具有零相关窗互补地址码的设计

孙宇昊　　邹永忠　　张玉艳　　李道本
(北京邮电大学信息工程学院　100876)

摘　要：该文给出并证明了构造零相关窗(ZCW)互补码的二叉树方法，当码字足够长时这种方法构造的码字数与理论上界的数目最多仅相差 1。为了增加可用的码字，采用互补码与扩展矩阵直积的方法，将一个互补码构造成一组码，组内码字的相关特性取决于扩展矩阵，但不同组之间的码字仍有 ZCW。

关键词：互补码；二叉树；零相关窗
中图分类号：TN911.22　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1009-5896(2007)03-0648-04

On Zero Correlation Window Complementary Access Code Design

Sun Yu-hao　　Zou Yong-zhong　　Zhang Yu-yan　　Li Dao-ben
(*Department of Information Engineering*, *BUPT*, *Beijing* 100876, *China*)

Abstract: A binary tree scheme to construct Zero Correlation Window (ZCW) complementary codes is presented. The gap between the code number of the construction method and that of the theoretic bound is at most one when the code is long enough. In order to obtain more usable codes, a set of codes can be constructed through the direct product of the complementary code and an extend matrix. The correlation property of the code in one set lies on the extend matrix, nevertheless the ZCW still exists between any two codes in any different code sets.

Key words: Complementary code; Binary tree; Zero Correlation Window (ZCW)

1　前言

由于多径信道的复杂性，传统的码分多址(CDMA)系统中存在用户码字间的多址干扰(MAI)和用户码字自身因多径产生的码间干扰(ISI)。在离基站远近差别显著的多个用户终端同时工作时，MAI会导致远近效应，以致于系统用户数大大降低甚至不能正常运行[1]。零相关窗(ZCW)互补码因在一定的时间窗口内自相关和互相关干扰都为零而能消除绝大部分的MAI和ISI，因此获得了广泛的关注和研究[2-7]。大区同步(LS)码是一类码长为2的幂的ZCW互补码[4]，但数目与窗口宽度成反比。虽然文献[5]中给出了ZCW互补码的数目的理论界，但没有给出构造方法。

基于文献[4, 7], 本文严格证明了一种可以逼近理论界数目的ZCW互补码二叉树构造法，并将之与任意矩阵直积，扩展得到一类组内有一定的相关性但组间仍然有ZCW的扩频码，从而为CDMA系统设计提供了成倍增加的可用码字资源。

2　零相关窗互补码的二叉树构造方法

定义 1　对于两个长为 N 的序列 $\boldsymbol{c}=[c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots,c_N]$ 和 $\boldsymbol{s}=[s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots,s_N]$ 组成的序列对 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})$，当 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})$ 的非周期自相关函数

$$R_{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{N}[c_nc_{n-\tau}^*+s_ns_{n-\tau}^*], & 0\le\tau\le N\\ \dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N+\tau}[c_nc_{n-\tau}^*+s_ns_{n-\tau}^*], & -N\le\tau<0\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0, & 0<|\tau|<N\\ 1, & \tau=0\end{cases}$$

时称序列对 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})$ 为理想互补对。

定义 2　当两个序列对 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 中 $\boldsymbol{c}_1$ 与 $\boldsymbol{c}_2$ 、$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 的非周期互相关函数分别为

$$R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{N}c_{1,n}c_{2,n-\tau}^*, & 0\le\tau<N\\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N+\tau}c_{1,n}c_{2,n-\tau}^*, & -N<\tau<0\end{cases}$$

$$R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{N}s_{1,n}s_{2,n-\tau}^*, & 0\le\tau<N\\ \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N+\tau}s_{1,n}s_{2,n-\tau}^*, & -N<\tau<0\end{cases}$$

令 $\tau_w=\arg\min\limits_{\tau}\left[(1/2)[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}(\tau)]\ne0\right]$，则 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 称为单边 ZCW 为 τ_w 的一对 ZCW 互补码。若对于任意 $|\tau|<N$ 都有 $(1/2)[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}(\tau)]=0$，则 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 称为一对理想互补码。

定义 3　两个长为 N 的序列 $\boldsymbol{c}_1=[c_{1,1},\cdots,c_{1,n},\cdots,c_{1,N}]$ 和 $\boldsymbol{c}_2=[c_{2,1},\cdots,c_{2,n},\cdots,c_{2,N}]$ 首尾相连组成的 $2N$ 长的序列 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2=[c_{1,1},\cdots,c_{1,n},\cdots,c_{1,N},c_{2,1},\cdots,c_{2,n},\cdots,c_{2,N}]$ 称为级联序列。

