

# 一种引入退火降温阈值函数约束的改进 MP 稀疏分解方法

徐鹏 尧德中

(电子科技大学生命科学与技术学院 成都 610054)

**摘要:** 匹配追踪(Matching pursuit, MP)方法可以在过完备库中实现信号的稀疏、能量集中的分解。该文从对信号分解稀疏性的有利原则出发,在迭代过程中,将过完备库划分为新(未选择过的)、旧(已选择过的)原子库,通过引入退火降温阈值函数来约束迭代过程中最优原子的选择,使选择的最优原子比原始 MP 方法有更大的可能性落入对信号稀疏性有利的旧原子库中,从而实现对信号更加稀疏的分解。对余弦调制指数信号和一段语音信号的分解结果,证实了改进 MP 方法对信号有更加稀疏的分解结果。

**关键词:** 信号处理; 稀疏性; 匹配追踪; 退火函数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)07-1645-04

## A modified MP Algorithm Constrained by the Simulate Annealing Threshold for Sparse Decomposition of Signals

Xu Peng Yao De-zhong

(School of Life Science and Technology, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

**Abstract:** Signal can be decomposed sparsely and power-focally in an over-complete dictionary with Matching Pursuit (MP). This paper proposes a modified MP method to decompose signal more sparsely. In the iteration procedure of the modified MP, the over-complete dictionary is classified into two separate dictionaries with the selected and unselected atoms, the algorithm is designed to have more chances than the original MP to choose the atom in the selected atom dictionary as the optimal atom by a simulate annealing threshold function, thus the algorithm availed for a more sparse decomposition. The decomposition results for a cosine-modulated exponential signal and an actual speech signal show that the proposed modified MP can decompose signal more sparsely.

**Key words:** Signal processing; Sparsity; Matching Pursuit (MP); Annealing function

### 1 引言

追求信号的简洁有效表达是信号处理中的一个热点研究内容。信号具有越简洁的表达,就意味着信号可以获得越高的压缩率<sup>[1,2]</sup>。稀疏成分分析(Sparse Component Analysis, SCA)是最近几年发展起来的实现信号简洁表达的一种有效信号分解方法<sup>[3-7]</sup>。其主要的思想是:如果一个信号在时域或某种变换域中只具有少数的非零系数分量,也就是信号的能量比较集中于少数的几个分量上,则通过这些少数的非零分量就可将该信号简洁地表达出来。信号的稀疏性通常可以用  $l_p(p \leq 1)$  模或信号分量(分解系数)按绝对值排序后向零值衰减的速度来度量<sup>[6,7]</sup>。当前的SCA变换通常是建立在对过完备库的学习上来实现信号分解的,这是因为信号在过完备库上的分解不是唯一的,且当过完备库足够大时,信号在过完备库中一定具有稀疏表达形式<sup>[1,5-7]</sup>。过完备库的构造根据实际问题或研究目的有不同的构造方法,在本文中采用的是用 Symmlet小波构造的过完备库<sup>[7]</sup>。实现SCA分解的方法很多,

其中比较常用的是由 Mallat 和 Zhang 提出的匹配追踪(Matching Pursuit, MP)方法。MP方法通过迭代将信号在过完备库上进行逐次分解,用来表示信号成分的基(原子)可以自适应地根据信号本身的特点在迭代中灵活选取,分解后,就可以得到信号在过完备库上的一个非常简洁稀疏的表达<sup>[3]</sup>。

在本文中,直接从对信号分解稀疏性的有利原则出发,把原子过完备库分为新旧原子库,引入退火降温控制函数,在迭代的过程中迫使算法尽可能选择对稀疏性有利的旧原子库中的原子作为最佳原子,从而让算法的分解具有更加稀疏、能量集中的效果。与小波、原始 MP 方法的分解对比试验结果证实了改进方法能获得更加稀疏的信号分解结果。

### 2 方法原理

#### 2.1 信号的稀疏性

对一个信号  $X$ , 如果它的表达式中只具有很少的不为零的元素, 则可以说该信号是稀疏的。其通常可以用如下的  $l_p(p \leq 1)$  模来作为度量:

$$\|X\|_p = \left( \sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} \quad (1)$$

