第 29 卷第 6 期 电 子 与 信 息 学 报 Vol.29No.6
2007 年 6 月 Journal of Electronics & Information Technology Jun. 2007

多小波子空间采样定理

陈俊丽 卢恩博 曹文佳
(上海大学通信与信息工程学院 上海 200072)

摘 要：该文基于再生核 Hilbert 空间理论，把小波子空间的 Walter 采样定理推广到多小波子空间，建立了多小波子空间的均匀采样定理，利用 Zak 变换给出了由尺度函数构造重构函数的公式。进一步针对采样点不均匀的情况，建立了多小波子空间的不规则采样定理。最后给出数值算例。

关键词：再生核；多小波；多小波子空间；采样定理

中图分类号：TN911.7，O174.2 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2007)06-1389-05

Sampling Theorem for Multiwavelet Subspaces

Chen Jun-li Lu En-bo Cao Wen-jia
(*School of Communication and Info. Eng.*, *Shanghai University*, *Shanghai* 200072, *China*)

Abstract: In this paper, the multiwavelet sampling theorem from Walter's wavelet sampling theorem by reproducing kernel is generalized. The reconstruction function can be expressed by multiwavelet using Zak transform. Then the general case of the irregular sampling is considered and the irregular sampling theorem for multiwavelet subspaces is established. Finally, the corresponding examples are given.

Key words: Reproducing kernel; Multiwavelet; Multiwavelet subspaces; Sampling theorem

1 引言

在信号处理中，一个基本的问题是如何利用离散序列表示信号。Shannon 采样定理指出，对于 $f(t)\in L^2(R)$，当 $\mathrm{supp}\hat{f}\subset[-\pi,\pi]$ 时，$f(t)=\sum_{n\in Z}f(n)\mathrm{sinc}(t-n)$，这里 $\mathrm{sinc}(t)=\dfrac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}$。Shannon 采样定理的物理意义在于带限信号在一定的采样间隔下可以用一系列离散值来唯一确定。由于通信、雷达等电子系统均有一截止频率，因此 Shannon 采样定理对频谱有限的要求是符合实际情况的，得到了广泛的应用。但由于 Shannon 采样定理采用 $\mathrm{sinc}(t)$ 函数为插值函数，衰减速度很慢，而且 Shannon 采样定理不能处理非带限信号，所以研究具有紧支集、衰减快、适合处理非带限信号的采样定理十分必要。

继Shannon采样定理之后，许多数学家研究了Shannon采样定理的各种推广形式，特别值得注意的是Walter在 1991 年从再生核Hilbert空间的观点出发，给出了一个再生核Hilbert空间中推广的采样定理。1992 年Walter考察了小波函数的性质，认识到Shannon插值函数 $\mathrm{sinc}(t)$ 实际上是多分辨空间的尺度函数，将Shannon采样定理推广到小波子空间，建立了基于小波空间的采样定理[1]。但是，就通常的小波子空间采样定理来说，即使尺度函数具有紧支集，插值函数也未必是紧支的，这使得精确D/A难以实现。Xia[2] 研究了具有插值特性的小波子空间的采样定理。但遗憾的是，具有插值特性、正交、紧支撑的尺度函数只有Haar函数，且单小波不能同时满足正交、紧支撑、对称性，这对信号处理是非常不利的，因此限制了单小波的应用范围。多小波的引入扩大了应用范围，与传统单小波相比，多小波可同时拥有正交性、紧支撑、对称性和高的逼近阶等特性。Blu 和Unser[3]利用投影算子，研究了多小波子空间采样定理，它能较好地逼近多分辨空间中的任意信号，但不能实现信号的完全重构。Selesnick[4]构造了一类具有插值特性、紧支撑、正交、平衡和具有一定逼近阶的多小波，使得该类多尺度函数生成的多分辨空间中的任一函数，可由其整数点和半整数点完全重构，但其缺点是，此采样定理仅适用具有插值特性的多小波，对其它类型的多小波不具有适用性，并且所构造的多尺度函数和多小波不具有对称性，这不利于信号处理和图像压缩。文献[5]给出了向量小波子空间上的采样定理存在条件，但没有指出重构函数与尺度函数的关系以及如何求解重构函数。文献[6]研究了多小波空间的一般采样定理，但没有讨论采样点不均匀时的不规则采样。本文基于再生核Hilbert空间理论，分析了采样定理在更一般多小波子空间成立的条件，以及重构函数与多尺度函数之间的关系，从而建立了多小波子空间的均匀采样定理和采样点不均匀时的不规则采样定理，这使多小波子空间采样定理具有较好的适用性。

