}_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2t \|\tilde{g}_t\|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \leq C \min_{g \in B_1^1(L_1(\Omega))} \left( \|f - g\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2t \|g\|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \right), \quad \text{即}$$

$$\|f - \tilde{g}_t\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2t \|\tilde{g}_t\|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \leq C \left( \|f - g_i^*\|_{L_2(\Omega)}^2 + 2t \|g_i^*\|_{B_1^1(L_1(\Omega))} \right)$$

其中  $g_i^*$  由式(4)给出, 那么称函数族  $\tilde{g}_t$  为式(2)的近似最小值。

**引理 1**<sup>[7]</sup> 设  $S_t^n$  是式(5)定义的分段  $n$  次多项式滤波器,  $f$  表示一幅图像,  $t$  是正参数。那么函数  $(g_t)_\lambda = S_t^n(f_\lambda)$  是变分问题式(3)的近似最小值, 且常数  $C = 4$ 。

**引理 2**<sup>[7]</sup> 设  $G_t^n$  为式(6)定义的指数滤波器,  $f$  表示一幅图像,  $t$  是正参数。那么函数  $(g_t)_\lambda = G_t^n(f_\lambda)$  是变分问题式(3)的近似最小值, 且常数  $C = 4$ 。

考虑变分问题式(1), 给定正参数  $(\gamma, \alpha)$ , 求解  $\tilde{v}_{\gamma, \alpha} \in H^{-1}(\Omega)$  和  $\tilde{u}_{\gamma, \alpha} \in B_1^1(L_1(\Omega))$  最小化以下泛函:

$$\inf_{u, v} F_f(v, u) = \|f - (u + v)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \gamma \|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + 2\alpha |u|_{B_1^1(L_1(\Omega))}$$

根据范数与小波系数之间的等价性关系, 得到等价性序列泛函:

$$S_f(v, u) = \sum_{\lambda \in J} \left( |f_\lambda - (u_\lambda + v_\lambda)|^2 + \gamma 2^{-2|\lambda|} |v_\lambda|^2 + 2\alpha |u_\lambda| 1_{\{\lambda \in J_{j_0}\}} \right) \quad (7)$$

变分泛函式(7)的最小化可以通过分别对每一项求最小来得到。设  $[\cdot]_\lambda$  表示式(7)中的第  $\lambda$  个加项, 那么式(7)关于  $v_\lambda$  的导数为  $D_{v_\lambda} [S_f(v, u)]_\lambda = -2(f_\lambda - u_\lambda) + 2(1 + \gamma 2^{-2|\lambda|}) v_\lambda$ 。因此, 最小值  $\tilde{v}_{\gamma, \alpha}$  的第  $\lambda$  个小波系数需满足

$$(\tilde{v}_{\gamma, \alpha})_\lambda = (f_\lambda - u_\lambda)(1 + \gamma 2^{-2|\lambda|})^{-1} \quad (8)$$

用式(8)代替  $[S_f(v, u)]_\lambda$  中的  $v_\lambda$ , 就有

$$[S_f(\tilde{v}_{\gamma, \alpha}, u)]_\lambda = \mu_{1, \lambda} (f_\lambda - u_\lambda)^2 + 2\mu_{2, \lambda} |u_\lambda| \quad (9)$$

其中  $\mu_{1, \lambda} = \gamma 2^{-2|\lambda|} (1 + \gamma 2^{-2|\lambda|})^{-1}$  和  $\mu_{2, \lambda} = \alpha \cdot 1_{\{\lambda \in J_{j_0}\}}$ 。设  $t = \mu_{2, \lambda} / \mu_{1, \lambda}$ , 泛函式(9)的最小化解实际上就是泛函  $\min_\lambda \{ (f_\lambda - u_\lambda)^2 + 2t |u_\lambda| \}$  的解。分别根据引理 1 和引理 2, 该泛函的近似最小解为  $(\tilde{u}_{\gamma, \alpha})_\lambda = S_t^n(f_\lambda)$ ,  $(\tilde{u}_{\gamma, \alpha})_\lambda = G_t^n(f_\lambda)$ 。用  $(\tilde{u}_{\gamma, \alpha})_\lambda$  代替式(8)中的  $u_\lambda$ , 得到相应的  $(\tilde{v}_{\gamma, \alpha})_\lambda = (f_\lambda - (\tilde{u}_{\gamma, \alpha})_\lambda)(1 + \gamma 2^{-2|\lambda|})^{-1}$ 。

综上所述, 图像分解与修正小波阈值之间的关系可以用下面两个定理加以说明。

**定理 1** 任给一个函数  $f$ , 带参数的函数  $\tilde{v}_{\gamma, \alpha}$  和  $\tilde{u}_{\gamma, \alpha}$  是泛函式(1)的近似最小解, 由下列公式给出:

$$\tilde{v}_{\gamma, \alpha} = \sum_{\lambda \in J_{j_0}} (1 + \gamma 2^{-2|\lambda|})^{-1} \left[ f_\lambda - S_{\alpha(2^{2|\lambda|} + \gamma)/\gamma}^n(f_\gamma) \right] \psi_\lambda,$$

$$\tilde{u}_{\gamma, \alpha} = \sum_{k \in I_{j_0}} \langle f, \phi_{j_0, k} \rangle \phi_{j_0, k} + \sum_{\lambda \in J_{j_0}} S_{\alpha(2^{2|\lambda|} + \gamma)/\gamma}^n(f_\gamma) \psi_\lambda$$

