

QPSK 数字接收机中的 SNR 估计的新方法

付文君^{①②} 姜景山^① 王拴荣^① 刘思昱^①

^①(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100080)

^②(中国科学院研究生院 北京 100039)

摘要:通过对基于判决反馈的信噪比最大似然估计推导过程的分析,得出:判决反馈最大似然估计得到的估计值是有偏估计;利用基带数据的高阶矩特性,可以获得渐近无偏估计。该文提出了两种新的 SNR 的迭代求解方法。一种是基于 NDA(Non-Data-Aided)最大似然估计的梯度迭代求解方法,这种方法与其它迭代方法相比,具有更好的收敛性能。另一种是基于统计参量的迭代方法,它不需要对输入数据进行存储;而且在相同的信噪比估计性能下,与其它迭代运算相比,运算量大大降低,尤其适合于低信噪比下信噪比估计要求高的应用中。最后,文章对比了几种 SNR 估计子的性能与运算量。

关键词: 卫星通信; 最大似然估计; SNR 估计; QPSK; 数字接收机

中图分类号: TN911.23, TN927

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)02-0255-05

New SNR Estimation Methods in Digital QPSK Receiver

Fu Wen-jun^{①②} Jiang Jing-shan^① Wang Shuan-rong^① Liu Si-yu^①

^①(Center for Space Science and Application Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

^②(Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: SNR maximum likelihood estimator based on data directed decision was evaluated first, and was concluded as a biased estimator. An unbiased estimator can be acquired through high order moments of received data. Two SNR estimators based on iteration method were developed in this paper. One is solving the QPSK NDA maximum likelihood equation by gradient approximation, which has better convergence performance than other methods. The other is based on the statistical parameters of received data, which not only makes received data buffering unnecessary, but also reduces iteration calculation greatly compared with other iteration methods, and more important, not at the cost of estimation performance degradation. Finally, the result of several SNR estimators in performance and calculation were compared and analyzed.

Key words: Satellite communications; Maximum likelihood estimation; SNR estimation; Quadrature Phase-Shift Keying(QPSK); Digital receiver

1 引言

信噪比估计在数字接收机系统的设计、仿真与使用上都起着重要的意义。在接收机的设计与仿真阶段,考察所设计接收机在各方面的性能都离不开对接收信道信噪比的准确估计。在通信系统的实际使用中,信噪比的估计作为表征信道特性的参数,对信道切换、自适应通信速率调节、发射端功率调节等功能都起到了重要的作用。

AWGN 信道下对于信噪比的估计存在着多种方法。文献[1]将各种 SNR 估计方法归为四类,并对各自性能进行了分析。该文给出的仿真结果表明:对于基于数据辅助(Data Aided, DA)的最大似然估计方法具有最优的性能;而基于数据判决导向(data Decision Directed, DD)的最大似然方法在信噪比较高时性能与前者接近,在较低的信噪比下性能很

差。

在许多连续传输的应用中,基于效率的原因,加入辅助数据前导头的方法较少采用,而且这种方法也只能给出发送辅助数据时的信道状态,不能实时反映出信道的真实变化情况。随着深空通信、卫星通信接收机中解调门限的下降,在低信噪比下获得精确的信噪比估计值显得越来越重要。文献[2]针对最大似然估计方法的缺陷,提出了一种多项式逼近的方法,在[-5, 12]dB 范围内得到了较为精确的信噪比估计值。

随着接收机处理能力的提升,采用更为复杂的算法实现对 SNR 更精确的估计成为可能。文献[3,4]提出了根据 NDA(Non-Data Aided)最大似然准则迭代求解 SNR 的方法,得到了低信噪比下较小偏差的信噪比估计。本文也同样基于 NDA 最大似然估计,提出了一种梯度迭代求解方法,与前面两种迭代方法相比,具有更好的收敛性能。同时,本文还提出了一种新的基于统计参量的迭代方法,它在迭代过程中不需要对输入数据存储;在相同的信噪比估计性能条件下,大

