基于两种对称频率采样的全相位 FIR 滤波器设计

黄翔东 王兆华
(天津大学电子信息工程学院 天津 300072)

摘 要：该文提出基于两种对称频率采样的全相位 FIR 滤波器设计方法，证明了在无窗和单窗情况下，依据传统对称和偶对称的频率向量设计出的全相位传递曲线分别通过π/N 的偶数倍和奇数倍的数字角频率点，因而全相位滤波器可较精确地控制边界频率。仿真实验证明，这两种类型的全相位滤波器性能优于神经网络方法设计出的滤波器。

关键词：滤波器设计；全相位；偶对称频率向量；频率采样点
中图分类号：TN713^{+}.7 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2007)02-0478-04

All-Phase FIR Filter Design Based on Two Kinds of Symmetric Frequency Sampling

Huang Xiang-dong Wang Zhao-hua
(*School of Electronics and Information Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300072, *China*)

Abstract: This paper presents the all-phase filter design methods based on two kinds of symmetric frequency sampling. Under the condition of no window and single window, it is proved that the all-phase transfer curves designed by conventional symmetry frequency vector and even symmetry frequency vector can pass through the frequency sampling points of odd multiples and even multiples of π/N, respectively. In this way all-phase filter can control critical frequency to a relatively precise extent. Simulation experiment proves that the performances of these two kinds of all-phase filter are superior to that of filter designed by neural network methods.

Key words: Filter design; All-phase; Even symmetry frequency vector; Frequency sampling point

1 引言

直接从频域设计滤波器是现今较常用的 FIR 滤波器设计方法(如窗函数法和频率采样法等),但这样设计出的滤波器由于具有通带起伏大、临界频率成分不易控制的缺点，使得其应用受到很大限制。近年来，出现了很多新的频率域 FIR 滤波器设计法，如神经网络滤波器设计法[1]，遗传算法[2]，免疫算法[3]等等。它们通常的做法是：设定目标频率向量，按照某种最优化准则，通过多次迭代来产生最优的滤波器系数。为了实现线性相位，对于目标频率向量 $\boldsymbol{H}$，必须满足 $H(k)=H(N-k)$的传统对称要求。

本文提出基于两种对称频率采样的全相位 FIR 滤波器设计法[4]，它对目标频率向量的对称限制作了扩展，使得在 $H(k)=H(N-1-k)$的情况下也适用。该方法简单，无需复杂迭代过程，就可设计出通带起伏小、阻带衰减大、截止频率容易控制、具有对称实系数特征的滤波器。

2 全相位滤波基本原理

若给定长度为 N的目标频率向量 $\boldsymbol{H}$，则对 $\boldsymbol{H}$进行 IDFT 可得 $\boldsymbol{h}=[h(0)\ h(1)\cdots h(N-1)]^{\mathrm T}$。假设输入数据为$\cdots x(n-1)\ x(n)\ x(n+1)\cdots$,为实现 N阶全相位滤波，需将所有包含 $x(n)$的长度为 N的数据向量全部进行考虑[5]。很明显，共有 N个包含 $x(n)$的向量，可表示为

$$\boldsymbol{x}_i=[x(n+i)\ \ x(n+i-1)\cdots x(n)\cdots x(n+i-N+1)]^{\mathrm T},\quad i=0,1,\cdots,N-1 \tag{1}$$

相应地，对 $\boldsymbol{h}$ 依次进行循环右移，则可形成 N个子滤波器系数向量，可表示为

$$\boldsymbol{h}_i=[\ h(-i)\ \ h(-i+1)\cdots h(0)\cdots h(-i+N-1)]^{\mathrm T},\quad i=0,1,\cdots,N-1 \tag{2}$$

则每个子滤波器 $\boldsymbol{h}_i$ 在 n 时刻对 $x(n)$滤波的结果为

$$y_i(n)=\boldsymbol{h}_i^{\mathrm T}\boldsymbol{x}_i=\sum_{k=-i}^{N-1-i}h(k)x(n-k) \tag{3}$$

把这些滤波结果相加并求平均，即得全相位滤波输出 $y(n)$

$$y(n)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}y_i(n)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=-i}^{N-1-i}h(k)x(n-k)=\sum_{k=-N+1}^{N-1}w_T(k)x(n-k) \tag{4}$$

式中

$$w_T(k)=\frac{N-|k|}{N},\quad k=-N+1,\cdots,N-1 \tag{5}$$

从式(1)的 N 个数据向量可看出，由于 $x(n)$遍历了数据向量所有的 N 个时刻，即遍历了所有可能存在的 N 个相位，故将该滤波过程命名为全相位滤波过程。而式(4)将各子滤波