2005-10-24 收到, 2006-06-19 改回

教育部科学技术研究重点项目(02065), 高等学校博士学科点专项科研基金, 教育部青年教师奖励计划资助课题

可见如果一个信号有稀疏表达, 则其  $l_p(p \leq 1)$  模达到一个比较小的值。同时稀疏性还可以用一种直观的方式来衡量: 设  $X$  和  $Y$  两个系列, 将他们各自的分量按绝对值进行从大到小的顺序排列后, 可以认为向零值衰减快的系列比另外的一个系列具有更稀疏的表达形式。如图 1 所示,  $X$  系列比  $Y$  系列要更加稀疏<sup>[6-7]</sup>。

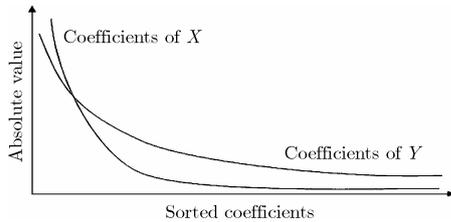


图 1  $X$  系列具有比  $Y$  系列更稀疏的表达

## 2.2 小波过完备库的构造

信号处理中, 通常采用的小波变换是在小波的正交变换域上进行的, 与和小波正交基的构造过程相对应, 通过在小波基函数的尺度  $s$  和偏移  $b$  进行“稠密”的过采样可以生成稀疏分解所需要的小波过完备库。在此条件下生成的过完备库中的列(对应于正交变换中的基)之间是不一定满足正交性质的, 在稀疏变换中通常称为原子, 一般说, 越大的过完备库越对信号的稀疏分解有利, 但分解时间相应的要增加很多<sup>[5-7]</sup>。在本文中, 综合考虑了分解的效果和速度, 采用 Symmlet 小波生成原子个数 6 倍于分解信号长度的过完备库, 并且对每个原子都进行能量归一化处理。

## 2.3 MP 分解

利用 MP 方法, 可以通过逐步的迭代将信号在过完备库中进行稀疏分解, 其每迭代一次, 就抽取出过完备库中的一个最优“原子”, 通过多次迭代, 在满足收敛条件时, 就可以获得信号的稀疏分解结果。其迭代原理可以叙述如下:

(1) 开始时,  $S^{(0)} = 0, R^{(0)} = S$ ,  $S$  为待分解信号,  $R$  为迭代中的残差信号, 设定迭代终止误差  $\varepsilon$  为一很小的正数,  $k=1$ , 将原子对应的所有系数累加器以 0 值初始化。

(2) 计算残差  $R^{(k-1)}$  与过完备库中的原子  $\phi_j$  间的内积, 将最大内积所对应的原子找出, 即  $\alpha_k = \max_j \langle R^{(k-1)}, \phi_j \rangle$ , 同时把该系数  $\alpha_k$  累加到最佳原子对应的系数加法器上, 其中  $\langle \cdot \rangle$  表示内积运算。

(3) 将上一步中找出的原子对信号成分的贡献加入到迭代信号  $S^{(k)}$  中, 并把其从残差中剔除, 即

$$S^{(k)} = S^{(k-1)} + \alpha_k \phi_k, R^{(k)} = S - S^{(k)}.$$

(4) 判断迭代终止条件。如果  $\|R^{(k)}\| \leq \varepsilon$ , 则迭代终止; 否则,  $k=k+1$ , 转到(2), 继续迭代。