大降低了迭代运算的复杂度。

2 数字接收机中 SNR 估计的方法

2.1 最大似然估计方法

QPSK 数字接收机如果采用匹配滤波器, 并且具有理想的时序同步与载波同步, 则得到两路基带正交信号:

$$\begin{cases} R_I(k) = A \cdot m_i + n_I(k) \\ R_Q(k) = A \cdot m_j + n_Q(k) \end{cases} \quad (1)$$

式中 A 为信号强度, $n_I(k), n_Q(k)$ 分别为等效的基带噪声, 其均值为零, 方差为 σ^2 ; m_i, m_j 为分别为 I, Q 两路传输的二进制信息, 取值为 ± 1 。接收信号的概率密度分布是二维的, 两个支路相互独立。

接收序列的对数似然函数可以写作

$$\begin{aligned} L_N(r_1, r_2, \dots, r_N | A, \sigma) \\ = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) \\ + \frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^N (r_{ik} - m_{ik}A)^2 + \sum_{k=1}^N (r_{qk} - m_{qk}A)^2 \right] \end{aligned} \quad (2)$$

对数似然函数对 A 取导数, 并令其等于 0, 得到 DA 形式下的信噪比为

$$\begin{aligned} \text{SNR} &= \frac{A^2}{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_{ik}^2 - A^2} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (m_{ik}r_{ik} + m_{qk}r_{qk}) \right]^2}{\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + r_{qk}^2) - \left[\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (m_{ik}r_{ik} + m_{qk}r_{qk}) \right]^2} \end{aligned} \quad (3)$$

这就是基于 DA 的 SNR 最大似然估计。

对于不采用辅助数据前导头的数据接收机而言, m_{ik}, m_{qk} 均为未知量, 如果用判决后的 $\hat{m}_{ik}, \hat{m}_{qk}$ 代替 m_{ik}, m_{qk} 时, 可以得到基于数据判决导向(DD)的 SNR 最大似然估计。对于硬判决而言, 有

$$\hat{m}_{ik} = \text{sgn}(r_{ik}), \quad \hat{m}_{qk} = \text{sgn}(r_{qk}) \quad (4)$$

代入式(3), 得到

$$\text{SNR} = \frac{\left[\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (|r_{ik}| + |r_{qk}|) \right]^2}{\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + r_{qk}^2) - \left[\frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (|r_{ik}| + |r_{qk}|) \right]^2} \quad (5)$$

上式即基于判决导向(DD)的 SNR 最大似然估计子, 这里称之为 ML-DD 方法。

当 $N \rightarrow \infty$ 时,

$$\text{SNR} = \frac{\left[u(|r_{ik}|) + u(|r_{qk}|) \right]^2}{2 \left[m_2(r_{ik}) + m_2(r_{qk}) \right] - \left[u(|r_{ik}|) + u(|r_{qk}|) \right]^2} \quad (6)$$

其中 $u(x)$ 为 x 的均值, $m_2(x)$ 为 x 的二阶矩。由于

$$u(|r_{jk}|) = A \cdot \text{erf}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma e^{-A^2/(2\sigma^2)} \quad (7)$$

$$m_2(|r_{jk}|) = A^2 + \sigma^2 \quad (8)$$

式(7)中 $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ 。进而得到

$$\text{SNR} = \frac{\left[A \cdot \text{erf}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma e^{-A^2/(2\sigma^2)} \right]^2}{A^2 + \sigma^2 - \left[A \cdot \text{erf}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma e^{-A^2/(2\sigma^2)} \right]^2} \quad (9)$$

令 $\text{SNR}_{\text{real}} = A^2/\sigma^2$, 为信噪比的真值。代入式(11), 得到 SNR 估计值与真值的关系为

$$\text{SNR} = \frac{\left[\sqrt{\text{SNR}_{\text{real}}} \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_{\text{real}}}{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\text{SNR}_{\text{real}}}{2}} \right]^2}{1 + \text{SNR}_{\text{real}} - \left[\sqrt{\text{SNR}_{\text{real}}} \text{erf}\left(\sqrt{\frac{\text{SNR}_{\text{real}}}{2}}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\text{SNR}_{\text{real}}}{2}} \right]^2} \quad (10)$$