应用这些定义，构造 ZCW 互补码的二叉树方法描述如

2005-08-19 收到，2006-01-03 改回
国家自然科学基金重点项目(69931050)资助课题

下：

(1) 给定理想互补码 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 做初始码，即二叉树的根结点(root)；

(2) 按如下二叉树生成两对级联序列为理想互补码，这两对码字之间则是窗口互补码

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left\langle\begin{matrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2\\ \boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2),\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2)\end{Bmatrix}\Rightarrow\cdots\\ \begin{Bmatrix}\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1\\ \boldsymbol{c}_2(-\boldsymbol{c}_1),\boldsymbol{s}_2(-\boldsymbol{s}_1)\end{Bmatrix}\Rightarrow\cdots\end{matrix}\right.$$

(3) 上一步生成的任意一对理想互补码都可以作为下一步的父节点。

其中的码字乘以–1 不会改变码字集合的窗口性质，但集合中码字数目并没有增加。根节点只有在 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_i$ $(i=1,2)$的初始长度为 2，10，26 时才是存在的[2]，不同码字的移位互相关如果非零，则非零的位置都在核长的整数倍处，这种ZCW互补码同样满足文献[5]给出的码字个数、窗口宽度与码字长度的关系界。其他构造方式[4]得到的码字只是上述方法所得码字的重新排列，码字并不会增加。本节最后会指出，二叉树构造出来的码字已经非常接近理论界。二叉树构造后续步骤的合理性由下面的 2 个定理及其推论证明。

定理 1　若两个理想互补对 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 构成一对理想互补码，$\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_i$ $(i=1,2)$的长为 N，则级联序列对 $(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)$ 与 $\big(\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2),\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2)\big)$ 都是理想互补对，且两者构成一对理想互补码。

证明　由于不关心具体相关值，只关心相关函数是否为 0，根据相关的对称性，只需考虑 $\tau\geq 0$ 的情况。首先分别考察 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$ 和 $\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2$ 的自相关函数

$$R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N}\left[\displaystyle\sum_{n=1}^{N}c_{1,n}c_{1,n}^{*}+\sum_{n=1}^{N}c_{2,n}c_{2,n}^{*}\right], & \tau=0\\ \dfrac{1}{2N}\left[\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{N}c_{1,n}c_{1,n-\tau}^{*}+\sum_{n=\tau+1}^{N}c_{2,n}c_{2,n-\tau}^{*}\right.\\ \qquad\left.+\displaystyle\sum_{l=1}^{\tau}c_{2,l}c_{1,N-\tau+l}^{*}\right], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{2N}c_{2,n-N}c_{1,n-N-\tau}^{*}, & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & \tau=0\\ \dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau-N)\big], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2}R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau-N), & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

$$R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau=0\\ \dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1}(\tau-N)\big], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2}R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1}(\tau-N), & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

根据互补码相关函数定义，经简单计算有

$$R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2}(\tau)=\begin{cases}1, & \tau=0\\ 0, & 0<\tau<2N\end{cases}$$

由对称性，$-2N<\tau<0$ 时自相关函数也是 0，即 $(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)$ 是理想互补对；同理可知 $\big(\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2),\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2)\big)$ 也是理想互补对。对于 $\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2$ 和 $\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2)$ 的互相关函数，计算得

$$R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2)}(\tau)=\begin{cases}0, & \tau=0\\ \dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_1}(\tau)-R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau-N)\big], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2}R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau-N), & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

$\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2$ 和 $\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2)$ 的互相关函数与上式相似，只是下标由 $\boldsymbol{c}$ 改变为 $\boldsymbol{s}$ 而已。从而根据题设，对 $0\leq\tau<2N$，都有 $R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2)}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2)}(\tau)=0$。由对称性，$-2N<\tau<0$ 时互相关函数也是 0。　证毕

定理 2　若两个理想互补对 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 构成一对理想互补码，$\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_i$ $(i=1,2)$ 的长为 N，则 $(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)$ 与 $(\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1)$ 有单边宽度为 N 的 ZCW。

