第 29 卷第 3 期　　电 子 与 信 息 学 报　　Vol.29No.3
2007 年 3 月　　Journal of Electronics & Information Technology　　Mar. 2007

基于高斯短时分数阶傅里叶变换的多分量 LFM 信号检测与参数估计

李家强[①]　　金荣洪[①]　　耿军平[①]　　范　瑜[②]　　毛　炜[①]
[①](上海交通大学电子工程系　上海　200030)
[②](常熟理工学院物理与电子科学系　常熟　215500)

摘　要：该文针对线性调频信号，提出一种基于分数阶波包变换分析方法——高斯短时分数阶傅里叶变换。通过旋转角度的搜索及高斯窗口宽度的调整，能够在低信噪比条件下对多分量 LFM 信号进行检测，避免交叉项的出现，并能得到参数的估计值。通过推导分析给出变换结果的解析表达式，计算机仿真结果也表明了该变换的有效性。

关键词：线性调频信号；分数阶傅里叶变换；信号检测；参数估计
中图分类号：TN911.7　　文献标识码：A　　文章编号：1009-5896(2007)03-0570-04

Detection and Estimation of Multi-component LFM Signals Based on Gauss Short-Time Fractional Fourier Transform

Li Jia-qiang[①]　　Jin Rong-hong[①]　　Geng Jun-ping[①]　　Fan Yu[②]　　Mao Wei[①]
[①](*Dept. of Electronic Eng., Shanghai Jiaotong Univ., Shanghai* 200030, *China*)
[②](*Dept. of Physics and Electronic Science, Changshu Institute of Technology, Changshu* 215500, *China*)

Abstract: Based on fractional wave packet transform, a new hybrid time-frequency transform: Gauss Short-time Fractional Fourier Transform (GSFrFT) is proposed for the detection and estimation of Linear Frequency-Modulated (LFM) signals. Multiple LFM signals can be detected in low SNR by choosing the rotated angle and cross-items can be avoided. Analytical expression of the transform result is given. The simulation results also show that the GSFrFT is valid.

Key words: Linear Frequency-Modulated(LFM)signal; Fractional Fourier transform; Signal detection; Parameter estimation

1　引言

LFM 信号是一类广泛应用于雷达、声纳及通信领域的非平稳信号，研究 LFM 信号的检测与参数估计具有重要的实用价值。许多国内外学者都对此进行了大量的研究和探索[1–4]。其中具有代表性的是 Cohen 类时-频分析方法[4]，如 WVD(Wigner-Ville Distribution)分布，这种方法对于单分量 LFM 信号具有良好的能量积聚性，但对于多分量 LFM 信号，由于其固有的双线性变换性质，使得这种时-频分布存在严重的交叉项[1,5]，显然对弱目标检测是不利的。Williams 等人[3,6]提出了能够有效抑制交叉项的时-频分布方法，然而同时也降低了信号自项的时-频分辨率。短时傅里叶变换[7](Short-time Fourier Transform)能够避免交叉项的出现，但在低信噪比条件下检测信号效果却并不理想。分数阶傅里叶变换(FrFT)[8, 9]是一种一维的线性变换，具有整体变换的性质，但不具有表征信号局部特性的能力。

本文在分数阶波包变换[10](fractional wave packet transform)基础上，提出了一种高斯短时分数阶傅里叶变换(Gauss Short-time Fractional Fourier Transform，GSFrFT)，选用高斯窗函数，通过窗口宽度的调整，获得较高的频率分辨率，同时利用分数阶核函数角度旋转的特点，在最优旋转角时得到信号的最佳能量集聚。该方法能够在低信噪比的情况下检测到 LFM 信号，并能有效地估计信号的参数值。

2005-07-18 收到，2006-09-18 改回
国家自然科学基金委创新研究群体基金项目(60521002)资助课题

2　高斯短时分数阶傅里叶变换(GSFrFT)原理

2.1　短时傅里叶变换(STFT)

如果给定一个时间宽度很短的窗函数 $g(t)$，令窗滑动，则信号 $s(t)$ 的 STFT 为

$$\mathrm{STFT}(t,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}[s(u)g^{*}(u-t)]e^{-j2\pi fu}\mathrm{d}u \tag{1}$$