在算法终止时, 信号可以分解为一些能量集中“原子”的组合, 从而达到对信号的逐次迭代稀疏分解。

## 2.4 基于退火降温阈值函数约束的改进 MP 算法

在过完备库中利用 MP 方法的学习分解策略可以获得信号的稀疏表达形式。从分解的稀疏性目的出发, 在分解过程

中选取到越少的原子越对信号的稀疏性分解有利。分析 MP 的信号分解流程, 可以发现, 在最优原子选择过程中, 选择的最优原子可以分为两类: 一类是已经作为最优原子在前面的迭代中选择过的原子, 另外一类就是在先前的迭代中还没有以最优原子准则选择过的原子。以此对应, 我们把过完备库分为两类: 一类是由已经选择过的原子组成的旧原子库, 另外一类是由还未选择到的原子组成的新原子库。显然在初始时, 所有的原子都属于新原子库。在 MP 的最初迭代中, 选择到的最优原子基本都是新原子, 在搜索一定的次数后, 就可以形成一定规模的旧原子库, 在此后搜索到的原子可能属于新原子库, 也可能属于旧原子库。从信号分解的稀疏性考虑, 选择到新的原子对分解的稀疏性是不利的, 尽可能地在旧原子库中选取原子是稀疏分解所期望的。以此为准则, 对 MP 方法中的原子选取准则采取如下的改动: 将过完备库分为旧原子库  $\Phi^{\text{old}}$  和新原子库  $\Phi^{\text{new}}$ , 残差信号  $R$  在两类原子库中分别求取内积, 分别获得在相应库中的最大内积系数  $c^{\text{old}}$  和  $c^{\text{new}}$ , 并分别找出他们在相应库中的对应原子  $\phi^{\text{old}}$  和  $\phi^{\text{new}}$ 。比较  $c^{\text{old}}$  和  $c^{\text{new}}$ , 如果  $|c^{\text{old}}| \geq |c^{\text{new}}|$ , 则选取  $\phi^{\text{old}}$  作为该次搜索到的最优原子, 更新搜索信息,  $c_{\text{opt}} = c^{\text{old}}$ ,  $\phi_{\text{opt}} = \phi^{\text{old}}$ , 并把系数  $c^{\text{old}}$  累加到该旧原子对应的系数累加器上, 同时剔除该最佳原子对信号的贡献, 更新残差:  $R = R - c_{\text{opt}} \phi_{\text{opt}}$ 。如果  $|c^{\text{old}}| < |c^{\text{new}}|$ , 按如下步骤通过阈值来决定最佳原子的选取:

(1) 分别求取信号在新旧原子库中最大系数对应的残差信号:

$$R^{\text{old}} = R^{k-1} - c^{\text{old}} \phi^{\text{old}}, R^{\text{new}} = R^{k-1} - c^{\text{new}} \phi^{\text{new}}$$

$R^{k-1}$  为前次迭代的残差信号;

(2) 计算新旧原子库中残差信号的相对误差  $r$ :

$$r = \frac{\|R^{\text{old}} - R^{\text{new}}\|}{\|R^{\text{new}}\|}$$

(3) 根据选择阈值  $T$  决定最佳原子:

如果  $r \leq T$ , 则选取旧原子库中的原子  $\phi^{\text{old}}$  为最佳原子, 更新搜索信息  $c_{\text{opt}} = c^{\text{old}}, \phi_{\text{opt}} = \phi^{\text{old}}$ ; 否则, 选择新原子库中的原子  $\phi^{\text{new}}$  作为最佳原子, 更新搜索信息  $c_{\text{opt}} = c^{\text{new}}, \phi_{\text{opt}} = \phi^{\text{new}}$ , 将该原子加入到旧原子库中, 同时从新原子库中移出。最后把选择的最佳系数累加到最佳原子对应的系数累加器上。

(4) 更新残差信号:  $R^k = R^{k-1} - c_{\text{opt}} \phi_{\text{opt}}$ 。

可见改进方法和原始 MP 方法的区别主要在于将过完备库按新旧原子库划分后, 在原子选择时引入一阈值函数  $T$  来进行判断。如果  $T = 0$ , 则本文的方法就变成了原始 MP 方法。为保证算法的收敛性,  $T$  应该是一个随迭代递减的函数, 在本文中, 我们采用模拟退火算法中的退火降温函数<sup>[8]</sup>:

$$T(i) = T_0 \times \alpha^{i/N} \quad (2)$$

$\alpha$  是一个小于 1.0 的正数,  $T_0$  为初始温度, 在本文中为小于 1.0 的正数,  $i$  为当前迭代的次数,  $N$  是一个控制退火速