2 再生核 Hilbert 空间

定义 1 正定核函数：对连续情况，如果对称函数 $K(t,s)\in L_\infty(\Gamma\times\Gamma)$，有 $\int_{\Gamma\times\Gamma}K(t,s)f(t)f(s)\mathrm{d}t\mathrm{d}s\geq 0,\ f\in L_2(\Gamma)$，

2005-10-19 收到，2006-05-15 改回
上海市重点学科建设(T0102)和上海市教委发展基金(217635)资助课题

则称函数 $K(t,s)$ 为正定核函数；对离散情况，给定任意 l，样本集 $t_1,t_2,\cdots,t_l \in \Gamma \subset R^n$ 和系数 $c_1,c_2,\cdots,c_l \in R$，对称函数 $K(t_i,t_j) \in L_\infty(\Gamma\times\Gamma)$ 满足 $\sum_{i,j=1}^{l} c_i c_j K\left(t_i,t_j\right) \ge 0$，则称函数 $K(t_i,t_j)$ 为正定核函数。

正定核函数是解微分方程的一个非常有用工具。著名的 Mercer 定理从数学上给出正定核函数的严格定义，并在此基础上给出正定核函数的特征分解。实际上关于范函空间的正定性与特征分解都非常类似于线性矢量空间中矩阵的正定性和特征分解。对所有可以表示为 $K(t,\bullet)=K(t-\bullet)$ 的核函数统称为平移不变核。

定义 2[7] 在特征空间上的再生核Hilbert空间 H 定义为线性空间 $H=\mathrm{span}\{\phi_n, n\in N\}$。再生核Hilbert空间上的内积操作具有再生特性，即 $f(t)=\langle f(\bullet),K(t,\bullet)\rangle,\quad \forall f\in H$。

实际上 Shannon 采样定理和再生核 Hilbert 空间存在联系，对于带限信号子空间有再生核 $K(t,s)=\sin\pi(t-s)/[\pi(t-s)]$。根据小波多分辨分析，小波空间 V_j 是 $L^2(R)$ 的子空间，并且每个 V_j 子空间都是再生核 Hilbert 空间，再生核为 $K_j(t,s)=2^j K\left(2^j t,2^j s\right)$，其中 $K(t,\bullet)=\sum_n \varphi(t-n)\cdot\tilde{\varphi}(\bullet-n)$。

3 多小波子空间的均匀采样定理

定义 3 设 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\left(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\cdots,\varphi_{r-1}(t)\right)^{\mathrm{T}}$ 是多尺度函数，由 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 生成的子空间 $V_0=\mathrm{span}\{\varphi_l(\bullet-k),\ \ k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$。如果存在常数 $0<A\le B<\infty$，使得对任意序列 $\{c_{l,k}\}\in l^2$，满足

$$A\sum_{k\in Z}\sum_{l=0}^{r-1}\left|c_{l,k}\right|^2 \le \left\|\sum_{k\in Z}\sum_{l=0}^{r-1} c_{l,k}\varphi_l(\bullet-k)\right\|^2 \le B\sum_{k\in Z}\sum_{l=0}^{r-1}\left|c_{l,k}\right|^2 \tag{1}$$

则称 $\{\varphi_l(\bullet-k), k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 是它生成的 V_0 子空间中以 A,B 为界的 Riesz 基。

根据小波分析理论，$\boldsymbol{\Phi}(t)$ 存在对偶基 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)=(\tilde{\varphi}_0(t),\tilde{\varphi}_1(t),\cdots,\tilde{\varphi}_{r-1}(t))^{\mathrm{T}}$，则对任意 $f(t)\in V_0$，

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left\langle f,\tilde{\varphi}_l(\bullet-k)\right\rangle \varphi_l(t-k) \\ &= \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left\langle f,\varphi_l(\bullet-k)\right\rangle \tilde{\varphi}_l(t-k) \end{aligned}$$

由多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 和其对偶函数 $\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(t)$，可构造一个二维函数 $K(t,\bullet)$ 为

$$K(t,\bullet)=\sum_{k\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*(t-k)\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\bullet-k)=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\varphi_l(t-k)\tilde{\varphi}_l(\bullet-k) \tag{2}$$

