

## 类傅里叶变换的多分量信号分离重构

毕 岗 曾 宇

(浙江大学信息与电子工程学系 杭州 310027)

**摘 要:** 针对多分量信号重构的问题, 该文提出了一种新颖的类傅里叶变换方法, 并对其基本性质进行了分析。采用该方法将频域上混叠但在时频二维频谱图上不重叠的多分量信号变换到类傅里叶变换域, 使之在频谱上不产生混叠, 从而达到信号分离重构的目的。与分数傅里叶域最优滤波的方法进行的对比分析说明, 类傅里叶变换方法的适用范围更宽。文中对非线性的多分量调幅信号进行了仿真计算, 得到了满意的结果。表明该方法在信号检测和分析方面具有应用价值。

**关键词:** 多分量信号; 类傅里叶变换; 重构

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2007)06-1399-04

## Reconstruction of Multi-component Signals Based on the Analogous Fourier Transform

Bi Gang Zeng Yu

(Department of Information and Electronics Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

**Abstract:** A novel method of analogous Fourier transform is proposed for reconstruction of multi-component signals, and the behaviors of this method are investigated. This method transforms multi-component signals, which are aliasing in frequency domain but not overlapping in time-frequency spectrogram, into analogous Fourier frequency domain where no aliasing appears. Compared with the method of optimal filtering in fractional Fourier domain, this method has better applicability. Simulation results show that this method can produce reliable reconstruction signals. This method has a variety of applications in the aspect of signal detection and analysis.

**Key words:** Multi-component signals; Analogous Fourier transform; Reconstruction

### 1 引言

线性和非线性调频信号被广泛地应用于声振分析、雷达和通信等领域中。在对这类系统的研究中, 多分量调频信号的检测、参数估计及分离重构一直是一个重要课题。调频信号的研究方法很多, 其中短时傅里叶变换(STFT)<sup>[1, 2]</sup>是最常用的方法之一, 具有简单直观的优点, 但是该方法易受到窗效应的影响, 在时频域上分辨率不高, 对信号参数的估计不够精确。Wigner-Ville分布(WVD)<sup>[2-4]</sup>具有信号能量集中的优点, 对参数的估计比STFT精确, 但是其易受到中间项的干扰, 在处理多分量信号时有一定难度。改进WVD的核可以抑制中间项<sup>[5-7]</sup>, 但是这种方法计算量太大, 不利于实时应用。近来有学者提出利用WVD和分数维傅里叶变换的关系对线性调频信号进行参数估计的方法<sup>[8, 9]</sup>, 这个方法计算量小, 结果精确, 并且对背景噪声具有一定的抑制作用, 缺点是只适用于线性调频信号的检测及参数估计, 难以对非线性调频信号进行有效的检测。另一方面, 仅仅检测并估计出各信号分量的频率调制信息是不够的, 为了得到其幅度调制信息, 有必要对多分量信号进行分离重构。对此可采用分数傅里叶域最优滤波的方法<sup>[10]</sup>, 该方法通过求解使均方误差(MSE)最小的最优化方程, 找到使信号分量没有重叠或只有

少许重叠的分数傅里叶域, 在此分数域上滤波即可得到重构的信号。此方法的缺点是即使在最优化的分数傅里叶域中也不能保证信号分量是没有重叠的, 一旦信号分量之间相互重叠, 得到的重构信号就会失真。针对线性与非线性调频信号检测和分析存在的问题, 本文从频谱图出发, 提出一个类傅里叶变换方法, 并进行了大量实例分析, 给出了类傅里叶变换的定义和性质。该方法的基本思想是把原来频域上混叠的信号变换成不混叠的信号, 达到信号分离重构的目的。分析表明该方法简单, 适用性较强, 对于时频域上不重叠的信号, 信号重构和分离误差很小。

### 2 类傅里叶变换定义及其性质

短时傅里叶变换是研究非平稳信号最广泛使用的方法之一, 其形式如下:

$$S(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

通过对信号  $s(t)$  加窗  $h(t)$  来分析某个特定时刻所包含的频率分量, 选择合适的窗函数, 就可以得到信号  $s(t)$  的频谱图。

考虑一个包含两个非线性调频分量的多分量信号  $s(t)$ , 其频谱图如图 1 所示。可见信号分量  $A$  和  $B$  不论在时域还是在频域都是重叠在一起的, 但虚线  $\omega = \alpha(t)$  把信号分成了上下两个区域。若能构造一个与  $\alpha(t)$  有关的类频率变量  $\tilde{\omega}$  以