从其定义可以看出 STFT 方法是假定非平稳信号在分析窗函数 $g(t)$ 的一个短的时间间隔内是伪平稳的，并移动分析窗函数，使 $s(u)g(u-t)$ 在不同的有限时间宽度内为不同的伪平稳信号，从而计算出各个不同时刻的功率谱。

2.2　分数阶傅里叶变换

FrFT 是一种新的时频分析工具，作为 Fourier 变换的一种广义形式，信号的 FrFT 可看成将信号在时间轴逆时针

旋转角度 α 后在分数阶时-频域上的投影。对信号 $s(u)$ 的 FrFT 定义[8]为

$$S_\alpha(v)=F^\alpha[s(u)]=\int_{-\infty}^{+\infty}s(u)K_\alpha(u,v)\mathrm{d}u \tag{2}$$

式中 FrFT 的变换核为

$$K_\alpha(u,v)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(j\dfrac{u^2+v^2}{2}\cot\alpha-juv\csc\alpha\right), & \alpha\neq n\pi\\ \delta(u-v), & \alpha=2n\pi\\ \delta(u+v), & \alpha=(2n\pm1)\pi\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\delta(u)$ 为单位冲激函数, $n\in Z$ 。

2.3　高斯短时分数阶傅里叶变换

文献[10]提出了一种分数阶小波包的时-频变换方法，其主要思想就是基于短时傅里叶变换和分数阶傅里叶变换。本文采用可调节窗口宽度的高斯窗函数，提出了高斯短时分数阶傅里叶变换，对于信号 $s(u)$ ，其变换由下式给出：

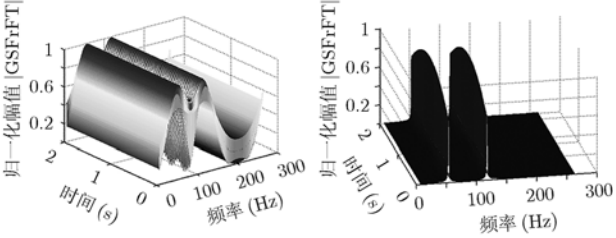
$$\mathrm{GSFrFT}_\alpha(t,f)=\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}s(u)\cdot g(u-t)\cdot\exp\left[j\frac{(u^2+f^2)\cos\alpha-2f\cdot u}{2\sin(\alpha)}\right]\mathrm{d}u,\quad \alpha\neq n\pi \tag{4}$$

其中 $n\in Z$ ，

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^{\,2}}}\exp\left[-\left(\frac{u}{\sqrt{2}\sigma_t}\right)^2\right] \tag{5}$$

是均值为零的标准高斯函数， σ_t 为时域中标准偏差。

该变换综合了 STFT 及 FrFT 两种变换的优点，其意义在于将信号 $s(u)$ 乘上一个窗口宽度可以调整、以 t 为中心的分析高斯窗函数，并作 FrFT，等价于在各个时间点 t 附近取出窗函数内信号 $s(u)$ 一个切片，得到的局部分数阶域频谱。即可以通过调整高斯函数的标准偏差 σ_t ，改善频率分辨率。例如，在 LFM 雷达回波信号处理中，各个目标回波的调制频率相同，而初始频率不同，通过选择适当的 σ_t ，一方面能够提高各个信号的频率分辨率；另外一方面，能够有效地区分出各个信号。如图 1 所示，有两个初始频率相同，而调制频率不同的 LFM 信号，图 1(a)中， $\sigma_t=0.006$ ，两信号交叉在一起，很难区分各个信号以及各个信号的初始频率；当 $\sigma_t=1$ 时，如图 1(b)中，两信号不但能够有效地区分出，而且，各个信号的初始频率分辨率都得到极大的提高。



