任意长离散余弦变换的快速递归算法

沈宏君
(宁夏大学物理电气信息学院 银川 750021)

摘 要：该文基于 Clenshaw 递归公式以及离散余弦自身的对称性提出任意长离散余弦变换(DCT)的一种并行递归快速算法，给出了该算法的滤波器实现结构；与现有的其它递归算法以及基于算术傅里叶变换的余弦变换算法进行了计算复杂度的比较分析，结果表明该文算法运算量大大减少。该递归计算的滤波器结构使算法非常适合大规模集成电路(VLSI)实现。

关键词：离散余弦变换；Clenshaw 递归；对称性

中图分类号：TN911.72 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2007)02-0418-03

Fast Recursive Algorithm for the Discrete Cosine Transform with Arbitrary Length

Shen Hong-jun
(*School of Physics and Electrical Information Science of Ningxia University, Yinchuan* 750021, *China*)

Abstract: A fast recursive algorithm is proposed in this paper for the realization of Discrete Cosine Transforms (DCT) with arbitrary length jointly using Clenshaw recurrence formula and the symmetry of DCT. Compared with other exiting recursive algorithms and the method of arithmetic Fourier transform for computing DCT, the proposed algorithm holds a lower computation complexity. With regular digital filters structures, the algorithm is also effective for VLSI implementation.

Key words: Discrete Cosine Transform (DCT); Clenshaw recurrence formula; Symmetry

1 引言

离散余弦变换及其反变换在数字信号处理领域有着广泛的应用。不少学者致力于离散余弦变换与反变换的快速算法研究[1−8]。Wang[1]，Chau[2]，Aburdene[3]等研究了任意长的离散余弦变换的递归计算，Liu[7]等则利用矩来计算 DCT。本文利用 Clenshaw 后向递归公式以及离散余弦变换自身所具有的对称性来构造离散余弦变换的并行递归算法。与其它递归算法相比，运算量减少了一半；而与基于算术傅里叶变换的余弦变换算法[5]相比，本文的 DCT 算法不仅运算量大大降低，而且可以保证较小的计算误差。

2 算法原理

离散信号序列 $x(n)$， $n=0,1,\cdots,N-1$，其常用的离散余弦变换形式为

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left(k\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{N}\right) \tag{1}$$

其中 $u(0)=1/N$； $u(k)=2/N,\quad k=1,\cdots,N-1$。

为方便算法原理的阐述，这里先以引理形式直接给出一个 Clenshaw 递归公式[9]。

引理(Clenshaw 递推公式) 设一维函数 $f(x)$ 有如下表达：$f(x)=\sum\limits_{k=0}^{K}c_kF_k(x)$，其中 F_k 满足递归关系：

$$F_{k+1}(x)=\alpha(k,x)F_k(x)+\beta(k,x)F_{k-1}(x) \tag{2}$$

$\alpha(k,x)$， $\beta(k,x)$ 为函数。则有

$$f(x)=\beta(1,x)F_0(x)\psi_2+F_1(x)\psi_1+F_0(x)c_0 \tag{3}$$

其中 ψ_2， ψ_1 由下面的递归公式确定：

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{K+2}=\psi_{K+1}=0\\&\psi_k=\alpha(k,x)\psi_{k+1}+\beta(k+1,x)\psi_{k+2}+c_k\\&k=K,\ K-1,\cdots,1\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

定理 (任意长离散余弦变换的快速递归计算) 对任意长为 N 的序列 $x(n)$， $n=0,1,\cdots,N-1$，其离散余弦变换可以作如下递归计算：

$$C(k)=u(k)\cos\left(\frac{k\pi}{2N}\right)(\psi_0-\psi_1) \tag{5}$$

其中 ψ_0， ψ_1 由下式递归确定：

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{K+1}=0\\&\psi_K=\begin{cases}0, & N\text{为偶数}\\x(K), & N\text{为奇数}\end{cases}\\&\psi_n=2\cos(k\pi/N)\psi_{n+1}-\psi_{n+2}+x(n)+(-1)^kx(N-1-n)\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式中 $n=K-1,\cdots,1,0$； $K=[(N-1)/2]$， $[\cdot]$ 表示取整。