度的因子。该退火函数随着迭代的增加，逐渐趋近于 0，也就是在迭代的最后阶段，算法对原子选择的干扰能力减弱，且分解的系数较小，该阶段的分解主要对应于信号的细节部分，从而保证算法是收敛的。

### 3 试验结果

#### 3.1 算法性能分析

选取如下的一个余弦信号调制的指数信号作为测试信号，

$$f(x) = 0.985^{|x-128|} \cos(2\pi x / 64) \quad (3)$$

$x$  取值范围为 [1,256]，生成一 256 数据点的信号。采用 Symmlet 小波来生成 6 倍于数据长度 ( $6 \times 256 = 1536$ ) 的过完备库，分别采用小波 Symmlet, MP 和基于退火降温阈值约束的改进 MP 方法对信号进行分解，后面两种方法的终止误差  $\epsilon$  都取为  $1.0E-6$ 。在改进方法中，初始温度  $T_0 = 0.9$ ,  $N=2.5$ , 采用的退火函数为:  $T(i)=0.9 \times 0.935^{(i^{0.4})}$ , 其中  $i$  为迭代次数。下图 2 为 3 种方法分解后的系数按绝对值降序排列结果。从图 2 中可以看出，相比较而言，小波分解的系数下降比较平缓，MP 方法分解的系数有比较明显的下降，改进的 MP 方法具有了最为快速、陡峭的系数下降曲线。

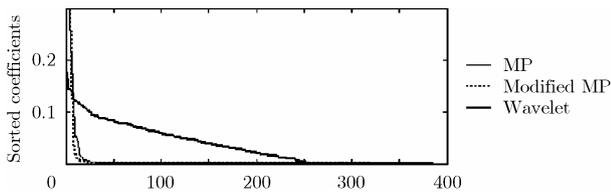


图 2 3 种方法分解后的原子系数按绝对值降序排列结果

为了分析改进方法与原始 MP 方法在迭代过程中原子选择的不同，我们在图 3 中给出它们在迭代过程中每次迭代选择原子对应序号的系列图。

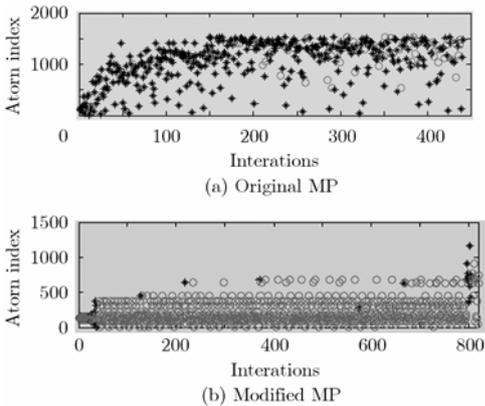


图 3 原始 MP 和改进 MP 方法在迭代过程中对原子的选择情况 (灰色圆圈表示旧原子; 深色星号表示新原子)

选择不同个数的系数(原子), 利用 3 种方法分别对信号进行重建, 并计算了重建信号和原始信号间的相对误差 (Relative Error, RE), 结果表示在图 4 中, 图中纵坐标表示信号的幅度, 横坐标表示采样点序号。在本文讨论的重建中, 是指将分解系数按绝对值降序排列后, 按从大到小的顺序,

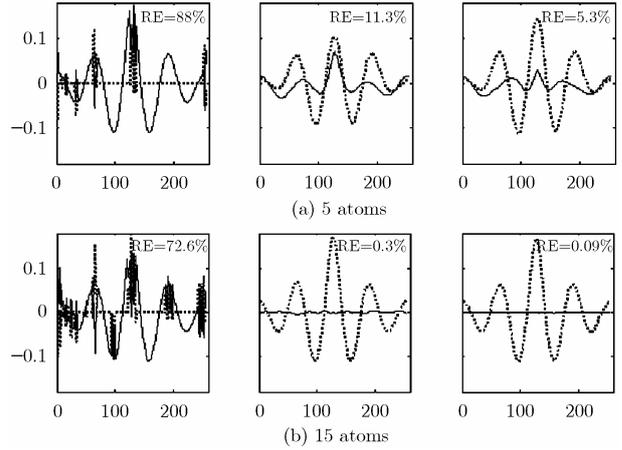


图 4 选用不同个数的原子(系数)对信号的重建结果 (最左边的一列为小波重建结果; 中间一列为 MP 重建结果; 右边一列为改进的 MP 重建结果。细线信号为误差信号, 点线信号为重建信号)