(a) 高斯短时分数阶傅里叶变换 $\sigma_t=0.006$　　(b) 高斯短时分数阶傅里叶变换 $\sigma_t=1$

图 1　σ_t 大小对 LFM 信号 GSFrFT 影响

为了方便计算，令： $z(u,t)=s(u)g(u-t)$ ，则根据信号乘积的分数阶傅里叶变换性质[11]，可以推导出式(4)的另外一种等价形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{GSFrFT}_\alpha(t,f)&=Z_\alpha(t,f)\\&=\frac{|\csc\alpha|}{\sqrt{2\pi}}e^{j\frac{f^2}{2}\cot\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}S_\alpha(v)e^{-j\frac{v^2}{2}\cot\alpha}\cdot G_t[(f-v)\csc\alpha]\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{6}$$

3　多分量 LFM 信号高斯短时分数阶傅里叶变换检测与参数估计

3.1　含有加性噪声 LFM 信号的 FrFT 及高斯窗函数的 FT

不失一般性，本文针对含有噪声的多分量 LFM 信号讨论，所用的信号模型为

$$s(u)=\sum_{l=1}^{L}s_l(u)=\sum_{l=1}^{L}e^{j(a_lu^2+b_lu)}+n(u) \tag{7}$$

式中 a_l ， b_l 分别为第 l 个 LFM 信号分量的调制频率和初始频率参数， $n(u)$ 是均值为 0，方差为 σ_w^2 的高斯白噪声。式(7)LFM 信号模型的 FrFT 为

$$S_\alpha(v)=\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{l=1}^{L}e^{j(a_lu^2+b_lu)}+n(u)\right]\cdot e^{j\frac{(u^2+v^2)\cos\alpha-2uv}{2\sin\alpha}}\mathrm{d}u \tag{8}$$

当选择第 i 个信号的最优旋转角度：

$$\alpha_i=\arctan\left(-\frac{1}{2a_i}\right),\quad i\in\{1,2,\cdots,L\} \tag{9}$$

可得到

$$S_{\alpha_i}(v)=\sqrt{\frac{1-j\cot\alpha_i}{2\pi}}e^{j\frac{v^2}{2}\cot\alpha_i}\delta(v-b_i\sin\alpha_i)+S_{\alpha_i}^l(v)+N_{\alpha_i}(v) \tag{10}$$

其中第 1 项 $\delta(v-b_i\sin\alpha_i)$ 是第 i 个 LFM 信号分数阶傅里叶变换，为一冲击函数； 第 3 项 $N_{\alpha_i}(v)$ 为高斯白噪声 $n(u)$ 的分数阶傅里叶变换;而第 2 项 $S^l_{\alpha_i}(v)$ 为非第 i 项多分量 LFM 信号 $\sum_{l=1,l\neq i}^{L}s_l(u)$ 的 FrFT，近似解析表达式如下：

$$S_{\alpha_i}^l(v)=\frac{\sqrt{2(1-j\cot\alpha_i)}}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{v^2}{2}\cot\alpha_i}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{L}\sqrt{\frac{1}{A_l}}e^{-j\frac{(b_l-v\csc\alpha_i)^2}{4A_l}} \tag{11}$$

对于每个分量的信号，其能量主要集中在某一频段范围内，其近似振幅谱并随着 $|2a_l+\cot\alpha_i|$ 增大而逐渐呈矩形。

综上分析可以得知，对于第 i 个分量 LFM 信号的 FrFT，选择相应的旋转角度 α_i 时，在分数阶域表现为一冲激函数，而其它分量 LFM 信号的 FrFT，在此旋转角度能量主要集中在某一频段范围内。同时对于高斯白噪声，无论怎样选择旋转角度，其能量都均匀地分布在整个分数阶域平面上，这

将有效地抑制噪声，提高输出信噪比。

式(5)高斯函数 $g(u)$ 的 FT[12]为

$$G(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}f^2\sigma_u^{\ 2}} \tag{12}$$

其中 $\sigma_u=1/\sigma_t$ 为频域中的标准偏差。

根据傅里叶变换的时移性有

$$G_t(f)=G(f)e^{-jft}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}f^2\sigma_u^2}e^{-jft} \tag{13}$$

那么可以得到

$$G_t[(f-v)\csc\alpha]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(f-v)^2\csc^2\alpha\sigma_u^2}e^{-j(f-v)\csc\alpha t} \tag{14}$$