由式(1)可知 $\sup_t \sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty$，则式(2)定义的二维函数 $K(t,\bullet)$ 是 V_0 的再生核。

对任意 $f(t)\in L^2(R)$，$f(t)$ 的 Zak 变换定义为 $Z_f(t,\omega)=\sum_{n\in Z} f(t+n)e^{-in\omega}$。

定理 1 设 $\{\varphi_l(\bullet-k), k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 是它生成的子空间 V_0 中的 Riesz 基，若 $\boldsymbol{H}(\omega)$ 是一个 2π 为周期的 r 阶方阵，满足

$$\left[\hat{s}_0(\omega),\hat{s}_1(\omega),\cdots,\hat{s}_{r-1}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}(\omega)\left[\hat{\varphi}_0(\omega),\hat{\varphi}_2(\omega),\cdots,\hat{\varphi}_{r-1}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$$

则 $\{s_l(\bullet-k), k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 构成子空间 V_0 的 Riesz 基，当且仅当存在常数 $0<C_1\le C_2<\infty$，使得

$$C_1\boldsymbol{I}_r \le \boldsymbol{H}^*(\omega)\boldsymbol{H}(\omega)\le C_2\boldsymbol{I}_r \tag{3}$$

引理 1 设 $\{\varphi_l(\bullet-k), k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 和 $\{s_l(\bullet-k), k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 是子空间 V_0 的 Riesz 基，并且它们都是连续函数，如果 $\sup_t\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty$，则

$$\sup_t\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|s_l(t+k)\right|^2<+\infty \tag{4}$$

证明 设 $s_p(t)=\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}c_{p,l}(k)\varphi_l(t-k),\ \ p=0,1,\cdots,r-1$，令 $\boldsymbol{C}_{p,l}(\omega)=\sum_{k\in Z}c_{p,l}(k)e^{-ik\omega}$，由定理 1 知，存在正常数 D，使 $\boldsymbol{C}^*_{p,l}(\omega)\boldsymbol{C}_{p,l}(\omega)\le D\boldsymbol{I}_r$，故

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|s_p(t+k)\right|^2 \\
&=\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}c_{p,l}(k)\varphi_l(t+k-n)\right|^2 \\
&=\sum_{p=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{l=0}^{r-1}\boldsymbol{C}_{p,l}(\omega)Z_{\varphi_l}(t,\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega \\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{r-1}\overline{Z_{\varphi_m}(t,\omega)\boldsymbol{C}_{p,m}(\omega)}\,\boldsymbol{C}_{p,l}(\omega)Z_{\varphi_l}(t,\omega)\mathrm{d}\omega \\
&\le D\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{l=0}^{r-1}\left|Z_{\varphi_l}(t,\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=D\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty
\end{aligned}$$

定理 2 设 $\{\varphi_l(\bullet-k),\ k\in Z, l=0,1,\cdots,r-1\}$ 是子空间 V_0 中的 Riesz 基，且 $\sup_t\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty$，$a_m\in[0,1)$ 是常数，$a_i\ne a_j,\ i\ne j,\ \ i,j=0,1,\cdots,r-1$，则存在常数 $0<C_1\le C_2<\infty$，使

$$C_1\boldsymbol{I}_r\le \boldsymbol{T}^*_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\le C_2\boldsymbol{I}_r \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)=[Z_{\boldsymbol{\Phi}}(a_0,\omega),Z_{\boldsymbol{\Phi}}(a_1,\omega),\cdots,Z_{\boldsymbol{\Phi}}(a_{r-1},\omega)]$。当且仅当存在 $s_m(\bullet-k)\in V_0, 0\le m\le r-1, k\in Z$，对 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}f(n+a_m)s_m(t-n) \tag{6}$$

这里 $[\hat{s}_0(\omega),\ \hat{s}_1(\omega),\cdots,\hat{s}_{r-1}(\omega)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}^{-1}_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)[\hat{\varphi}_0(\omega),\ \hat{\varphi}_1(\omega),\cdots,\hat{\varphi}_{r-1}(\omega)]^{\mathrm{T}}$，并且式(6)右端级数在 $L^2(R)$ 中收敛并在 R 上一致收敛。