2005-07-28 收到，2006-05-29 改回

器的滤波输出进行求和，使得滤波性能得以改善。

为改善滤波性能，对式(3)可用前窗 $\boldsymbol{f}$ 进行数据加窗，或将式(4)的简单叠加改为用某一后窗 $\boldsymbol{b}$ 进行加权叠加。将只用前窗 $\boldsymbol{f}$ 进行数据加窗，或只用后窗 $\boldsymbol{b}$ 进行加权叠加的滤波称为单窗全相位滤波，将既用 $\boldsymbol{f}$ 进行数据加窗又用 $\boldsymbol{b}$ 进行加权叠加的滤波称为双窗全相位滤波，于是加窗后的滤波表达式为

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{N-1} y_i(n) = \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{N-1} b(i)\sum_{k=-i}^{N-1-i} f(k)h(k)x(n-k) \\ &= \frac{1}{C}\sum_{k=-N+1}^{N-1} w_c(k)h(k)x(n-k) \end{aligned} \tag{6}$$

式(6)中 $w_c(k)$ 为卷积窗元素，

$$w_c(k) = b(k) * f(-k), \quad k=-N+1,\cdots,N-1 \tag{7}$$

即为 $\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的卷积，其窗序列长度为($2N$–1)。式(6)中的 C 为归一化因子，大小为

$$C = \sum_{k=0}^{N-1} b(k)f(N-1-k) \tag{8}$$

显然，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{f}$ 同为矩形窗 $\boldsymbol{R}_N$ 时，有 C=N，对应为式(4)的无窗情况，这时相应的卷积窗为式(5)的三角窗 $\boldsymbol{W}_T$。

式(6)表明，N 阶全相位滤波可等价于一($2N$–1)阶的 FIR 滤波过程。

3　传统对称频率向量设置下的全相位滤波器设计

3.1　设计步骤

传统对称频率向量 $\boldsymbol{H}$ 要求满足以下对称特征：

$$H(k) = H(N-k), \qquad 1 \le k \le N-1 \tag{9}$$

因而根据 IDFT 计算出的 $\boldsymbol{h}$ 为实系数向量。则由式(6)可得：对应的全相位 FIR 系数 $g(n)$表达式为

$$g(n) = \frac{1}{C} w_c(n)\cdot h(n), \quad -N+1 \le n \le N-1 \tag{10}$$

根据式(2)，式(7)，式(8)，式(10)，将其等价的全相位 FIR 滤波设计步骤总结如下：

(1) 将经 IDFT 产生的 $\boldsymbol{h}$ 进行一周期延拓，形成($2N$–1)长度的向量 $\boldsymbol{h}'=[h(-N+1)\cdots h(0)\cdots h(N-1)]^{\mathrm{T}}$。

(2) 将前窗 $\boldsymbol{f}$，后窗 $\boldsymbol{b}$ 进行卷积，生成卷积窗 $\boldsymbol{w}_c$。

(3) 将 $\boldsymbol{h}', \boldsymbol{w}_c$ 对应元素相乘即得等效的 FIR 滤波器系数 $g(n)$。

3.2　基本性质及其理论分析

得到式(10)的 FIR 系数后，很容易求取全相位滤波器的传输函数 $G(e^{jw})$：

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} g(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-N+1}^{N-1} w_c(n)\cdot h(n)\cdot e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-N+1}^{N-1} w_c(n)\cdot\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)e^{j2\pi kn/N}\right]\cdot e^{-jn\omega} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\sum_{n=-N+1}^{N-1} w_c(n)e^{-jn(\omega-2k\pi/N)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\cdot W_c[j(\omega-2k\pi/N)] \end{aligned} \tag{11}$$

式中 $W_c(jw)$ 为卷积窗频谱，式(11)中表明，$G(e^{jw})$ 可表示为频率采样向量与卷积窗频谱的离散卷积。也就是说，全相位滤波器的传递函数可由频率采样值内插实现，其内插函数即为卷积窗的频谱函数。

为推导 $W_c(jw)$ 其具体形式，对式(7)两边取傅氏变换，根据时域卷积定理有

$$W_c(j\omega) = B(j\omega)\cdot F(-j\omega) = B(j\omega)\cdot F^*(j\omega) \tag{12}$$