证明 式(1)中，令 $\theta_k=k\pi/N$，于是有

$$F_n(\theta_k)=\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{7}$$

因为

$$\cos\left(\left(n+\frac{3}{2}\right)\theta_k\right)=2\cos\theta_k\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)-\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{8}$$

于是

2005-07-13 收到，2006-04-28 改回

$$F_{n+1}(\theta_k)=\alpha(n,k)F_n(\theta_k)+\beta(n,k)F_{n-1}(\theta_k) \tag{9}$$

其中

$$\alpha(n,k)=2\cos\theta_k,\quad \beta(n,k)=-1 \tag{10}$$

定义序列 $g(n)$，$(n=0,1,\cdots,K)$，其离散余弦变换为

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{K}g(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{11}$$

于是，由式(10)，应用 Clenshaw 递归法则，可有

$$C(k)=u(k)\left[-\cos\frac{\theta_k}{2}\psi_2+\cos\frac{3\theta_k}{2}\psi_1+\cos\frac{\theta_k}{2}g(0)\right] \tag{12}$$

其中 ψ_2，ψ_1 由下面的递归公式确定

$$\left.\begin{aligned}&\psi_{K+2}=\psi_{K+1}=0\\&\psi_n=2\cos(\theta_k)\psi_{n+1}-\psi_{n+2}+g(n),\ n=K,\cdots,1\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

进一步，由式(8)中 n=0，可将式(12)进一步化为

$$C(k)=u(k)\cos\frac{\theta_k}{2}\left[-\psi_2+(2\cos\theta_k-1)\psi_1+g(0)\right] \tag{14}$$

对式(13)补充条件，令 n=0，于是有 $\psi_0=2\cos(\theta_k)\psi_1-\psi_2+x(0)$，于是上式可变成

$$C(k)=u(k)\cos\frac{\theta_k}{2}(\psi_0-\psi_1) \tag{15}$$

(1)当 N 为偶数时，令 $K=[(N-1)/2]=N/2$，其中 $[\cdot]$ 表示取整。则余弦变换可写成

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{K-1}x(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)+u(k)\sum_{n=K}^{N-1}x(n)\cdot\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{16}$$

进行变量替换，得

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{K-1}x(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)+u(k)\sum_{n=0}^{K-1}x(N-1-n)\cdot\cos\left(\left(N-1-n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)$$

利用离散余弦函数自身的对称性，当 N 为偶数时，序列 $x(n)$ 的余弦变换可写成

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{K-1}g(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{17}$$

其中

$$g(n)=x(n)+(-1)^k x(N-1-n) \tag{18}$$

(2)当 N 为奇数时，令 $K=[(N-1)/2]=\dfrac{N-1}{2}$，余弦变换可写成

$$C(k)=u(k)\left\{\sum_{n=0}^{K-1}x(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)+x(K)\cdot\cos\left(\left(K+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)\sum_{n=K+1}^{N-1}x(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)\right\} \tag{19}$$

对上式进行变量替换，并利用离散余弦函数自身的对称性，可有

$$C(k)=u(k)\left\{\sum_{n=0}^{K-1}\left(x(n)+(-1)^k x(N-1-n)\right)\cdot\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)+x(K)\cos\left(\left(K+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right)\right\}$$

可进一步写成

$$C(k)=u(k)\sum_{n=0}^{K}g(n)\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta_k\right) \tag{20}$$

其中

$$g(n)=\begin{cases}x(n)+(-1)^k x(N-1-n), & n\le K-1\\ x(n), & n=K\end{cases} \tag{21}$$

于是，综合 N 为偶数和奇数的情况，把式(18)，式(21)代入式(13)，定理即得证。

3　计算复杂度

根据式(5)，式(6)，我们可以得到实现离散余弦变换快速计算的数字滤波器结构形式，如图 1 所示。由图可见，由于这样的算法有规则的递归结构和并行性，所以易于 VLSI 实现。图 1 中 $K=\mathrm{Mod}\left(\dfrac{N}{2}\right)$，　$n\le K-1$，$g(n)=x(n)+(-1)^k x(N-1-n)$，$g(K)=\begin{cases}0, & N\text{为偶数；}\\ x(K), & N\text{为奇数。}\end{cases}$