可见, ML-DD 方法得到的 SNR 是信噪比真值的有偏估计。

2.2 SNR 高阶矩估计方法

之所以式(12)得到的信噪比估计值是有偏的, 是因为对式(9)做了近似:

$$u(|r_{jk}|) \approx A \quad (11)$$

从而有

$$\text{SNR} \approx \frac{A^2}{A^2 + \sigma^2 - A^2} = \frac{A^2}{\sigma^2} = \text{SNR}_{\text{real}} \quad (12)$$

当信噪比较低时, 式(11)的近似误差增大, 使得 ML-DD 的估计值偏差增大。

利用 r_{jk} 的高阶矩可以得到 A 值的精确表达, 从而求得 SNR 的无偏估计。取 $y_k = r_{ik}^2 + r_{qk}^2$, 其均值、二阶矩分别为:

$$E(y) = 2(\sigma^2 + A^2) \quad (13)$$

$$m_2(y) = 8\sigma^4 + 16\sigma^2 A^2 + 4A^4 \quad (14)$$

求解可得到

$$\text{SNR} = \frac{A^2}{\sigma^2} = \frac{E_y \sqrt{2E_y^2 - m_{2y}} + 2E_y^2 - m_{2y}}{m_{2y} - E_y^2} \quad (15)$$

在实现中,

$$E_y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + r_{qk}^2) \quad (16)$$

$$m_{2y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + r_{qk}^2)^2$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 式(15)计算的 SNR 是无偏估计。这种方法在文献[1]中称为 M2-M4 方法。

2.3 迭代法

2.3.1 基于NDA(Non-Data-Aided)的最大似然迭代求解 近些年,随着深空通信、卫星通信接收机解调门限的下降,也对低信噪比下的信噪比估计性能提出了更为严格的要求。Wiesel^[4], Li^[3]等人先后提出了SNR估计的迭代求解方法,它们都基于NDA最大似然估计准则。

假设传输信息是等概率分布的,则 I、Q 两路基带数据的概率密度分布为

$$p(r_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-(r_j^2 + A^2)/(2\sigma^2)} \cosh\left(\frac{r_j A}{\sigma^2}\right) \quad (17)$$

长度为 N 的接收序列的对数似然函数可以写作

$$\begin{aligned} L_N(r_1, r_2, \dots, r_N | A, \sigma) \\ = -N \ln(2\pi\sigma^2) + \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + 2A^2 + r_{qk}^2) \\ + \sum_{k=1}^N \ln \cosh\left(\frac{r_{ik} A}{\sigma^2}\right) + \sum_{k=1}^N \ln \cosh\left(\frac{r_{qk} A}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

对 A 求偏导,并令其等于0,得到

$$A = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[r_{ik} \tanh\left(\frac{Ar_{ik}}{\sigma^2}\right) + r_{qk} \tanh\left(\frac{Ar_{qk}}{\sigma^2}\right) \right] \quad (19)$$

其中

$$\sigma^2 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (r_{ik}^2 + r_{qk}^2) - A^2 = m_2 - A^2 \quad (20)$$

式(19)的迭代求解可以采用多种方法。文献[3]采用了二分法求解下式的根:

$$\begin{aligned} g(A) = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[r_{ik} \tanh\left(\frac{Ar_{ik}}{m_2 - A^2}\right) + r_{qk} \tanh\left(\frac{Ar_{qk}}{m_2 - A^2}\right) \right] - A \\ = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

具体求解过程如下:

(1) 设定 A_{\min} , A_{\max} ;

(2) 取 $A_i = (A_{\min} + A_{\max})/2$;

(3) 代入式(19)得到 A_{i+1} , 如果 $A_{i+1} > A_i$, 取 $A_{\min} = A_i$; 否则取 $A_{\max} = A_i$, 进行第2步, 直到指定的迭代次数完成;

(4) 计算 $\frac{A_{i+1}^2}{m_2 - A_{i+1}^2}$, 得到SNR。

文献[4]采用如下迭代方法求解:

$$A_0 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [|r_{ik}| + |r_{qk}|] \quad (22)$$

$$A_{k+1} = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[r_{ik} \tanh\left(\frac{A_k r_{ik}}{m_2 - A_k^2}\right) + r_{qk} \tanh\left(\frac{A_k r_{qk}}{m_2 - A_k^2}\right) \right] \quad (23)$$