选取一定个数的系数(原子)来恢复信号, 对应于信号压缩中对系数量化前的有效系数的选择过程。

#### 3.2 真实语音信号分解

语音信号是一种常常需要进行高效压缩的信号, 在这里我们对一段 512 数据点的语音信号采用上面的 3 种方法分别进行分解重建测试。采用 Symmlet 小波生成原子个数 6 倍 ( $512 \times 6 = 3072$ ) 于信号的过完备库, 采用同上面一样的退火函数, 利用 3 种方法分解后选取 40 个原子(系数)分别进行重建有图 5 所示的结果, 图中纵坐标表示信号的幅度, 横坐标表示采样点序号。

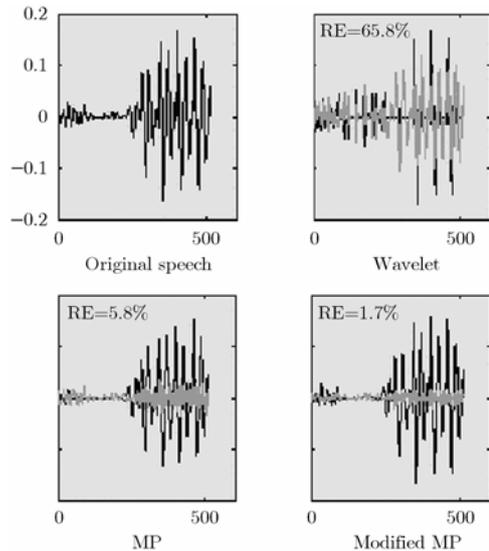


图 5 采用 40 个原子(系数)对语音信号的重建结果。深色是重建信号; 灰色是误差信号

### 4 讨论

根据稀疏性的度量, 从图 2 中, 根据 3 种方法分解的系数按绝对值降序排列后向零值的衰减速度, 可以看出, 在 3 种方法中, 小波分解系数的稀疏性最差, MP 和改进的 MP 方法的稀疏性有了很大提高, 相比较而言, 改进的 MP 方法

的系数分布更加集中、衰减更加明显,有最佳的稀疏分解效果。

比较图 3 所示的原始 MP 和改进 MP 方法迭代过程中的原子选择过程,可以发现:原始 MP 的迭代过程中,特别是在开始的迭代过程中,MP 基本是选择新原子做为最佳原子,且在整个迭代过程中,很多次的迭代都是以新原子作为最优原子,这对信号分解的稀疏性度量来说,这对信号分解的稀疏性不利。而在改进的 MP 方法中,只有在开始和结束的很少几步中,选择到新原子,而在其他的迭代中,基本上选择到旧原子库中的原子做为最佳原子。这和改进算法的原理是相符合的:在刚开始时,虽然选择退火温度阈值很高,但旧原子库很小,而新原子库很大,所以开始的最初几步基本是找到新原子,同时旧原子库也开始增大扩张,新原子库在缩小。当达到一定的迭代步数后,虽然选择退火温度阈值也在降低,但是旧原子库扩张达到了一定的规模,所以在此后大部分的中期迭代中选择的最佳原子大多数落入了旧原子库中。而在接近收敛的迭代时,由于退火温度已经很低,此时进行的迭代中,退火温度对原子选择的影响相对很弱,所以此时有很大机会选择到新原子,但在迭代即将结束时,选择的最佳原子对应系数(对信号的贡献)比较小,对信号的影响程度不大,可以认为最后几步的迭代主要是对信号细节的一些完善,从而能保证算法的收敛性。