证明　根据相关的对称性，只需考虑 $\tau\geq 0$ 的情况

$$R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N}\left[\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{N}c_{1,n}c_{2,n-\tau}^{*}+\sum_{n=\tau+1}^{N}c_{2,n}c_{1,n-\tau}^{*}\right.\\ \qquad\left.+\displaystyle\sum_{l=1}^{\tau}c_{2,l}c_{2,N-\tau+l}^{*}\right], & 0\leq\tau<N\\ \dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=\tau+1}^{2N}c_{2,n-N}c_{2,n-\tau}^{*}, & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau)\big], & \tau=0\\ \dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2}(\tau-N)\big], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2}R_{\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2}(\tau-N), & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

$$R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1}(\tau)\big], & \tau=0\\ \dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2}(\tau-N)\big], & 0<\tau<N\\ \dfrac{1}{2}R_{\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2}(\tau-N), & N\leq\tau<2N\end{cases}$$

由题设，$(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 构成一对理想互补码，根据互补码相关函数定义有

$$R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & \tau=N\\ 0, & 0\leq\tau<N,N<\tau<2N\end{cases}$$

由对称性，

$\tau_w=\arg\min\limits_{\tau}\Big[\dfrac{1}{2}\big[R_{\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1}(\tau)+R_{\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1}(\tau)\big]\neq 0\Big]=N$。证毕

推论 1 若两个理想互补对 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$ 构成一对理想互补码，$\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_i$ (i=1,2)的长都为 N，则 $(\boldsymbol{c}_1(-\boldsymbol{c}_2),\boldsymbol{s}_1(-\boldsymbol{s}_2))$ 与 $(\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_2\boldsymbol{s}_1)$、$(\boldsymbol{c}_2(-\boldsymbol{c}_1),\boldsymbol{s}_2(-\boldsymbol{s}_1))$ 与 $(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_1\boldsymbol{s}_2)$ 都有单边宽度为 N 的 ZCW。

定理 3 按如上二叉树构造的码字中，若根节点记为第 1 代，则第 j(j=1, 2 ,⋯)代有 2^j 个长为 N 的序列 $\boldsymbol{c}_k$ 和 $\boldsymbol{s}_k$ (k=1, 2 ,⋯,2^j)组成的理想互补对，它们之间的单边零窗口宽度只可能是 $2N/2^i$ (i=1, 2 ,⋯, j)。在每一代的码字，彼此单边ZCW宽度为 $2N/2^i$ 的码字集合有 2^{j-i} 个，每个集合中有 2^i 个码字。

定理 3 由数学归纳法易证，略。

由此可知按此二叉树生成的码字的确存在ZCW。根据理论界[5]，码长为 N，单边窗口为 τ_w 的码字最多有 $\lfloor (N-1)/\tau_w+1 \rfloor$ 个，$\lfloor\bullet\rfloor$ 表示对 • 下取整。$\boldsymbol{c}_k$ 和 $\boldsymbol{s}_k$ 的总长度可认为是 $2N$，将互补对作为扩频码使用时 $\boldsymbol{c}_k$ 和 $\boldsymbol{s}_k$ 之后需要分别插入 g 个 0，以满足互补序列非周期相关函数的定义，则单边窗口为 $2N/2^i$ (i=1, 2 ,⋯, j) 的码字最多有 $\lfloor (2N+2g-1)/(N2^{1-i})+1 \rfloor = \lfloor 2^i(1+((2g-1)/(2N))+1 \rfloor$ 个，而由推论 2，已经构造出了 2^i 个，当 g 不为 0 但相对 N 来说很小时两者只相差 1。当 g 为 0 时，即可以形成Hadamard矩阵，此时码长与码的个数相同，都是 2^i。

ITU-A 信道模型中，多径时延一般 3 到 4μs，当移动通信工程中采用 1Mchip/s 左右的码片速率时，互补码的单边窗口为 4 即可基本消除多径的影响，但扩频增益为 64 时只有 16 个码字。增加可用码字的一个方法是：在设计码字时适当放松码字 ZCW 的要求，允许几个码字之间没有 ZCW，但它们与其他码字仍然有 ZCW。这样只需针对彼此干扰的那组码字进行多码联合检测，并不像传统 CDMA 系统那样要对所有用户码字联合检测。理论和实践都已证明，相关值不大于 e^{-1} 甚至 0.5 时，联合检测的性能损失并不大。另一方面，如果多径时延大于 ZCW 的时间，就只有使用 ZCW 更宽的地址码，否则会有 ISI。下一节将证明，用一个矩阵与窗口互补码直积得到的一组码字就既能增加码字数目又能拓宽 ZCW 宽度。