本文提出用梯度法求解式(21)的根。得到

$$A_0 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [|r_{ik}| + |r_{qk}|] \quad (24)$$

$$A_{k+1} = A_k - \frac{g(A_k)}{g'(A_k)} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} g'(A_k) = \frac{A^2(3m_2 - A_k^2)}{(m_2 - A_k^2)^2} - \frac{(m_2 + A_k^2)}{(m_2 - A_k^2)^2} \\ \cdot \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \left[r_{ik}^2 \tanh^2\left(\frac{A_k r_{ik}}{m_2 - A_k^2}\right) \right. \\ \left. + r_{qk}^2 \cdot \tanh^2\left(\frac{A_k r_{qk}}{m_2 - A_k^2}\right) \right] \end{aligned} \quad (26)$$

仿真结果表明,二分法要迭代10次才能达到较好的性能,而梯度法只需要4次即可。

2.3.2 基于统计参量的新迭代方法 前面提到的迭代方法都是基于式(19)。这些方法在每一次迭代过程中都需要 N 次运算;并且需要存储输入数据以便于后续迭代步骤中使用。当 N 值较大时,运算量和存储量都大大增加。本文基于式(5),式(6)的求解提出了一种新的迭代求解方法。这种方法只需要得到一次的统计参量,在以后的每次迭代中不再进行统计运算。由式(7),式(8)得到

$$\begin{aligned} f(A) = A \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{A}{\sqrt{2(m_2 - A^2)}}\right) + \sqrt{\frac{2(m_2 - A^2)}{\pi}} e^{-\frac{A^2}{2(m_2 - A^2)}} \\ - u(|r_{jk}|) = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

采用梯度法求解上式,得到

$$A_0 = \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N [|r_{ik}| + |r_{qk}|] \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_{k+1} = - \frac{m_2 \sqrt{\frac{2}{\pi(m_2 - A_k^2)}} e^{-A_k^2/[2(m_2 - A_k^2)]} - A_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{A_k}{\sqrt{2(m_2 - A_k^2)}}\right) - A_k \sqrt{\frac{2}{\pi(m_2 - A_k^2)}} e^{-A_k^2/[2(m_2 - A_k^2)]}} \end{aligned} \quad (29)$$

由(29)式可以看出,迭代中只用到一次的统计参量,不需要每次迭代都进行统计参量的计算,也不需要存储输入数据。求解算法的运算量大为减小,对于 N 取值较大(要求低的信噪比估计偏差)的应用,运算量的降低尤为明显。仿真结果还表明:新方法的收敛速度很快,迭代3次即可达到良好的性能。

3 仿真结果

3.1 性能评估方法

我们重点考察多种SNR估计子在低信噪比下的性能,考察的SNR区间设定为 $[-3, 7]$ dB。为了评估各种方法的性能,我们采用数值仿真求得各种估计子(对数形式)的估计方差

$$\operatorname{Var} = -\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [10 \log(\operatorname{SNR}_{\text{est}}) - 10 \log(\operatorname{SNR}_{\text{real}})]^2 \quad (30)$$

式中 $\operatorname{SNR}_{\text{real}}$ 是信噪比的真实值, $\operatorname{SNR}_{\text{est}}$ 是各种方法得到的估计值。实验中取样次数 M 取值为4000次。

由于ML-DD方法在低信噪比下的性能差很多,这里没有将其列为比较对象。多项式拟合方法采用了参考文献[2]中提供的五阶多项式。在参考文献[3]提出的最大似然二分法迭代求解中,选择迭代次数 $K=10$,初始值 $A_{\min} = 0.1$, $A_{\max} = 10$,对应SNR估计范围为 $(-20, 20)$ dB;对参考文献[4]中的迭代求解方法分别采用了迭代次数 $K=5, 10$ 两种情况描述算法性能;在本文提出的梯度逼近迭代求解NDA最大似然估计的方法中,选择迭代次数 $K=4$;在本文提出的基于统计参量的迭代方法中选择迭代次数 $K=3$ 。