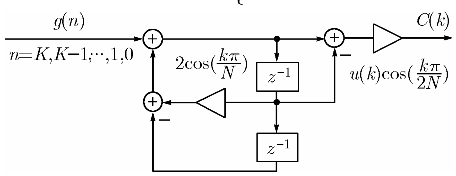

图 1　离散余弦变换快速递归算法的滤波器结构

各种算法的计算复杂度比较如表 1 所示。可见，本文算法的 $N/2+1$ 个乘法运算以及 $N+1$ 加法与基于算术傅里叶变换的离散余弦变换计算相比，本文算法里乘法运算量降为 1/4，而加法运算更可大幅降低；同时，通常算术傅里叶变换方法由于需要进行插值运算而存在变换误差[5]，常会使余弦变换精度受到影响，本文的递归算法则不存在这样的问题。经数值试验，本文的递归算法相对误差通常在 10^{-8} 以下，精度非常高。而把本文算法与 Wang[1]，Chau[2]，Aburdene[3] 给出的离散余弦递归算法相比，运算量减少了一半；而与 Liu[7]，Yang[8] 等的方法比较，乘法运算更是可以减少一半以上。从图 2 可以直观地比较几种算法的运算量。

表 1　离散余弦变换各种算法计算复杂度比较

	乘法运算次数	加法运算次数
本文算法	$N/2+1$	$3N/2+1$
文献[1]	$N+1$	$2N$
文献[2]	$N+2$	$2N+1$
文献[3]	$N+1$	$2N+1$
文献[7]	$\dfrac{N\log_2 N}{\log_2\log_2 N}$	/
文献[8]	$4N+1$	$2N+1$
文献[5]	$2N$	$N^2/2$

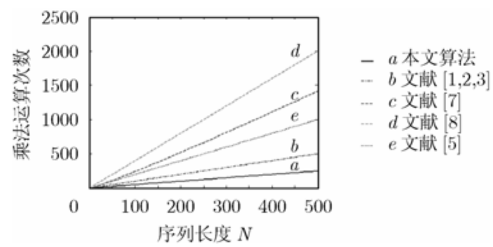

图2 离散余弦变换各种算法乘法运算量比较曲线

4 结束语

利用 Clenshaw 递推公式构造了实现离散余弦变换的并行递归快速算法，由于其滤波器结构，这样的递归算法既适合软件实现，也适合 VLSI 硬件实现。该算法比其它离散余弦算法相比具有非常突出的优点。

参 考 文 献

[1] Wang Z, Jullien G A, and Miller W C. Recursive algorithms for the forward and inverse discrete cosine transform with arbitrary length. *IEEE Signal Processing Letters*, 1994, 1(7): 101–102.

[2] Chau L P and Siu W C. Recursive algorithm for the discrete cosine transform with general lengths [J]. *Electronics Letters*, 1994, 30(3): 197–198.

[3] Aburdene M F, Zheng J, and Kozick R J. Computation of discrete cosine transform using Clenshaw's recurrence formula [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1995, 2(8): 155–156.

[4] Chau L P and Siu W C. Efficient recursive algorithm for the inverse discrete cosine transform [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2000, 7(10): 276–277.

[5] 张宪超, 李宁, 陈国良. 离散余弦变换的改进的算术傅立叶变换算法[J]. 电子学报, 2000, 28(9): 88–90.
Zhang Xian-chao, Li Ning, and Chen Guo-liang. An algorithm for computing DCT using improved arithmetic Fourier transform. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(9): 88–90.

[6] 曾泳泓. 任意长度离散余弦变换的快速算法[J]. 计算数学, 1993, 15(3): 299–302.

[7] Liu J G, Li H F, and Chan F H Y, *et al*.. Fast discrete cosine transform via computation of moments [J]. *Journal of VLSI Signal Processing*, 1998, 19(3): 257–268.

[8] Yang J F and Fan C P. Recursive implementation of discrete cosine transforms: With selectable fixed coefficient filters [J]. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*-II, 1999, 46(2): 211–216.

[9] Press W, Teukolsky S A, and Vetterling W T, *et al*.. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1992: 354–359.

沈宏君： 男，1970年生，讲师. 研究方向为光通信及光信息处理.