3 分组 ZCW 互补码的矩阵直积构造方法

定理 4 说明理想互补序列对与矩阵以直积扩展得到一组码，其相关特性与矩阵行序列的相关特性一致，定理 5 则说明窗口互补码经矩阵扩展后得到的两组码之间仍然有 ZCW。

定理 4 给定理想互补序列对 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})$ (其中 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的长都为 N)和一个 K 行 M 列的扩展矩阵 $\boldsymbol{H}_{(K\times M)}=[\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_k,\cdots,\boldsymbol{h}_K]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}_k$ 为第 k 个行向量，它们直积得到的码字矩阵 $\boldsymbol{X}\triangleq[\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{s}\otimes\boldsymbol{H}]$ 中，第 i(i=1, 2 ,⋯, K)个行向量码字为 $\boldsymbol{x}_i=[c_1h_{i,1},c_1h_{i,2},\cdots c_1h_{i,M},c_2h_{i,1},\cdots,c_2h_{i,M},\cdots,c_Nh_{i,1},\cdots,c_Nh_{i,M}]$。则码字 $\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{x}_j$ (i, j=1, 2 ,⋯, K)的互相关函数为 $R_{i,j}^{\boldsymbol{x}}(\tau)=\begin{cases}R_{i,j}^{\boldsymbol{h}}(\tau), & 0\le|\tau|<M\\ 0, & M\le|\tau|<NM\end{cases}$，其中

$$R_{i,j}^{\boldsymbol{h}}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=\tau+1}^{M}h_{i,m}h_{j,m-\tau}^*, & 0\le\tau<M\\[2ex] \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M+\tau}h_{i,m}h_{j,m-\tau}^*, & -M<\tau<0\end{cases}$$

证明 根据相关的对称性，只需考虑 $\tau\ge0$ 的情况。令 $\tau=M\tau_1+\tau_2$，$0\le\tau_1<N$，$0\le\tau_2<M$，$0\le\tau<NM$，且都是整数。码字 $\boldsymbol{x}_i$ 和 $\boldsymbol{x}_j$ (i, j=1, 2 ,⋯, K)的相关函数

$$\begin{aligned}R_{i,j}^{\boldsymbol{x}}(\tau)&=\frac{1}{2NM}\sum_{l=\tau+1}^{MN}\left[x_{i,l}x_{j,l-\tau_1}^*+x_{i,l}x_{j,l-\tau_1}^*\right]\\&=\frac{1}{2NM}\left[\sum_{n=\tau_1+1}^{N}(c_nc_{n-\tau_1}^*+s_ns_{n-\tau_1}^*)\sum_{m=\tau_2+1}^{M}h_{i,m}h_{j,m-\tau_2}^*\right.\\&\qquad\left.+\sum_{n=\tau_1+1}^{N-1}(c_{n+1}c_{n-\tau_1}^*+s_{n+1}s_{n-\tau_1}^*)\sum_{m=1}^{\tau_2}h_{i,m}h_{j,M+m-\tau_2}^*\right]\\&=R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}}(\tau_1)R_{i,j}^{\boldsymbol{h}}(\tau_2)+R_{\boldsymbol{c},\boldsymbol{s}}(\tau_1+1)R_{i,j}^{\boldsymbol{h}}(\tau_2-M)\\&=\begin{cases}R_{i,j}^{\boldsymbol{h}}(\tau_2), & \tau_1=0,0\le\tau_2<M\\ 0, & 0<\tau_1<N,0\le\tau_2<M\end{cases}\end{aligned}$$