证明 必要性。根据再生核的性质，知 $K(a_m,\bullet-n)=K(n+a_m,\bullet)$。令 $\boldsymbol{P}=[K(a_0,\bullet-n),K(a_1,\bullet-n),\ \cdots,K(a_{r-1},\bullet-n)]^{\mathrm{T}}$，两边取 Fourier 变换，得 $\hat{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{T}^*_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\hat{\tilde{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)e^{-in\omega}$，则

$$E_P=\sum_{k\in Z}\widehat{\boldsymbol{P}}(\omega+2k\pi)\widehat{\boldsymbol{P}}^*(\omega+2k\pi)$$
$$=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*(\omega)\sum_{k\in Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega+2k\pi)\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^*(\omega+2k\pi)T_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)$$

因为存在两个常数 $0<D_1\le D_2<\infty$，使 $D_1\boldsymbol{I}_r\le\sum_{k\in Z}\widehat{\boldsymbol{\Phi}}(\omega+2k\pi)\cdot\widehat{\boldsymbol{\Phi}}^*(\omega+2k\pi)\le D_2\boldsymbol{I}_r$，故 $D_1C_1\boldsymbol{I}_r\le E_{\boldsymbol{P}}\le D_2C_2\boldsymbol{I}_r$，即 $\{K(a_0,\bullet-n),K(a_1,\bullet-n),\cdots,K(a_{r-1},\bullet-n)\}$ 是子空间 V_0 的 Riesz 基。根据小波理论，存在对偶基 $\{s_m(\bullet-n),0\le m\le r-1,n\in Z\}$，则对任意 $f\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left\langle f(\bullet),K\left(a_m,\bullet-n\right)\right\rangle s_m(t-n)$$
$$=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left\langle f(\bullet),K\left(n+a_m,\bullet\right)\right\rangle s_m(t-n)$$
$$=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}f\left(n+a_m\right)s_m(t-n)$$

充分性。在式(6)中以 $\varphi_l(t)$ 代替 $f(t)$，得 $\varphi_l(t)=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\varphi_l(n+a_m)s_m(t-n),l=0,1,\cdots,r-1$，其频域形式为 $\hat{\varphi}_l(\omega)=\sum_{m=0}^{r-1}Z_{\varphi_l}\left(a_m,\omega\right)\hat{s}_m(\omega)$, $l=0,1,\cdots,r-1$，由此得 $[\hat{s}_0(\omega),\hat{s}_1(\omega),\cdots,\hat{s}_{r-1}(\omega)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\omega)\left[\hat{\varphi}_0(\omega),\hat{\varphi}_1(\omega),\cdots,\hat{\varphi}_{r-1}(\omega)\right]^{\mathrm{T}}$ 根据定理 1，可知式(5)成立。 证毕

推论 1 设二重多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)=\left(\varphi_0(t),\varphi_1(t)\right)^{\mathrm{T}}$，若满足插值性，则存在重构函数 $s_m(t)=\varphi_m(t),m=0,1$，对 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f(n)\varphi_0(t-n)+f\left(n+1/2\right)\varphi_1(t-n)\tag{7}$$

推论 2 设二重多尺度函数 $\boldsymbol{\Phi}(t)$=$\left(\varphi_0(t),\varphi_1(t)\right)^{\mathrm{T}}$，并且 $\sup_t\sum_{l=0}^{1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty$，$a_m\in[0,1)$ 是常数，$a_i\ne a_j$, $i\ne j$, $i,j=0,1$，则存在常数 $0<C_1\le C_2<\infty$，使 $C_1\boldsymbol{I}_2\le\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}\le C_2\boldsymbol{I}_2$，当且仅当存在 $s_m(t),m=0,1$，对 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f\left(n+a_0\right)s_0(t-n)+f\left(n+a_1\right)s_1(t-n)\tag{8}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}\hat{s}_0(\omega)&=\frac{Z_{\varphi_1}(a_1,\omega)\hat{\varphi}_0(\omega)-Z_{\varphi_0}(a_1,\omega)\hat{\varphi}_1(\omega)}{Z_{\varphi_0}(a_0,\omega)Z_{\varphi_1}(a_1,\omega)-Z_{\varphi_0}(a_1,\omega)Z_{\varphi_1}(a_0,\omega)}\\ \hat{s}_1(\omega)&=\frac{Z_{\varphi_0}(a_0,\omega)\hat{\varphi}_1(\omega)-Z_{\varphi_1}(a_0,\omega)\hat{\varphi}_0(\omega)}{Z_{\varphi_0}(a_0,\omega)Z_{\varphi_1}(a_1,\omega)-Z_{\varphi_0}(a_1,\omega)Z_{\varphi_1}(a_0,\omega)}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