式(12)表明，$W_c(jw)$ 为前后窗频谱的共轭乘积。易推知，该乘积结果必使得内插函数主瓣更突出，旁瓣衰减增大。

众所周知，频率采样法设计的滤波器传递函数的内插函数为矩形窗的频谱函数。一般的窗函数，如汉明窗，Bartlett 窗，其第一旁瓣衰减大于矩形窗的第一旁瓣衰减，因此在同样的频率采样情况下，全相位滤波器的性能好于频率采样法。

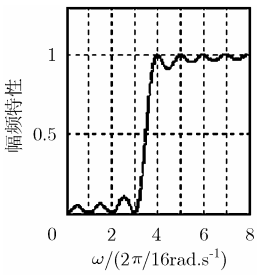
另外，当为无窗和单窗的情况时，前窗 $\boldsymbol{f}$，后窗 $\boldsymbol{b}$ 中至少其一为矩形窗 $\boldsymbol{R}_N$，而矩形窗频谱函数在 $2k\pi/N$ 满足[6]

$$W_R\left[j(\omega-2k\pi/N)\right] = \begin{cases} 1, & \omega = 2k\pi/N \\ 0, & \omega = 2i\pi/N, i \ne k \end{cases} \tag{13}$$

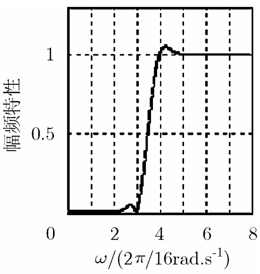
从而用式(8)对卷积窗 $\boldsymbol{w}_c$ 作归一化后，根据式(12)有

$$W_c\left[j(\omega-2k\pi/N)\right] = \begin{cases} 1, & \omega = 2k\pi/N \\ 0, & \omega = 2i\pi/N, i \ne k \end{cases} \tag{14}$$

因而结合式(11)可得：无窗和单窗全相位滤波器传递曲线严格通过频率设置点 $2k\pi/N$。如图 1 所示，从 $\boldsymbol{H}$=[0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0　0]$^{\mathrm{T}}$ 时的无窗和单窗(加汉明窗)的全相位高通滤波器传递曲线可看出，它们均严格通过设置点。



(a) 无窗传递曲线



(b) 单窗传递曲线

图 1　无窗和单窗全相位滤波器传递曲线（N=16）

正是具备此性质，全相位法可把滤波器边界频率严格控制在 $2\pi/N$ 范围内，通过适当选择窗函数，可把设置点之间的传输曲线的起伏尽量控制得小。

4　偶对称频率向量设置下的全相位滤波器设计

全相位滤波器的频采点实际并不受限于 $2k\pi/N$，它还可在$(k+0.5)2\pi/N$ 处作出选择，这是以往频率域设计滤波器法所不具备的。下面来研究满足式(15)设置的偶对称频率向量 $\boldsymbol{H}$ 下全相位滤波性质。

$$H(k) = H(N-1-k), \quad k=0,1,\cdots,N-1 \tag{15}$$

4.1　设计原理及其设计步骤

(1)当 N=$2M$ 为偶数时，令 $W_N = e^{-j2\pi/N}$，对 $\boldsymbol{H}$ 进行

IDFT 可得

$$\begin{aligned}h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\left[W_N^{-kn} + W_N^{-(N-1-k)n}\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\left[W_N^{-kn} + W_N^{(k+1)n}\right] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} H(k)W_N^{\frac{n}{2}}\left[W_N^{\left(-k-\frac{1}{2}\right)n} + W_N^{\left(k+\frac{1}{2}\right)n}\right] \\ &= \frac{2W_N^{\frac{n}{2}}}{N}\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\cos\left[\frac{(2k+1)n\pi}{N}\right], \\ & n = 0,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{16}$$

(2)当 N=2M+1 为奇数时，则有

$$\begin{aligned}h(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)W_N^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\left[W_N^{-kn} + W_N^{-(N-1-k)n}\right] \\ &= \frac{1}{N}\left\{\left[\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\left(W_N^{-kn} + W_N^{-(N-1-k)n}\right)\right] + H(M)W_N^{-Mn}\right\} \\ &= \frac{W_N^{\frac{n}{2}}}{N}\left\{\left[\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\left(W_N^{-\left(k+\frac{1}{2}\right)n} + W_N^{\left(k+\frac{1}{2}\right)n}\right)\right]\right. \\ &\quad \left. + H(M)W_N^{-\left(M+\frac{1}{2}\right)}\right\} \\ &= \frac{W_N^{\frac{n}{2}}}{N}\left\{\left[\sum_{k=0}^{M-1} 2H(k)\cos\frac{(2k+1)n\pi}{N}\right] + H(M)(-1)^n\right\}, \\ & n = 0,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{17}$$