证毕

定理 5 给定一对单边窗口为 τ_w 的互补码 $(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{s}_1)$ 和 $(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{s}_2)$，其中 $\boldsymbol{c}_i$ 和 $\boldsymbol{s}_i$ (i=1,2)的长都为 N，一个 K 行 M 列扩展矩阵 $\boldsymbol{H}_{(K\times M)}=[\boldsymbol{h}_1,\cdots,\boldsymbol{h}_k,\cdots,\boldsymbol{h}_K]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{h}_k$ 表示第 k 个行向量，则它们直积生成的码字矩阵 $\boldsymbol{X}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1\otimes\boldsymbol{H} & \boldsymbol{s}_1\otimes\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{c}_2\otimes\boldsymbol{H} & \boldsymbol{s}_2\otimes\boldsymbol{H}\end{bmatrix}$ 中，第 k_1 行（k_1=1, 2 ,⋯, $2K$)形成的码字 $\boldsymbol{x}_{k_1}=[c_1h_{k_1,1},c_1h_{k_1,2},\cdots c_1h_{k_1,M},c_2h_{k_1,1},\cdots,c_2h_{k_1,M},\cdots,c_Nh_{k_1,1},\cdots,c_Nh_{k_1,M}]$。则 $\boldsymbol{x}_{iK+k}$ 和 $\boldsymbol{x}_{jK+l}$ ($i,j=1,2$， $k,l=1,2,\cdots,K$)的单边 ZCW $\tau_w^g\ge M(\tau_w-1)+1$，当 $R_{k,l}^{\boldsymbol{h}}(1-M)\ne0$ 时等号成立。

证明 根据相关的对称性，只需考虑 $\tau\ge0$ 的情况。从 $\boldsymbol{X}$ 中任意取两个码字，假设是 $\boldsymbol{x}_{iK+k}=[\boldsymbol{c}_i\otimes\boldsymbol{h}_k,\ \boldsymbol{s}_i\otimes\boldsymbol{h}_k]$ 和 $\boldsymbol{x}_{jK+l}=[\boldsymbol{c}_j\otimes\boldsymbol{h}_l,\ \boldsymbol{s}_j\otimes\boldsymbol{h}_l]$ (i, j=1, 2 且 $i\ne j$；k, l=1, 2 ,⋯, K)。令 $\tau=M\tau_1+\tau_2$，$0\le\tau_1<N$，$0\le\tau_2<M$，$0\le\tau<NM$，且都是整数。令

$$R_{i,j}^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}(\tau_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=\tau_1+1}^{N}(c_{i,n}c_{j,n-\tau_1}^*+s_{i,n}s_{j,n-\tau_1}^*), i\ne j,0\le\tau_1<N\\[2ex] \dfrac{1}{2N}\displaystyle\sum_{n=1}^{N+\tau_1}(c_{i,n}c_{j,n-\tau_1}^*+s_{i,n}s_{j,n-\tau_1}^*), i\ne j,-N<\tau_1<0\end{cases}$$

单边窗口宽度为

$\tau_w=\arg\min\limits_{\substack{\tau_1\\0\le\tau_1<N}}\left[R_{i,j}^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}(\tau_1)\ne0\right]$，即 $R_{i,j}^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}(\tau_1)=0,\tau_1<\tau_w$。

并记相关函数

$R_{k,l}^{\boldsymbol{h}}(\tau_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=\tau_2+1}^{M}h_{i,m}h_{j,m-\tau_2}^*, & 0\le\tau_2<M\\[2ex] \dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{m=1}^{M+\tau_2}h_{i,m}h_{j,m-\tau_2}^*, & -M<\tau_2<0\end{cases}$，则 $\boldsymbol{x}_{iK+k}$ 和

$\boldsymbol{x}_{jK+l}$ ($i,j=1,2$， $k,l=1,2,\cdots,K$)的相关函数。

$$\begin{aligned}R^{\boldsymbol{x}}_{iK+k,jK+l}(\tau)&=\frac{1}{2MN}\sum_{m=\tau+1}^{MN}\Big[x_{iK+k,m}x^*_{jK+l,m-\tau_1}+x_{iK+k,m}\\&\quad\cdot x^*_{jK+l,m-\tau_1}\Big]\\&=\frac{1}{2NM}\left[\sum_{n=\tau_1+1}^{N}(c_{i,n}c^*_{j,n-\tau_1}+s_{i,n}s^*_{j,n-\tau_1})\right.\\&\quad\cdot\sum_{m=\tau_2+1}^{M}h_{k,m}h^*_{l,m-\tau_2}+\sum_{n=\tau_1+1}^{N-1}(c_{i,n}c^*_{j,n-\tau_1}\\&\quad+s_{k,n}s^*_{j,n-\tau_1})\sum_{m=1}^{\tau_2}h_{k,m}h^*_{l,M+m-\tau_2}\\&=R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1)R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(\tau_2)+R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1+1)R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(\tau_2-M)\end{aligned}$$