为了更好地比较各种估计子的性能,我们将这些估计子的方差与文献[5]给出的NDA QPSK SNR估计的Cramer-Rao界进行了对比。

仿真实验给出了上述各种方法在输入数据长度为 $N=256$, $N=1024$ 和 $N=4096$ 情况下的信噪比估计方差。

3.2 性能评估结果

图1给出了 $N=256$ 时,各种SNR估计子的性能。可以看出,文献[4]中的方法具有最好的性能。 $K=10$ 时的估计方差接近QPSK NDA的Cramer-Rao下界, $K=5$ 时的估计方差在小于1dB时有显著增加,但仍然仅次于 $K=10$ 时的性能。M2-M4方法在较高信噪比(>0 dB)下的方差大于所有其它方法。本文提出的两种方法:基于NDA最大似然估计的梯度迭代方法(ML-NDA GA)和基于统计参量的迭代方法与文献[2]中的多项式拟合方法在 $[-3, 7]$ dB范围内性能接近。基于NDA最大似然估计的二分法迭代^[3]在低信噪比(<0 dB)下性能最差。

图2给出了 $N=1024$ 时,各种SNR估计子的性能。随着 N 值的增大,文献[4]中的方法相对其它方法性能下降,5次迭代的结果在低信噪比下性能最差;10次迭代的结果与其它除M2-M4外的方法性能都很接近;这说明文献[4]中的方法与其它方法相比,随着 N 值增大,估计性能的提高并不显著。

当 N 值增加到4096时,本文提出的两种方法与基于NDA最大似然估计的二分法迭代具有最好的性能,如图3所示。文献[4]中的方法成为低信噪比下性能最差的方法;说明该方法随着 N 值的增大,迭代次数也必须相应增加才能在低信噪比下得到好的估计性能。这一点可以从图4中看出。