及从时域到 $\tilde{\omega}$ 频域的变换 $\tilde{F}_\alpha$ ,使 $\alpha(t)$ 对应于 $\tilde{\omega}$ 频域的 $\tilde{\omega}_s$ ,并且信号分量A在 $\tilde{\omega}$ 频域上分布于 $\tilde{\omega} > \tilde{\omega}_s$ 的范围,信号分量B在 $\tilde{\omega}$ 频域上分布于 $\tilde{\omega} < \tilde{\omega}_s$ 的范围,则能通过理想低通或高通较简便地对信号分量A,B进行分离重构。这里 $\tilde{\omega}$ 是变换 $\tilde{F}_\alpha$ 的频率变量,图2示意了 $s(t)$ 信号经过 $\tilde{F}_\alpha$ 变换后的频谱。

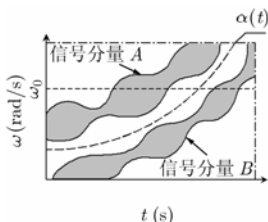
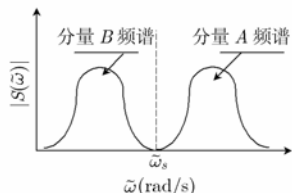


图1 多分量信号频谱图

图2 多分量信号在 $\tilde{\omega}$ 频域上的分布

为此,定义 $\tilde{F}_\alpha$ 的变换为

$$\tilde{F}_\alpha[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)K(t,\tilde{\omega})dt = S(\tilde{\omega}) \quad (2)$$

我们知道,时频域上的曲线 $\alpha(t)$ 表示的是时域信号 $s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(j \int_0^t \alpha(\tau)d\tau)$ 的瞬时频率。要使对信号 $s_0(t)$ 作变换 $\tilde{F}_\alpha$ 后满足在 $\tilde{\omega}$ 频域上仅分布于 $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_s$ 一点,即 $s_0(t)$ 在 $\tilde{\omega}$ 频域上的频谱为 $\delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s)$ ,则式(2)必须满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_0(t)K(t,\tilde{\omega})dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} K(t,\tilde{\omega})dt = \delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s) \quad (3)$$

分析式(3)可知,当 $K(t,\tilde{\omega}) = \alpha(t) \exp[-j(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s + 1) \int_0^t \alpha(\tau)d\tau]$ 时等式成立。由此定义类傅里叶正变换为

$$\tilde{F}_\alpha[s(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\alpha(t)e^{-j(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s + 1) \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} dt = S(\tilde{\omega}) \quad (4)$$

其中 $K(t,\tilde{\omega})$ 为类傅里叶正变换的核。

同理,若函数 $K^{-1}(t,\tilde{\omega})$ 满足如下形式:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s)K^{-1}(t,\tilde{\omega})d\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi} e^{j \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} \quad (5)$$

则 $K^{-1}(t,\tilde{\omega})$ 为类傅里叶反变换的核。可以推出,当 $K^{-1}(t,\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} e^{-j(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s + 1) \int_0^t \alpha(\tau)d\tau}$ 时,式(5)成立。于是定义类傅里叶反变换为

$$\tilde{F}_\alpha^{-1}[S(\tilde{\omega})] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\tilde{\omega})e^{j(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s + 1) \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} d\tilde{\omega} = s(t) \quad (6)$$

这里 $\alpha(t)$ 是时频域上任意一条曲线,因此上面推导的类傅里叶变换具有普遍性。与傅里叶变换相同,类傅里叶变换也是从时域到频域的变换,其频率变量 $\tilde{\omega}$ 不同于普通的频率变量 $\omega$ 。为了计算方便,取归一化的临界频率 $\tilde{\omega}_s = 1$ ,重写类傅里叶变换为

$$\left. \begin{aligned} S(\tilde{\omega}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\alpha(t)e^{-j\tilde{\omega} \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} dt \\ s(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\tilde{\omega})e^{j\tilde{\omega} \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} d\tilde{\omega} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

分析类傅里叶变换,具有以下几个性质:

(1) 当 $\alpha(t) = 1$ 时,类傅里叶变换对就是通常的傅里叶变换对。

(2) 根据类傅里叶变换:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'_s) e^{j\tilde{\omega}'_s \int_0^t \alpha(\tau)d\tau} d\tilde{\omega} = \frac{1}{2\pi} e^{j\tilde{\omega}'_s \int_0^t \alpha(\tau)d\tau}, \quad \tilde{\omega}'_s \neq \tilde{\omega}_s = 1 \quad (8)$$

其中 $\frac{1}{2\pi} e^{j\tilde{\omega}'_s \int_0^t \alpha(\tau)d\tau}$  ( $\tilde{\omega}'_s > 1$ )表示时频域上曲线 $\alpha(t)$ 上部的信号。由式(8)可以看出,通过类傅里叶变换,时频域上曲线 $\alpha(t)$ 上部的信号分量对应于类频域上 $\tilde{\omega} > 1$ 的频率范围。同理,时频域上曲线 $\alpha(t)$ 下部的信号分量对应于类频域上 $\tilde{\omega} < 1$ 的频率范围。在时频域上分布为曲线 $\alpha(t)$ 的信号 $s_0(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(j \int_0^t \alpha(\tau)d\tau)$ 变换成 $\tilde{\omega}$ 频域上的冲激信号 $\delta(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_s)$ 。

(3) 在类频域上截止频率为1的理想低通(高通)滤波器,等效于时频域上的时变低通(高通)滤波器,这个时变低通(高通)的截止频率随时间变化的形式为 $\omega_s(t) = \alpha(t)$ 。

(4) 对信号作类傅里叶变换的过程是根据曲线 $\alpha(t)$ 将时频域扭曲的过程。将 $\omega = \alpha(t)$ 代入式(1)中可求得信号的类短时傅里叶变换:

$$S(t,\omega') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau-t)e^{-j\alpha(t)\tau} d\tau \quad (9)$$

此时频分布如图3所示。从图上可见,信号分量A和B在频域上分离了,频域上任意一点 $\omega'_0$ 都只包含一个信号分量的频谱,而在变换之前频域上任意一点(如图1中 $\omega_0$ 所示)都包含两个信号分量的频谱。

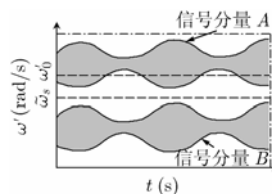


图3 多分量信号的类短时傅里叶变换频谱图

### 3 实例分析

多分量时变窄带解析信号的一般形式可以写成为

$$s(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) = \sum_{i=1}^N A_i(t) \exp(j\varphi_i(t)) \quad (10)$$

其中 $A_i(t)$ 是幅度调制系数, $\omega_i(t) = d\varphi_i(t)/dt$ 是瞬时频率。为了说明问题,取由两个非线性调频分量 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ 组成的多分量信号 $s(t)$ :

$$\begin{aligned} s(t) = s_1(t) + s_2(t) &= e^{1.5 - \sin(2.5t)} \cos\left(\frac{5}{9}t^3 - \frac{5}{6}t^2 + 20t\right) \\ &+ 10 \cos(t) \cos\left(\frac{1}{24}t^4 + 8t\right) \end{aligned} \quad (11)$$

取窗函数为高斯函数 $h(t) = \sqrt{5/\pi} e^{-\frac{5}{2}t^2}$ ,利用式(1)所示短时傅里叶变换的公式,可以得到如图4所示频谱图。由于这两个信号的瞬时频率(IF)不同, $s_1(t)$ 的IF为 $\omega(t) = (5t^2$

$/3) - (5t/3) + 20$ ,  $s_2(t)$  的 IF 为  $\omega(t) = (t^3/6) + 8$ , 而在频谱图上信号是沿着瞬时频率曲线分布的, 因此在时频域上这两个信号是相互独立的。对于在时频域上相互独立的两个信号分量, 可以构造时变滤波器将其提取出来。这个时变低通滤波器的截止频率在时频域上表现为任意一条可以将两个信号分量分离开来的曲线, 比如:  $\alpha(t) = (8t^2/5) - (7t, /3) + 14$  如图 4 中实线所示。

根据上述理论, 将时域信号变换到  $\tilde{\omega}$  频域上并进行滤波。对信号  $s(t)$  作关于曲线  $\alpha(t)$  的类傅里叶变换, 可得如图 5 所示的信号  $s(t)$  在  $\tilde{\omega}$  频域上的分布  $S(\tilde{\omega})$ 。