将式(16)，式(17)中的 n 扩展到能取负数的情况，均有

$$h(-n) = h(N-n) = h^*(n), \quad n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{18}$$

把 $\boldsymbol{h}$ 中除直流项外的元素进行周期延拓，可得 $\boldsymbol{h}'$= $[h(-N+1)h(-N+2)\cdots h(-1)\,h(0)\,h(1)\cdots h(N-2)h(N-1)]^{\mathrm{T}}$。

式 (16) 和 式 (17) 表 明 ， $h(n)$ 只 需 乘 以 一 相 移 量 $v(n)=W_N^{-n/2}$ 即可得实系数。于是定义一(2N−1)长度的相移向量 $\boldsymbol{v}$ 为

$$\boldsymbol{v} = \left[W_N^{(N-1)/2}\cdots W_N^{1/2} \quad 1 \quad W_N^{-1/2}\cdots W_N^{-(N-1)/2}\right]^{\mathrm{T}},$$
$$v(n) = W_N^{-n/2} \tag{19}$$

于是基于偶对称频率采样的全相位 FIR 滤波器设计也分为 3 步，前 2 步与传统对称频率采样情况相同，第 3 步只需改为：将 $\boldsymbol{h}'$，卷积窗 $\boldsymbol{w}_c$，相移向量 $\boldsymbol{v}$ 对应元素相乘即得 FIR 滤波器系数 $g(n)$，可表示如下：

$$g(n) = w_c(n)\cdot v(n)\cdot h'(n)$$
$$= \begin{cases} \dfrac{2w_c(n)}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} H(k)\cos\left(\dfrac{(2k+1)n\pi}{N}\right), & N=2M \\ \dfrac{w_c(n)}{N}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{M-1} 2H(k)\cos\left(\dfrac{(2k+1)n\pi}{N}\right) + H(M)(-1)^n\right], & \\ N=2M+1, \quad n\in[-N+1,N-1] & \end{cases} \tag{20}$$

式(20)表明，无论 N 取奇数还是偶数，都满足：(1) $g(n)$为实数；(2) $g(n)= g(-n)$，即为中心对称。

4.2 传递函数的理论分析

基于偶对称频率采样的无窗和单窗全相位滤波器频率特性曲线通过频率采样点$(k+0.5)2\pi/N$。可证明如下：

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} g(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=-N+1}^{N-1} w_c(n)h(n)v(n)e^{-jn\omega} \tag{21}$$

代入 $v(n)=e^{jn\pi/N}$，可得

$$\begin{aligned}G(e^{j\omega}) &= \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1} w_c(n)h(n)e^{-j(n\omega+n\pi/N)} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)\sum_{n=-N+1}^{N-1} W_c(n)e^{-j[n\omega-(2k+1)n\pi/N]} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k)W_c\left[j\left(\omega-(k+0.5)\frac{2\pi}{N}\right)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

比较式(11)和式(22)，可发现相比于传统对称设置，基于偶对称频率采样的全相位滤波器的内插函数往右平移了π/N (rad/s)，因此偶对称下的全相位滤波器可以严格通过频率采样点$(k+0.5)2\pi/N \quad (k=0,\cdots,N-1)$。

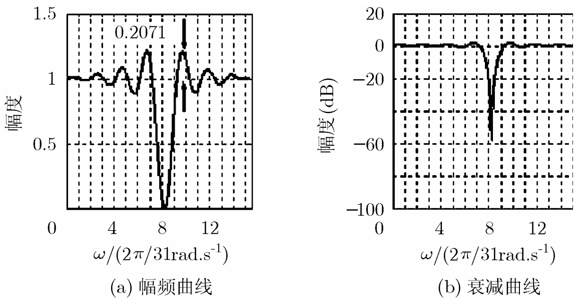
5 仿真实验验证

例 令 N=16，分别在传统对称和偶对称的频率特性设置下，设计陷波点分别为$\pi/2$ 和 $7\pi/16$ 的全相位陷波器，并与新型的 31 阶神经网络设计法做比较。

(1)采用神经网络法设计，将目标频率设计向量设为

$$\boldsymbol{H}_m = \Big[\underbrace{1\cdots1}_{8个} \quad 0 \quad \underbrace{1\cdots1}_{14个} \quad 0 \quad \underbrace{1\cdots1}_{7个}\Big]^{\mathrm{T}}$$