3.2 含有加性高斯白噪声 LFM 信号的 GSFrFT 检测与参数估计

将多分量 LFM 信号的 FrFT 式(10)及频率域窗函数式(14)代入高斯短时分数阶变换的等价式(6)，有

$$\begin{aligned}\mathrm{GSFrFT}_{\alpha_i}(t,f)&=B_{\alpha_i}e^{-\frac{1}{2}(f-b_i\sin\alpha_i)^2\csc^2\alpha_i\sigma_u^2}e^{-j(f-b_i\sin\alpha_i)\csc\alpha_i t}\\&+C_{\alpha_i}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{L}\sqrt{\frac{1}{A_l}}e^{-j\frac{(b_l-v\csc\alpha_i)^2}{4A_l}}e^{-\frac{1}{2}(f-v)^2\csc^2\alpha_i\sigma_u^2}\\&\cdot e^{-j(f-v)\csc\alpha_i t}\mathrm{d}v+D_{\alpha_i}\int_{-\infty}^{+\infty}N_{\alpha_i}(v)e^{-j\frac{v^2}{2}\cot\alpha_i}\\&\cdot e^{-\frac{1}{2}(f-v)^2\csc^2\alpha_i\sigma_u^2}e^{-j(f-v)\csc\alpha_i t}\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$B_{\alpha_i}=\frac{|\csc\alpha_i|\sqrt{1-j\cot\alpha_i}}{2\pi\sqrt{2\pi}}e^{j\frac{f^2}{2}\cot\alpha_i} \tag{16}$$

$$C_{\alpha_i}=\frac{|\csc\alpha_i|\sqrt{2(1-j\cot\alpha_i)}}{4\pi}e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{f^2}{2}\cot\alpha_i\right)} \tag{17}$$

$$D_{\alpha_i}=\frac{|\csc\alpha_i|}{2\pi}e^{j\frac{f^2}{2}\cot\alpha_i} \tag{18}$$

分析可知，在式(15)中，第 1 项幅值取得最大值时，对应的频率：

$$f=b_i\sin\alpha_i \tag{19}$$

第 2 项被积函数中对于每个分量的 LFM 信号 FrFT 而言，其能量主要集中在某一频段范围内，其振幅谱并随着 $|2a_l+\cot\alpha_i|$ 增大而逐渐呈矩形；振荡因子的正负抵消特性能够加快无穷积分的收敛速度，而衰减因子在 $v=b_i\sin\alpha_i$ 附近其值快速衰减为零，因而第 2 项积分可认为仅在 $v=b_i\sin\alpha_i$ 有值，其近似值为

$$\mathrm{GSFrFT}_{\alpha_i}^{\mathrm{II}}(t,f)\approx C_{\alpha_i}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{L}\sqrt{\frac{1}{A_l}}e^{-j\frac{(b_l-b_i)^2}{4A_l}} \tag{20}$$

则在满足式(9)情况时，第 i 个 LFM 信号与其余 $L-1$ 个 LFM 干扰信号的输出信干比近似为

$$\mathrm{SIR}=20\lg\frac{|B_{\alpha_i}|}{\left|C_{\alpha_i}\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{L}\sqrt{\frac{1}{A_l}}\right|}=20\lg\frac{1}{\sum_{\substack{l=1\\l\neq i}}^{L}\sqrt{\frac{\pi}{a_l+\frac{\cot\alpha_i}{2}}}} \tag{21}$$

对于干扰信号来说，其调制频率 a_l 都比较大(兆赫级以上)，因而上式得到的比值很大。式(15)中最后一项为高斯白噪声的 GSFrFT，其被积函数中同样包含 3 个因子，高斯白噪声的 FrFT 因子，振荡因子及衰减因子，其能量均匀地分布在整个时频域内。因而式(15)的后两项积分可忽略，近似为

$$\mathrm{GSFrFT}_{\alpha_i}(t,f)\approx B_{\alpha_i}e^{-\frac{1}{2}(f-b_i\sin\alpha_i)^2\csc^2\alpha_i\sigma_u^2}e^{-j(f-b_i\sin\alpha_i)\csc\alpha_i t} \tag{22}$$