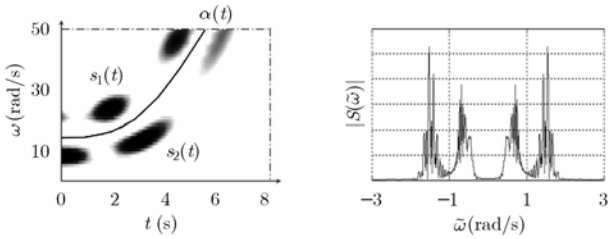


图 4 信号  $s(t)$  的频谱图

图 5 信号  $s(t)$  在  $\tilde{\omega}$  频域上的分布

对信号  $s(t)$  作低通滤波可得

$$S_L(\tilde{\omega}) = \begin{cases} S(\tilde{\omega}), & |\tilde{\omega}| \leq 1 \\ 0, & |\tilde{\omega}| > 1 \end{cases} \quad (12)$$

再对  $S_L(\tilde{\omega})$  作类傅里叶反变换可得重构信号  $s'_2(t)$ 。同样对信号  $s(t)$  作高通滤波可得重构信号  $s'_1(t)$ 。图 6 给出了  $S_L(\tilde{\omega})$  和  $S_H(\tilde{\omega})$  的频谱。

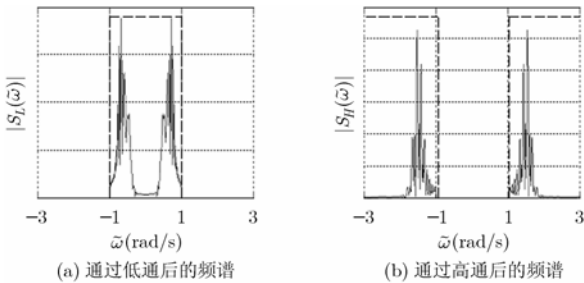


图 6 信号在  $\tilde{\omega}$  频域上通过低通和高通后的频谱

图 7 给出了对多分量信号  $s(t)$  进行分离重构的计算结果。图 7(a), 7(b) 和 7(c) 分别是处理之前的多分量信号  $s(t)$  及两个分量信号  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$ 。图 7(d) 和 7(e) 给出了对  $s(t)$  进行分离重构后得到的两个重构信号  $s'_1(t)$  和  $s'_2(t)$ , 从图上可见重构信号与原信号分量基本一致。

图 7(f) 给出了用分数傅里叶域最优滤波对  $s(t)$  进行分离重构的计算结果, 发现重构信号与原信号(图 7(c))有很大误差。究其原因分析如下:

如果在时域和频域都明显重叠的信号在最优分数傅里叶域中没有重叠, 那么采用分数傅里叶域最优滤波能对多分量信号进行分离重构(如图 8(a)所示), 信号分量 A 和 B 在  $\alpha$ -分数域<sup>[10]</sup>是不重叠的, 在  $\alpha$ -分数域上带通滤波即可将两个信号分量分离重构。但是对于类似本例所述信号, 采用如图 8(b)中虚线所示带通滤波, 将不可避免地信号分量 B 中混

入 A 分量的部分内容(如图 8(b)中 A1, A2 所示), 且信号分量 B 的低频成分将会有部分丢失(如图 8(b)中 B1 所示)。如此滤波的结果就造成重构信号畸变。