设定全局误差性能指标$J=4.6\times10^{-6}$，迭代步长$\mu=0.002$，经 537 次训练后，得出传递曲线如图 2 所示。



(a) 幅频曲线 (b) 衰减曲线

图 2 神经网络法设计的陷波曲线 (N =31)

(2)采用基于两种对称频率采样的全相位法设计，令

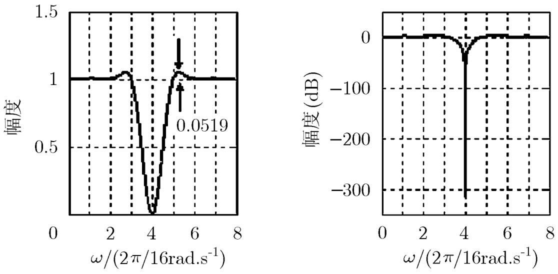
$$\boldsymbol{H}_1 = [\,1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{H}_2 = [\,1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$$

两种全相位滤波器都设为加汉明单窗的形式，则可得出如图 3，图 4 所示的传递曲线。

可见采用神经网络法设计，从幅频曲线可看出，其通带有较大波纹，最大波动幅度为 0.2071；另外从衰减曲线可看出，陷波频率点不能严格控制在目标频率向量指定的

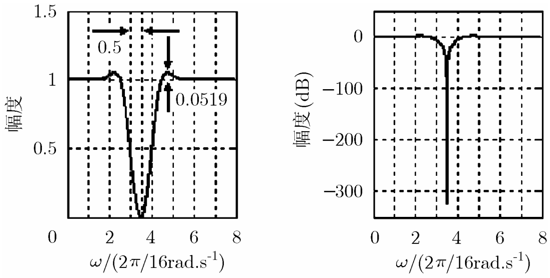
$16\pi/31$ 上，而是稍微偏离该点,阻带最大衰减小于–70dB。

而从全相位陷波曲线可看出，不论是传统对称情况，还是偶对称情况，通带内除一小凸起外，大部分区域都很平缓，最大波动幅度为 0.0519；从衰减曲线可看出，对于传统对称情况，陷波点可以严格控制在角频率 $\omega=4\times2\pi/16=\pi/2$ 上；而对于偶对称情况，陷波点可以严格控制在 $\omega=3.5\times2\pi/16=7\pi/16$ 上。另外，两者的阻带最大衰减都可达–320dB。



(a) 幅频曲线　　(b) 衰减曲线

图 3　基于传统对称频率采样的全相位陷波曲线（$N=16$）



(a) 幅频曲线　　(b) 衰减曲线

图 4　基于偶对称频率采样的全相位陷波曲线（$N=16$）

6　结束语

本文在给定有限采样点数为 N 的情况下，通过将目标频率向量分别设置为传统对称和偶对称的形式，分析比较了两种全相位 FIR 滤波器的设计方法，理论和实验证明在无窗和单窗情况下，这两种全相位滤波频率曲线分别通过 π/N 的偶数倍和奇数倍的数字角频率点。在 FIR 滤波器阶数受限的情况下，采用全相位的滤波器设计方法，可以有 $2N$ 个频率采样点的选择空间，从而有利于控制滤波器的边界频率，而且全相位滤波器法设计方法简单，无需复杂迭代过程，具有较大的实际意义。

参 考 文 献

[1] Bhattacharya D and Antoniou A. Real-time design of FIR filters by feedback neural networks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1996, 5(3): 158–161.

[2] 陈小平，于盛林. 遗传算法在 FIR 滤波器设计——频率样法中的应用[J]. 电子学报, 2000, 10(28): 118–120.

[3] Chen Xiaoping, Qu Bo, and Lu Gang. An application of immune algorithm in FIR filter design[J]. Proceedings of the 2003 International Conference on Neural Networks and Signal Processing, Nanjing, China, Dec, 2003 , Vol.1: 473–475.

[4] 苏飞，王兆华. DFT 域全相位数字滤波器的设计与实现. 信号处理, 2004, 20(3): 231–235.

[5] 王兆华，侯正信，苏飞. 全相位数字滤波.信号处理，2003, 19(增刊): 1– 4.

[6] Proakis J G and Manolakis D G. Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications. [M]. Macmillan, NewYork, NY, third edition, 1996: 104–230.

黄翔东：　男，1979 年生，博士生，研究方向为数字滤波器设计及自适应信号处理等.

王兆华：　男，1937 年生，教授，博士生导师，研究方向为数字图像处理、数字滤波器等.