

α 稳定分布下的加权平均最小 p -范数算法

邱天爽^① 杨志春^① 李小兵^① 陈艳霞^②

^①(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

^②(大连医科大学医学检验学院 大连 116023)

摘要: 该文提出一种新的适用于 α 稳定分布噪声环境的自适应滤波算法, 这种算法通过使加权平均误差函数的 p -范数最小来实现自适应滤波。在这种算法的基础上, 该文还得到两种新的动量 LMP 自适应算法。将这些新算法应用于估计 AR 模型的参数, 计算机仿真的结果表明, 该文提出的算法的性能比已有 LMP 算法的性能要更为优越。

关键词: α 稳定分布; 自适应滤波; LMP 算法; m-LMP 算法

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)02-0410-04

A Weighted Average Least p -Norm Algorithm under Alpha Stable Noise Conditions

Qiu Tian-shuang^① Yang Zhi-chun^① Li Xiao-bing^① Chen Yan-xia^②

^①(Department of Electronic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

^②(Department of Medical Inspection, Dalian Medical University, Dalian 116023, China)

Abstract: This paper introduces a new adaptive filtering algorithm under the α -stable noise conditions, which is obtained by minimizing the weighted average p -norm of error function. Two new versions of momentum LMP algorithm can be derived from the proposed one. Computer simulations on the channel equalization under the α -stable noise conditions show that the proposed algorithms provide better estimation performance than those of the existing LMP algorithm.

Key words: α -stable distribution; Adaptive filtering; LMP algorithm; m-LMP algorithm

1 引言

在通信系统中, 接收机的设计通常假定信道中的加性噪声是高斯白噪声。这是因为在高斯白噪声假设下, 容易得到信号处理问题的解析解, 并且能够简化接收机的结构。但是, 在许多实际应用问题中, 所遇到的诸如水声, 低频大气噪声以及许多人为噪声等, 往往具有一定的甚至是比较显著的脉冲性, 这种噪声不符合高斯分布^[1,2]。在这种噪声下, 基于高斯假定得到的最优系统会出现性能退化, 甚至不能正常工作。许多研究表明, α 稳定分布模型是一种能够很好描述这种脉冲噪声的模型^[3,4]。

除了少数的特例外($\alpha=2$ 时为高斯分布; $\alpha=1, \beta=0$ 时为柯西分布; $\alpha=1/2, \beta=-1$ 时为皮尔森分布), α 稳定分布概率密度函数没有闭合的表达式, 通常用其特征函数来表示:

$$\varphi(t) = \exp\{jat - \gamma |t|^\alpha [1 + j\beta \text{sgn}(t)\omega(t, \alpha)]\} \quad (1)$$

式中

$$\omega(t, \alpha) = \begin{cases} \tan(\alpha\pi)/2, & \alpha \neq 1 \\ (2/\pi)\log |t|, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$-\infty < a < \infty, \gamma > 0, 0 < \alpha \leq 2, -1 \leq \beta \leq 1 \quad (4)$$

通过上述 4 个参数 α, a, β, γ , 可以完全确定一个稳定分布的特征函数。其中: α 称为特征指数, 表示 α 稳定分布概率密度函数拖尾的长度, α 值越小, 其拖尾就越长, 意味着远离中心位置的随机变量的概率越大; γ 为分散系数, 表示 α 稳定分布的分散程度, 类似于高斯分布的方差; β 为对称参数, 当 $\beta=0$ 时, 称为对称 α 稳定分布, 记为 SaS; a 为位置参数, 对于 SaS, a 表示分布的均值($1 < \alpha < 2$)或中值($0 < \alpha < 1$)。参数为 $a=0, \gamma=1$ 的 α 稳定分布称为标准 α 稳定分布。