4 多小波子空间的不规则采样定理

以上讨论了多小波子空间的均匀采样定理，但在大多数实际情况下，采样点并非均匀，存在偏移 $\{\delta_l^n\}$，那么如何通过采样值 $\{f\left(n+a_l+\delta_l^n\right),0\le l\le r-1,n\in Z\}$ 重构子空间 V_0 中的任意连续函数 f？以下给出了多小波子空间不规则采样定理，以及相应重构函数的构造。

定理 3 设 $\{\varphi_l(\bullet-k),\ k\in Z,l=0,1,\cdots,r-1\}$ 是它生成的子空间 V_0 中的 Riesz 基，且 $a_m\in[0,1)$是常数,$a_i\ne a_j$, $i\ne j$, $i,j=0,1,\cdots,r-1$，$\sup_t\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{k\in Z}\left|\varphi_l(t+k)\right|^2<+\infty$，则存在常数 $0<C_1\le C_2<\infty$，使 $C_1\boldsymbol{I}_r\le\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*(\omega)\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}(\omega)\le C_2\boldsymbol{I}_r$，进一步，假设存在序列 $\{\delta_l^n,0\le l\le r-1,n\in Z\}$ 和常数 $0<B_1\le B_2<\infty$，对 $f\in V_0$，使

$$B_1\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left|f\left(n+a_m\right)\right|^2\le\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left|f\left(n+a_m+\delta_m^n\right)\right|^2$$
$$\le B_2\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left|f\left(n+a_m\right)\right|^2\tag{10}$$

成立，则存在 $s_{m,n}(t)$, $m=0,1,\cdots,r-1,n\in Z$，对 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}\sum_{m=0}^{r-1}f\left(n+a_m+\delta_m^n\right)s_{m,n}(t)\tag{11}$$

并且式(11)右端级数在 $L^2(R)$ 中收敛并在 R 上一致收敛。

证明 由定理 2 知 $\{K\left(a_0,\bullet-n\right),K\left(a_1,\bullet-n\right),\cdots,K\left(a_{r-1},\bullet-n\right)\}$ 是子空间 V_0 的框架，即存在两个常数 $0<A_1\le A_2<\infty$，使

$$A_1\|f\|^2\le\sum_{n\in Z}\sum_{m=0}^{r-1}\left|\left\langle f,K\left(n+a_m,\bullet\right)\right\rangle\right|^2=\sum_{n\in Z}\sum_{m=0}^{r-1}\left|f\left(n+a_m\right)\right|^2$$
$$\le A_2\|f\|^2$$

由式(10)，得

$$B_1A_1\|f\|^2\le\sum_{n=Z}\sum_{m=0}^{r-1}\left|\left\langle f,K\left(n+a_m+\delta_m^n,\bullet\right)\right\rangle\right|^2$$
$$=\sum_{n=Z}\sum_{m=0}^{r-1}\left|f\left(n+a_m+\delta_m^n\right)\right|^2\le B_2A_2\|f\|^2$$

因此 $\{K(n+a_0+\delta_0^n,\bullet),K(n+a_1+\delta_1^n,\bullet),\cdots,K(n+a_{r-1}+\delta_{r-1}^n,\bullet)\}$ 也是 V_0 的框架，根据小波理论，存在相应对偶框架 $\{s_{m,n}(t),\ m=0,1,\cdots,r-1,n\in Z\}$，对 $f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}\sum_{m=1}^{r-1}\left\langle f,K\left(n+a_m+\delta_m^n,\bullet\right)\right\rangle s_{m,n}(t)$$
$$=\sum_{n\in Z}\sum_{m=0}^{r-1}f\left(n+a_m+\delta_m^n\right)s_{m,n}(t)$$

证毕

下面进一步讨论多小波子空间不规则采样定理中重构函数 $\{s_{m,n}(t)\}$ 的构造。

令 $f=K(d+a_l+\delta_l^d,\bullet),0\le l\le r-1,d\in Z$，代入式(11)，得

$$K\left(d+a_l+\delta_l^d,\bullet\right)=\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left\langle K\left(d+a_l+\delta_l^d,\bullet\right),K\left(n+a_m+\delta_m^n,\bullet\right)\right\rangle s_{m,n}(t)\tag{12}$$