从图 4 中可以分析比较出 3 种方法分解后信号的重建效果差别。基于过完备库的稀疏分解,选择 10 个左右的系数(原子)就可以在很小的误差上(MP: 3.9%; 改进MP: 0.5%)重建信号,而采用小波变换系数时,误差在 70%左右。在选择 15 个原子重建时,MP 方法可以达到 0.3%的误差,而本文的改进 MP 方法更能达到基本完全无损失重建效果(误差仅为 0.09%)。所以可以说,在 3 种方法中,改进 MP 方法有最有效的稀疏分解效果,能获得能量最为集中的分解结果,这对信号的高效率压缩是极为有利的<sup>[2]</sup>。在图 5 所示的对语音信号的恢复结果中,改进的 MP 方法在同样的高压压缩比条件下,也显示了较好的信号恢复能力。

上面的试验证实了引入退火降温阈值约束的改进 MP 方法对信号进行稀疏分解的有效性,其性能的改善是通过引入退火降温函数的约束,使在迭代过程中,让算法倾向于选取对信号稀疏性有利的旧原子作为最佳原子。但是,稀疏分解中所需要构造的过完备库是相当巨大的,通常比信号本身的维数大得多(在本文中选为信号维数的 6 倍),从我们采用的 MP 和改进 MP 方法的分解过程可以看出,每次迭代都要在整个过完备库中搜索和残留信号具有最大内积系数的最优原子,其计算量是相当惊人的,这也是制约稀疏分解在实际应用中的主要因素。如何提高其分解的速度是我们今后的研

究目标。同时由于 SCA 变换把能量更加的集中到了少数的几个原子上,所以如果适当地选取这些原子,那么也应该可以有效地去除信号中的噪声<sup>[6,7,9]</sup>;并且在生理和神经科学的研究中表明,视觉系统分级处理和综合的结构中都体现了稀疏性的原则<sup>[10,11]</sup>,所以如果结合这个特性,特别是图像系统经过 SCA 的分解和处理后,应该可以得到符合生理意义的更高效的视觉表达形式。

## 参 考 文 献

- [1] Donoho D L. Sparse components of images and optimal atomic decompositions [R]. 1998. <http://www.stat.stanford.edu/donoho/Reports>.
- [2] 丁绪星,朱日宏,李建欣. JPEG2000 及其新技术 [J]. 计算机应用, 2003, 23(2): 1-4.
- [3] Mallat S and Zhang Z. Matching pursuit with a time-frequency dictionary [J]. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397-3415.
- [4] Bofill P and Zibulevsky M. Underdetermined blind source separation using sparse representations [J]. *Signal Processing*, 2001, 81(11): 2353-2362.
- [5] Adelino R and Silva F D. Atomic decomposition with evolutionary pursuit [J]. *Digital Signal Processing*, 2003, 13(2): 317-337.
- [6] Chen S, Donoho D L, and Saunders M. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. *SIAM J.Sci Comp*, 1999, 20(1): 33-61.
- [7] Huo X M. Sparse Image Representation via Combined Transforms [D]. [PH.D Paper], Stanford University. 1999. <http://www.isye.gatech.edu/xiaoming>.
- [8] Ingber L. Very fast simulated reannealing [J]. *Math Comput Modeling*, 1989, 12(8): 967-973.
- [9] 傅霆,尧德中. 稀疏分解的加权迭代方法及其初步应用 [J]. 电子学报, 2004, 32(4): 567-570.
- [10] Olshausen B A and Field D J. Sparse coding with an overcomplete basis set: A strategy employed by V1 [J]. *Vision Research*, 1997, 37(23): 3311-3325.
- [11] Marr D. Vision: A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information [M]. New York: Freeman, 1982, 87-113.

徐 鹏: 男, 1977 年生, 博士生, 从事生物图像、信号的处理分析研究。

尧德中: 男, 1965 年生, 电子科技大学生命科学与技术学院院长, 教授, 博士生导师, 主要从事神经信息科学及相关方法技术的研究。