**定理 2** 任给一个函数  $f$ , 带参数的函数  $\tilde{v}_{\gamma, \alpha}$  和  $\tilde{u}_{\gamma, \alpha}$  是泛函式(1)的近似最小解, 由下列公式给出:

$$\tilde{v}_{\gamma, \alpha} = \sum_{\lambda \in J_{j_0}} (1 + \gamma 2^{-2|\lambda|})^{-1} \left[ f_\lambda - G_{\alpha(2^{2|\lambda|} + \gamma)/\gamma}^n(f_\gamma) \right] \psi_\lambda,$$

$$\tilde{u}_{\gamma, \alpha} = \sum_{k \in I_{j_0}} \langle f, \phi_{j_0, k} \rangle \phi_{j_0, k} + \sum_{\lambda \in J_{j_0}} G_{\alpha(2^{2|\lambda|} + \gamma)/\gamma}^n(f_\gamma) \psi_\lambda$$

## 4 实验仿真

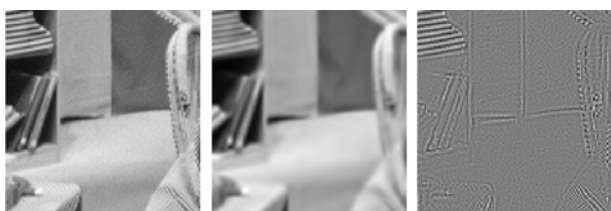
本节给出了用小波求解图像分解的变分泛函的近似最小解的仿真试验。由于非冗余小波滤波总是在不连续处产生伪吉布斯现象, 所以文中用的是平移不变小波滤波。对一幅  $128 \times 128$  的图像(图 1(a))进行分解, 取参数  $\alpha$  和  $\gamma$  分别为 0.5 和 0.002。用  $n=2$  的指数阈值 ( $a=2, h=4$ ) 进行图像分解, 实验结果见图 1。为了定量的分析修正小波阈值的优越性, 本文对软阈值滤波器和  $n$  次多项式阈值滤波器的分解图像性能进行比较, 取  $n$  为 1.5, 2, 2.5, 3 和 4。实验结果见表 1。对软阈值滤波器与指数滤波器的分解图像性能进行比较。取  $n$  为 1, 1.5, 2, 2.5 和 3, 仿真结果如图 1 和表 2 所示。实验表明, 多项式滤波器和指数滤波器在信噪比(SNR)和视觉效果上都优于软阈值滤波器。

表1 软阈值、 $n$ 次多项式阈值滤波器进行图像分解的结果比较

加噪图像	软阈值	$n=1.5$	$n=2$	$n=2.5$	$n=3$	$n=4$
$SNR(f, u+v)$	28.5185	31.3865	33.2686	34.4378	35.1635	36.0195
$SNR(f, u)$	17.0477	17.8619	18.4352	18.8748	19.2309	19.7826

表2 软阈值、指数阈值滤波器进行图像分解的结果比较

加噪图像	软阈值	$n=1$	$n=1.5$	$n=2$	$n=2.5$	$n=3$
$SNR(f, u+v)$	28.5185	24.3840	27.1394	28.6240	28.1528	27.3607
$SNR(f, u)$	17.0477	15.9714	16.7785	17.3198	17.7086	18.0189



(a) 图像 (b) 图像分解的结构部分 (c) 图像分解的纹理部分

图1 图像经 $n=2$ 的指数阈值滤波的图像分解

## 5 结束语

Daubechies和Teschke首先提出了图像的变分分解和小波软阈值之间的联系。他们引入一类特殊变分泛函, 把图像分解成结构和纹理两部分, 其中结构部分是由小波软阈值滤波得到的。小波软阈值会对图像边缘造成过度光滑, 使重构图像在边缘附近产生吉布斯震荡现象, 为克服该问题, 本文用具有更高正则性的分段 $n$ 次多项式阈值和指数阈值做图像分解, 得到图像分解的变分泛函的近似最小值, 其中 $n$ 取任意正数, 随着 $n$ 的增大, 图像分解的变分问题的近似最小值越逼近精确最小值。而且我们得到了图像的变分分解和修正小波阈值之间的联系。实验结果表明了用修正小波阈值分解图像的有效性。

## 参考文献

- [1] Rudin L, Osher S, and Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, 1992, 60: 259–268.
- [2] Osher S, Sole A, and Vese L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm. *Multiscale Methods and Simulation*, 2003, 1(3): 349–370.
- [3] Daubechies I and Teschke G. Wavelet based image decomposition by variational functionals. Proceedings of SPIE, Wavelet Applications in Industrial Processing. Editor(s): Frederic Truchetet, 2004, Vol. 5266: 94–105.
- [4] Donoho D L and Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425–455.
- [5] DeVore R A. Nonlinear approximation. Acta Numerica, Cambridge University Press, 1998: 51–150.
- [6] Chambolle A, DeVore R A, and Lee N. Nonlinear wavelet image processing: variational problem, compression and noise removal through wavelet shrinkage. *IEEE Trans. on Image Process*, 1998, 7(3): 319–335.
- [7] 杨维, 明宗峰, 宋国乡等. 一族分段 $n$ 次小波阈值参数滤波器函数. 华南理工大学学报(自然科学版), 2005, 33(8): 54–57.
- [8] Silvia B and Serena P. Filtered wavelet thresholding methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, 164(1): 39–52.

姜东焕: 女, 1981年生, 博士生, 研究方向为小波理论及偏微分方程在图像处理中的应用.

宋国乡: 女, 1938年生, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为小波理论、数值分析.