已知 $K\left(d+a_l+\delta_l^d,\bullet\right)=\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(d+a_l+\delta_l^d-j\right)\tilde{\boldsymbol{\Phi}}(\bullet-j)$，根

据 Fourier 变换的平移不变和 Parserval 恒等式，式(12)为

$$\begin{aligned}
&K\left(d+a_l+\delta_l^d,\bullet\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}\left\langle\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(d+a_l+\delta_l^d-j\right)\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)e^{-ij\omega},\right.\\
&\qquad\left.\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(n+a_m+\delta_m^n-j\right)\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega)e^{-ij\omega}\right\rangle s_{m,n}(t)\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}s_{m,n}(t)\int_0^{2\pi}\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(d+a_l+\delta_l^d-j\right)e^{-ij\omega}\right]\\
&\qquad\cdot\left[\sum_{n\in Z}\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}(\omega+2n\pi)\widehat{\widehat{\boldsymbol{\Phi}}}^*(\omega+2n\pi)\right]\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}(n+a_m\right.\\
&\qquad\left.+\delta_m^n-j)e^{ij\omega}\right]\mathrm{d}\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{r-1}\sum_{n\in Z}s_{m,n}(t)\int_0^{2\pi}\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(d+a_l+\delta_l^d-j\right)e^{-ij\omega}\right]\\
&\qquad\cdot\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\omega)\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}\left(n+a_m+\delta_m^n-j\right)e^{ij\omega}\right]\mathrm{d}\omega
\end{aligned}\tag{13}$$

记$B_{d,l,n,m}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}^*\left(d+a_l+\delta_l^d-j\right)e^{-ij\omega}\right]\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\Phi}}^{-1}(\omega)\cdot\left[\sum_{j\in Z}\boldsymbol{\Phi}\left(n+a_m+\delta_m^n-j\right)e^{ij\omega}\right]\mathrm{d}\omega$

则式(13)简化为

$$K\left(d+a_l+\delta_l^d,\bullet\right)=\sum_{n\in Z}\sum_{m=0}^{r-1}B_{d,l,n,m}s_{m,n}(t),\quad 0\le l\le r-1, d\in Z\tag{14}$$

记 $\boldsymbol{R}_l=[K(1+a_l+\delta_l^1,\bullet),K(2+a_l+\delta_l^1,\bullet),\cdots]^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{R}=[\boldsymbol{R}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{R}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{R}_{r-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S}_m=[s_{m,1},s_{m,2},\cdots]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{S}=[\boldsymbol{S}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{S}_2^{\mathrm{T}},\cdots\boldsymbol{S}_{r-1}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ $\boldsymbol{B}_{d,l,n}=[\boldsymbol{B}_{d,l,n,0},\boldsymbol{B}_{d,l,n,1},\cdots,\boldsymbol{B}_{d,l,n,r-1}]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{B}_l=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{1,l,1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_{1,l,2}^{\mathrm{T}} & \cdots\\ \boldsymbol{B}_{2,l,1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}_{2,l,2}^{\mathrm{T}} & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\left[\boldsymbol{B}_0^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{B}_{r-1}^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

从而可得

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{R}$$

5 算例

例 1 Selesnick插值多小波[4]。

$$H_{-2}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & -f\end{pmatrix},H_{-1}=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & e\end{pmatrix},H_0=\begin{pmatrix}1 & c\\ 0 & -d\end{pmatrix},H_1=\begin{pmatrix}0 & d\\ 1 & c\end{pmatrix}$$

$H_2=\begin{pmatrix}0 & e\\ 0 & -b\end{pmatrix}$，$H_3=\begin{pmatrix}0 & f\\ 0 & a\end{pmatrix}$，其中 $a=\dfrac{1}{32}$，$b=A+\dfrac{1}{4}$，$c=\dfrac{15}{16},d=-2A-\dfrac{1}{4},e=\dfrac{1}{32},A=-\dfrac{1}{8}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{32}$， $f=A$。

此多小波满足插值性，根据推论 1，$\begin{cases}s_0(t)=\varphi_0(t)\\ s_1(t)=\varphi_1(t)\end{cases}$，对 $\forall f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}f(n)\varphi_0(t-n)+f\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_1(t-n)$$

例 2 文献[8]给出的样条多小波。

设 $\varphi_0(t)=\begin{cases}2t(1-t), & t\in[0,1]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $\varphi_1(t)=\begin{cases}t^2, & t\in[0,1)\\ (2-t)^2, & t\in[1,2]\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