这样就可得到了第 i 个 LFM 信号在对应最佳旋转角时高斯短时分数阶傅里叶变换的近似解析表达式，对上式两边取模得到

$$|\mathrm{GSFrFT}_{\alpha_i}(t,f)|\approx\left|e^{-\frac{1}{2}(f-b_i\sin\alpha_i)^2\csc^2\alpha_i\sigma_u^2}B_{\alpha_i}\right| \tag{23}$$

从式(23)的结果来看，任何时刻，在满足式(9)最佳旋转角度的情况下，LFM 信号高斯短时分数阶傅里叶变换模值都呈高斯分布，在任何中心时刻其最大值对应点均满足式(19)。

由以上推导可以看出，对于多分量 LFM 信号的检测，首先可通过在二维分数阶时频平面内峰值搜索得到第 i 个 LFM 分量对应的最优旋转角 α_i ($i=1,2,\cdots,I$)，计算出该 LFM 信号分量的高斯短时分数阶傅里叶变换，得到相应的分数阶时频面的分布图，从而获得该分量信号的参数估计值。

4 仿真试验

设含有高斯白噪声的两分量 LFM 信号 $s(t)=e^{j2\pi(-\frac{140}{2}t^2+80t)}+e^{j2\pi(-\frac{100}{2}t^2+40t)}+n(t)$，输入信噪比为−6dB。图 2，图 3 和图 4 分别是 WVD，Choil-Williams(CWD)和 STFT 分布，“1”、“2”为 LFM 信号分量，“3”为交叉项。图 2 中，可以看出存在严重交叉项，图 3 的 CWD 分布是通过对核函数的改进，能够对交叉项及噪声有效的抑制，但同时也降低了时-频分辨率；图 4 为短时傅里叶变换，虽无交叉项存在，然而，频率分辨率较低。应用本文所给出的 GSFrFT，首先进行角度搜索，得到最优选转角度，根据式(9)，求此角度反正切即可获得对应的信号分量“1”的调制频率参数，通过调节适当的高斯函数标准偏差 σ，得到

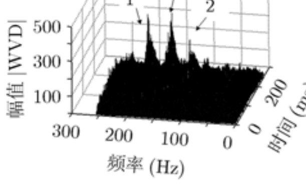


图 2 两分量 LFM 信号 WVD

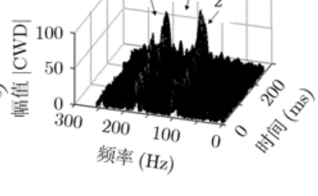


图 3 两分量 LFM 信号 CWD

表 1　多分量 LFM 参数估计(输入 SNR = −6dB)

	a_i (真实值)	$\hat{a}_i$ (估计值)	$\lvert\Delta a\rvert$ (误差)	b_i (真实值)	$\hat{b}_i$ (估计值)	$\lvert\Delta b\rvert$ (误差)
1	−439.82	−439.86	0.04	502.65	502.64	0.01
2	−314.16	−314.18	0.02	251.33	251.32	0.01

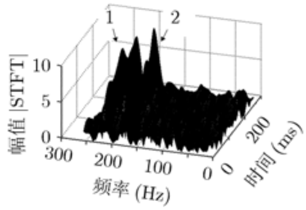
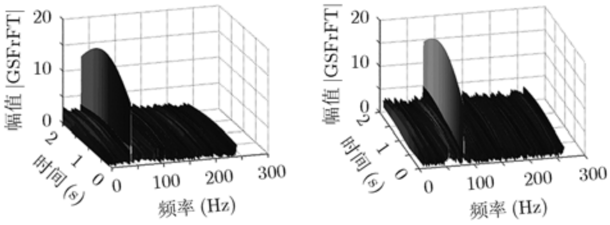


图 4　两分量 LFM 信号 STFT



(a) 两分量 LFM 信号 1 的 GSFrFT　(b) 两分量 LFM 信号 2 的 GSFrFT

图 5

GSFrFT 时-频分布，从而获得初始频率参数的估计值。同理，获得信号分量“ 2 ”的参数估计值，相应的参数估计值如表 1 所示。图 5(a)，5(b)为高斯短时分数阶傅里叶变换时-频分布图，图中信号项周围的起伏为干扰项和交叉项的贡献，可以看出相对于所求目标信号项这部分能量分散，从而有利于实现信号项的检测与参数估计。