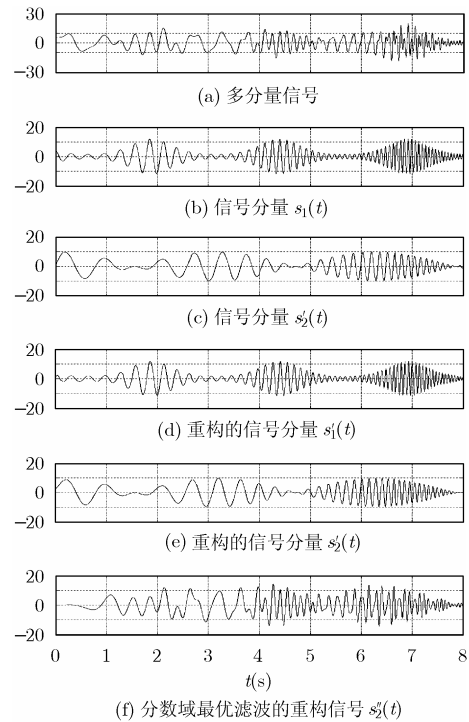


图 7 原信号与重构信号对比

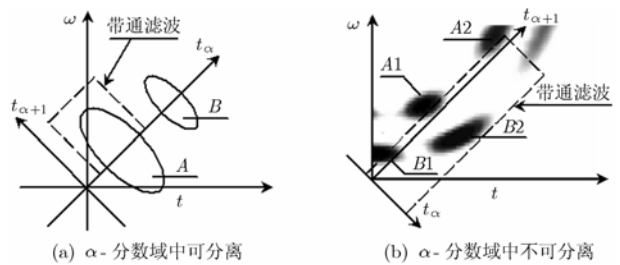


图 8  $\alpha$ -分数域中的信号分离重构

图 9 给出了多分量信号  $s(t)$  的类短时傅里叶变换频谱图。从图上可见, 时频域上原来分布在曲线  $\alpha(t)$  两侧的信号分量在类短时傅里叶变换频谱图上分布在直线  $\omega' = 1$  的两侧。即通过类傅里叶变换的方法可以将原来在频域重叠的信号变换到  $\tilde{\omega}$  频域, 在  $\tilde{\omega}$  频域上两个信号分量的频谱没有重叠, 通过理想低通或高通就能将两个信号分量分离并且重构。

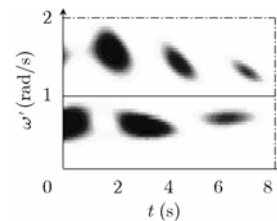


图 9 信号  $s(t)$  的类短时傅里叶变换频谱图

#### 4 结束语

本文从频谱图出发, 提出一个类傅里叶变换的方法, 通过在类频域上对信号进行滤波, 实现了非线性的多分量调幅调频信号的分离重构。文中介绍了类傅里叶变换的原理, 归纳了其基本性质, 并采用该方法进行仿真计算。与分数傅里叶域最优滤波的方法进行的对比分析说明, 类傅里叶变换方法的适用范围更宽。只要在时频域上信号分量可用曲线 $\alpha(t)$ 分开, 即使在最优分数傅里叶域上有信号分量重叠, 类傅里叶变换方法也能进行处理, 具有重构信号失真小的优点, 且物理概念清晰, 计算简便。

#### 参 考 文 献

- [1] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社, 1998: 153–178.
  - [2] Cohen L, *et al.* Time-Frequency Analysis: Theory and Applications. New Jersey: Prentice Hall, 1995: 77–111.
  - [3] Özdemir A K and Arikan O, *et al.* Fast computation of the ambiguity function and the Wigner distribution on arbitrary line segments. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2001, 49(2): 381–393.
  - [4] Wang Pu, Yang Jianyu, and Du Yuming, *et al.* A fast algorithm for parameter estimation of multi-component LFM signal at low SNR. 2005 International Conference on Communications, Circuits and Systems, Hong Kong, 2005, 2: 765–768.
  - [5] Nickel R M, Sang T H, and Williams W J, *et al.* A new signal adaptive approach to positive time-frequency distributions with suppressed interference terms. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Seattle, 1998, 3: 1777–1780.
  - [6] Özdemir A K and Arikan O, *et al.* A high resolution time frequency representation with significantly reduced cross-terms. Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Istanbul, 2000, 2: 11693–11696.
  - [7] Khandan F and Ayatollahi A, *et al.* Performance region of center affine filter for eliminating of interference terms of discrete Wigner distribution. Proceedings of the 3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis, Rome, 2003, 2: 621–625.
  - [8] 冉鑫, 马世伟, 曹家麟. 基于 Radon-Wigner 变换的多分量 LFM 信号的检测, 上海大学学报, 2001, 7(2): 119–122.
  - [9] 于凤芹, 曹家麟. 基于分数阶傅里叶变换的多分量 Chirp 信号的检测与参数估计, 电声技术, 2004, 1: 53–59.
  - [10] 冉启文, 谭立英. 分数傅里叶光学导论. 北京: 科学出版社, 2004: 257–281.
- 毕 岗: 男, 1966 年生, 博士, 副教授, 主要从事光电信息处理和光电器件研究.
- 曾 宇: 男, 1980 年生, 硕士, 从事光电信息处理研究.