当 $a_0=0$，$a_1=1/2$ 时，$0.191\boldsymbol{I}_2\le\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}\le1.309\boldsymbol{I}_2$，满足 V_0 上的均匀采样条件，得

$$\begin{cases}s_0(t)=\dfrac{1}{2}\varphi_0(t)+\dfrac{1}{2}\varphi_0(t+1)-\varphi_1(t+1)\\ s_1(t)=-2\varphi_0(t)\end{cases}$$

由式(8)，对 $\forall f(t)\in V_0$，有

$$f(t)=\sum_{n\in Z}\frac{1}{2}f(n)\big(\varphi_0(t-n)+\varphi_0(t+1-n)\big)-f(n)\varphi_1\cdot(t+1-n)-2f\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi_0(t-n)$$

例 3 Chui多小波[9]：$H_0=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -\sqrt{7}/4 & -\sqrt{7}/4\end{pmatrix}$，

$H_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$，$H_2=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ \sqrt{7}/4 & -\sqrt{7}/4\end{pmatrix}$。

当 $a_0=0$，$a_1=1/2$ 时，$0\le\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}\le2\boldsymbol{I}_2$，不满足均匀采样定理条件，因此无法实现 V_0 空间中信号重构。而当 $a_0=0$，$a_1=1/4$ 时，$0.5\boldsymbol{I}_2\le\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}^*\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{\Phi}}\le3\boldsymbol{I}_2$，满足均匀采样定理条件，得

$$\hat{s}_0(\omega)=e^{i\omega}\hat{\varphi}_0(\omega)+\frac{-\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\right)+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{8}-\dfrac{1}{4}\right)e^{i\omega}}{\dfrac{\sqrt{7}}{8}-\dfrac{7}{16}+\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}-\dfrac{7}{16}\right)e^{-i\omega}}\cdot\hat{\varphi}_1(\omega)$$

$$\hat{s}_1(\omega)=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{7}}{8}-\dfrac{7}{16}+\left(-\dfrac{\sqrt{7}}{4}-\dfrac{7}{16}\right)e^{-i\omega}}\hat{\varphi}_0(\omega)$$

可知重构函数 $s_0(t),s_1(t)$ 不具有紧支性，从而不能实现精确重构，但它具有指数衰减特性。

6 结束语

多小波较单小波具有更大的灵活性，可同时具有正交性、正则性、紧支撑、对称和高的逼近阶等特性，成为小波研究的一个新热点。在多小波不具有插值特性的条件下，本文建立了多小波子空间上的均匀采样定理和不规则采样定理，以及相应重构函数的构造公式。而多小波子空间上关于

采样定理的误差估计分析将是进一步研究的课题。

参 考 文 献

[1] Walter G G. A sampling theorem for wavelet subspaces. *IEEE Trans. on IT*, 1992, 38(2): 881–884.

[2] Xia X G and Zhang Z. On sampling theorem, wavelets and wavelet transforms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3524–3535.

[3] Blu T and Unser M. Approximation error for quasi-interpolators and (multi)wavelet expansions. *Applied and Computation Harmonic Analysis*, 1999, 6: 219–251.

[4] Selesnick I W. Interpolating multiwavelets bases and the sampling theorem. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1999, 47(6): 1615–1621.

[5] Sun W S and Zhou X W. Sampling theorem for multiwavelet subspaces. *Chinese Science Bulletin,* 1999, 44(14): 1283–1286.

[6] Jia C Y and Gao X P. A general sampling theorem for multiwavelet subspaces. *Science in China(Series F)*, 2002, 45(5): 365–372.

[7] Scholkopf B, Mika S, and Burges C J C, *et al.*. Input space vs. feature space in kernel- based methods. *IEEE Trans. on Neural Networks*, 1999, 10(5): 1000–1017.

[8] Plonka G and Strela V. Construction of multi-scaling functions with approximation and symmetry. *SIAM J. Math. Anal.*, 1998, 29(2): 1–31.

[9] Chui C K and Lian J. A study of orthonornal multi-wavelets. *Appl. Numer. Math.*, 1996, 20(3): 273–298.

陈俊丽： 女，1972 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为小波分析与信号处理.

卢恩博： 男，1982 年生，硕士生，研究方向为小波分析与多用户检测.

曹文佳： 女，1980 年生，硕士生，研究方向为神经网络与模式识别.