从计算机仿真的结果看，当较低信噪比时，本文提出的信号检测方法明显优于 WVD，Choil-Williams 和 STFT 等方法，多次的仿真结果表明，当 SNR ≥ -10dB 都能得到较为满意的结果，即高斯短时傅里叶变换方法具有在极低信噪比环境下进行信号检测和信号参数估计的稳健性。

5　结束语

本文提出了一种新的时-频变换方法，该方法将短时傅里叶变换及分数阶傅里叶变换优点集于一体，采用可调整窗口宽度的高斯窗函数，可获得较高的频率分辨率。同时给出最优旋转角度下目标 LFM 信号的分数阶傅里叶变换解析表达式，及非目标信号时的 LFM 信号分数阶傅里叶变换的近似解析表达式，在低信噪比情况下能够有效地检测 LFM 信号，并进行参数估计。分析及仿真结果表明，该方法适用于多分量信号的检测和参数估计，能够有效地避免交叉项的影响，具有良好的应用前景。

参 考 文 献

[1] Milne P R and Pace P E. Wigner distribution detection and analysis of FMCW and P-4 polyphase LPI waveforms. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Orlando, USA, May 2002, Vol.4: 3944–3947.

[2] 戴延中, 李志舜. 基于 Wigner-Ville 分布的宽带回波到达时刻估计方法. 声学学报, 2002, 27(1): 84–87.
Dai Yan-zhong and Li Zhi-shun. Time of arrival estimation of wideband echoes based on Wigner-Ville distribution. *Acta Acustica*, 2002, 27(1): 84–87.

[3] Hyung-Ill Chol and Williams J. Improved time-frequency representation of multicomponent signals using exponential kernels. *IEEE Trans. on Acoustics Speech and Signal Processing*, 1989, 37(6): 862–871.

[4] L. 科恩著，白居宪译. 时-频分析: 理论与应用[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1998: 68–75.

[5] 邹红星，戴琼海，李衍达等. 不含交叉项干扰且具有 WVD 积聚性的时频分布之不存在性.中国科学(E 辑)，2001，31(4): 348–354.
Zou Hong-xing, Dai Qiong-hai, and Li Yan-da *et al.*. The time-frequency distributions with WVD concentration without cross terms interference not exist. *Science in China* (*Series E*), 2001, 31(4): 348–354.

[6] Jeong J and Williams J. Kernel design for reduced interference distributions. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1992, 40(2): 402–412.

[7] 张贤达，保铮. 非平稳信号分析与处理[M]. 北京: 国防工业出版社, 2001: 20–25.

[8] Namias V. The fractional Fourier transform and its application in quantum mechanics. *J Inst Appl Math*, 1980, 25(1): 241–265.

[9] 李家强，金荣洪，范瑜，毛炜. LFM 信号参数联合估计新方法. 现代雷达, 2006, 28(1): 45–48.
Li Jia-qiang, Jin Rong-hong, Fan Yu, and Mao Wei. Differential method in domain frequency: A new algorithm for the joint parameter estimation of LFM. *Modern Radar*, 2006, 28(1): 45–48.

[10] Huang Ying and Suter B. Fractional wave packet transform. IEEE Digital Signal Processing Workshop Proceedings, Loen, Norway, 1996: 413–415.

[11] Almeida B. Product and convolution theorems for the fractional Fourier transform. *IEEE Signal Processing Letters*, 1997, 4(1): 15–17.

[12] Capus C and Brown K. Fractional Fourier transform of the Gaussian and fractional domain signal support. IEE Proc.-Vis. *Image Signal Process*., 2003, 150(2): 99–106.

李家强：　男，1976 年生，博士生，研究方向为低可截获雷达信号处理、非平稳信号处理及相关算法研究.

金荣洪：　男，1963 年生，教授，博士生导师，研究方向为天线、电磁场的数值方法、阵列信号处理等.