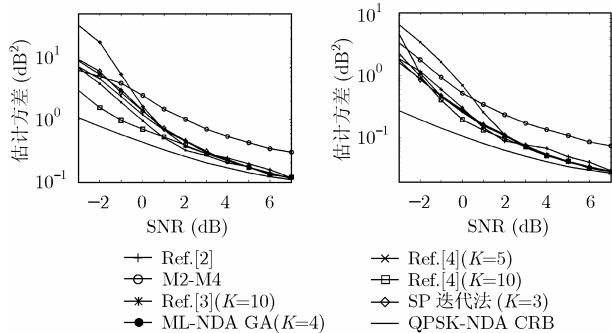


图1 $N=256$ 的SNR估计方差比较

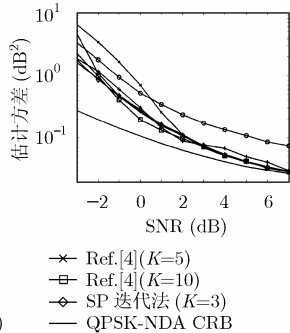


图2 $N=1024$ 的SNR估计方差比较

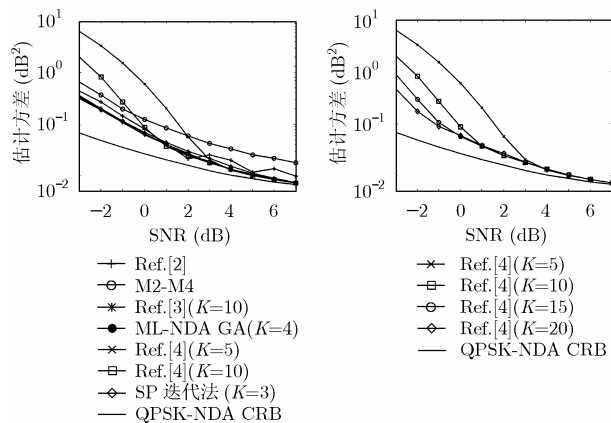


图3 $N=4096$ 的SNR估计方差比较

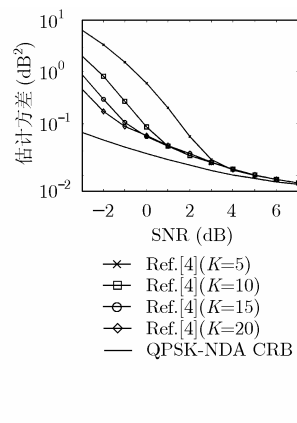


图4 不同迭代次数的文献[4]估计方差比较

文献[2]中的多项式拟合方法在高信噪比下性能稍差于各种迭代方法,但是在低信噪比下具有较好的性能。

仿真结果表明:文献[4]中的方法由于每次迭代都对输入数据进行统计平均,对噪声数据不敏感,在输入数据较短时具有良好的估计性能;但是随着 N 值的增大,要取得良好的估计性能,迭代次数也应相应增多,运算量随之大大增加。其它3种迭代方法都对数据噪声敏感,随着迭代次数的增加,估计性能改善有限,而通过增大 N 值,来降低统计参数的噪声反而是提高性能更好的途径。

3.3 迭代方法的运算复杂度比较

从前面迭代公式的推导中可以看出,基于NDA最大似然估计的3种迭代方法(文献[3, 4]中的方法,和本文提出的梯度逼近方法)的运算量与迭代次数 K 和输入数据块长度 N 成正比。这3种方法中,在相同的估计性能情况下(以 $N=1024$ 为例),梯度逼近方法需要最少的迭代次数,为4次,而其它两种方法都需要10次迭代。

而本文提出的基于统计参量的迭代方法的运算量只与迭代次数 K 成正比,从而使得迭代算法的运算量大大降低,在 N 值取值较大的应用中,尤为明显。如果定义式(21),式(23),式(26)中累加项的一次运算为各自算法的基本运算单元,则在相同的估计性能情况下(以 $N=1024$ 为例),统计参量的迭代方法只需要进行3次基本运算(式(29)),其它3种迭代方法分别需要8192(式(19),式(26)的核),10240(式(23)的核),10240(式(19)的核)次基本运算。

4 结束语

本文通过对判决反馈最大似然估计(ML-DD)的推导过程的分析,指出它是信噪比的一种渐进有偏估计;利用接收数据的高阶矩参量,可以得到信噪比的渐进无偏估计,但是在高信噪比区间估计方差稍大。本文提出的两种SNR迭代求解方法都具有良好的估计性能。尤其是基于统计参量的迭代方法,在具有良好SNR估计性能的同时,既不需要对输入数据进行存储,又大大降低了迭代运算的运算量,特别适合于要求低信噪比下具有较高SNR估计性能的应用。

参 考 文 献

- [1] Pauluzzi D R and Beaulieu N C. A comparison of SNR estimation techniques for the AWGN channel. *IEEE Trans. on Communications*, 2000, 48(10): 1681–1691.
- [2] 许华, 樊龙飞, 郑辉. 一种精确的QPSK信号信噪比估计算法. *通信学报*, 2004, 25(2): 55–60.
Xu Hua, Fan Long-fei, and Zheng Hui. A precise SNR estimation algorithm for QPSK signals. *Journal on Communications*, 2004, 25(2): 55–60.
- [3] Li B, DiFazio R, and Zeira A. A low bias algorithm to estimate negative SNRs in an AWGN channel. *IEEE Communications Letters*, 2002, 6(11): 469–471.
- [4] Wiesel A, Goldberg J, and Messer H. Non-data-aided signal-to-noise ratio estimation. Proc. IEEE ICC2002, New York, Apr. 28–May 2, 2002: 197–201.
- [5] Alagha N S. Cramer-Rao bounds of SNR estimates for BPSK and QPSK modulated signals. *IEEE Communications Letters*, 2001, 5(1): 10–12.
- 付文君: 男, 1973 年生, 副研究员, 在职博士生, 从事机载遥感信息的实时传输与处理, 在卫星通信, 无线数据传输, 遥感图像数据实时压缩领域有研究.
- 姜景山: 男, 1936 年生, 研究员, 中国工程院院士, 国际欧亚科学院院士, 现为中国科学院空间科学与应用研究中心学术委员会主任, 从事微波遥感理论与技术研究近 30 年, 在机载遥感信息实时传输领域具有开创性贡献, 先后有多项科研成果获国家级, 部级, 中科院院级奖励.