利用 $R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1)=0,\tau_1<\tau_w$，得

$$R^{\boldsymbol{x}}_{iK+k,jK+l}(\tau)=\begin{cases}R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1)R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(\tau_2)+R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1+1)R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(\tau_2-M),\\ \qquad\tau_w\le\tau_1,\quad 0<\tau_2<M\\ R^{(\boldsymbol{c},\boldsymbol{s})}_{i,j}(\tau_1+1)R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(\tau_2-M),\\ \qquad\tau_1=\tau_w-1,\quad 0<\tau_2<M\\ 0,\quad\tau_1=\tau_w-1,\quad\tau_2=0\\ 0,\quad 0\le\tau_1<\tau_w-1,\quad 0\le\tau_2<M\end{cases}$$

即，组间码字单边窗口 $\tau^g_w\ge M(\tau_w-1)+1$，当 $R^{\boldsymbol{h}}_{k,l}(1-M)\ne 0$ (k, l=1,2,$\cdots$, K)时等号成立。　　证毕

理论上，扩展矩阵 $\boldsymbol{H}$ 可以是任意形式的矩阵，当 $\boldsymbol{H}$=1 时即没有扩展的码字。为了增加码字个数，在给定列数 M 的情况下，希望矩阵行数 K 尽可能大，当 K 大于 M 时各行肯定不都正交，若各行有 ZCW，矩阵扩展的码字增加量还不如用二叉树构造，一般可以将扩展矩阵 $\boldsymbol{H}$ 设计成正交的。实际上，扩展矩阵构造及其元素的设计是另一个有意义的课题，这里不再分析。

为说明码的构造过程， 举例如下。已知互补对(＋＋－＋，＋－－－)和(－＋＋＋，－－＋－)为一对 ZCW 为[-1,1]的互补码，将这两个码字分别与一个二阶 Hadamard 矩阵直积，可得到两组码字：(＋＋＋＋－－＋＋，＋＋－－－－－－)和(＋－＋－－＋＋－，＋－－＋－＋－＋)， (－－＋＋＋＋＋＋，－－－－＋＋－－)和(－＋＋－＋－＋－，－＋－＋＋－－＋)。可以验证，两组之间 ZCW 为[-2,2]。这样既使得窗口加倍，又使得码字个数加倍，这为多径信道下的 CDMA 系统设计提供更多可用码字。

4　结束语

给出并证明了 ZCW 互补码的二叉树构造方法，为了增加可用的码字数目，将之推广为组内有一定相关性但组间仍然有 ZCW 的扩频码。从另一方面看，也可以认为 ZCW 互补码是组间互补码扩展矩阵为 1 的情况，而 Walsh 序列则是 ZCW 互补码窗口宽度为 1 的情况。

参 考 文 献

[1] Viterbi A J. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communications. MA: Addison-Wesley, 1995. chapter 1.

[2] 徐绍君，李道本. LS码与Walsh码的上行链路容量比较. 电子与信息学报, 2004, 26(12): 1978–1983.
Xu Shao-jun and Li Dao-ben. Uplink capacity comparison between LS code and Walsh code. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2004, 26(12): 1978–1983.

[3] Fan P Z, Suehiro N, Kuroyanagi N, and Deng X M, A class of binary sequences with zero correlation zone. *Electronics Letters*, 1999, 35(10): 777–779.

[4] Li D B. A spread spectrum multiple access coding method with zero correlation window [P]. PCT/CN00/00028, 2000.

[5] Tang X H and Fan P Z. Bounds on aperiodic and odd correlations of spreading sequences with low and zero correlation zone. *Electronics Letters*, 2001, 37(19): 1201–1203.

[6] Fan P Z and Darnell M. Sequence Design for Communications Applications. London, U.K.: Research Studies Press Ltd, 1996, chapter 13.

[7] 徐绍君，高岩，李道本. 具有零相关窗的通用序列. PCT/CN02/00193, 2002.

孙宇昊：　男，1978年生，博士生，研究方向为信息与信号处理、移动通信.

邹永忠：　男，1969年生，讲师，研究方向为信息与信号处理、信道编码、移动通信.

张玉艳：　女，1964年生，副教授，研究方向为信息与信号处理、移动通信、分布式网络.

李道本：　男，1939年生，教授，博士生导师，研究方向为信息论、信息与信号处理.