α 稳定分布变量没有有限的二阶矩或高阶矩, 其有限 $p(0 < p < \alpha)$ 阶矩称为分数低阶矩(FLOMs)^[3,4]。文献[4]中证明了 α 稳定分布随机变量的 p 阶矩与其 p -范数成比例。在文献[5-8]中, 给出了几种不同的自适应滤波算法。这些算法都是以误差函数的 p -范数作为代价函数的, 并且利用了代价函数的瞬时梯度的近似值来更新权系数。其中, LMP(Least Mean p -Norm)算法的收敛速度慢, 而 RLMP(Recursive LMP)算法^[8]收敛速度虽然很快, 但是由于其计算量太大,

2005-07-11 收到, 2006-02-20 改回
国家自然科学基金(60372081, 30570475, 30170259)和教育部博士点基金(20050141025)资助项目

给应用带来不便。

本文提出一种加权平均最小 p -范数自适应算法, 类似于加权平均最小均方自适应算法^[9], 这种算法的优点是收敛速度快, 同时相对于 LMP 算法计算量增加很小。本文还对所提出的算法进行了简化, 得到几种不同的表示。经过计算机仿真, 比较了这些算法与现存 LMP 算法^[4]的性能。

2 加权平均最小 p -范数算法

自适应线性系统的模型如式(5)所示:

$$y'(t) = \mathbf{w}^T(t)\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

式中 $\mathbf{w}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_M(t)]^T$ 是权矢量, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 是输入矢量, $y'(t)$ 是系统的输出, 式中 M 是自适应系统的阶数。假设理想的系统输出为 $y(t)$, 则误差函数 $e(t)$ 表达式为

$$e(t) = y(t) - y'(t) \quad (6)$$

设含有时间变量的代价函数为

$$F(\mathbf{w}, t) = (1/t) \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} |y(i) - y'(i)|^p \quad (7)$$

式中 λ 为指数加权因子, 且满足 $0 < \lambda < 1$ 和 $1 \leq p < \alpha$ 。将 $F(\mathbf{w}, t)$ 对 \mathbf{w} 取梯度, 得到

$$\nabla_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}, t) = \frac{p}{t} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \quad (8)$$

其中 $\text{sgn}(\cdot)$ 为式(3)所定义的符号函数。应用梯度搜索算法, 权系数的更新关系式可写为

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + (\mu/p) \nabla_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}, t) \quad (9)$$

其中 μ 为收敛因子。将式(8)代入式(9), 则得到加权平均最小 p -范数算法为

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \frac{\mu}{t} \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \frac{\mu}{t} |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] \\ + \frac{\mu}{t} \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \frac{\mu}{t} |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \left(\frac{\mu}{t-1}\right) \\ \cdot \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \end{aligned} \quad (12)$$

同样, 利用式(8)和式(9)得到权系数的迭代关系为

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t-1) + (\mu/p) \nabla_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}, t-1) \quad (13)$$

式中

$$\begin{aligned} F(\mathbf{w}, t-1) = \lambda^{-1} [1/(t-1)] \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-i} |y(i) - y'(i)|^p \\ \cdot \nabla_{\mathbf{w}} F(\mathbf{w}, t-1) \\ = p\lambda^{-1} \left\{ \frac{1}{1-t} \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 可以得到

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t-1) + \lambda^{-1} \left\{ \frac{\mu}{1-t} \sum_{i=1}^{t-1} \lambda^{t-i} |e(i)|^{p-1} \mathbf{x}(i) \text{sgn}[e(i)] \right\} \quad (15)$$

由式(12)和式(15)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \frac{\mu}{t} |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] \\ + \lambda \left(1 - \frac{1}{t}\right) [\mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t-1)] \end{aligned} \quad (16)$$

令 $\Delta \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{w}(t-1)$, $\eta(t) = 1 - 1/t$, 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + [1 - \eta(t)] \mu |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] \\ + \lambda \eta(t) \Delta \mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)代表参数矢量 $\mathbf{w}(t)$ 沿着加权平均 p -范数 $(1/t) \cdot \sum_{i=1}^t \lambda^{t-i} |y(i) - y'(i)|^p$ 最小的方向进行更新, 因此可以称为加权平均最小 p -范数学习算法。这种算法和 LMP 算法的区别在于它有一个随时间变化的系数 $\eta(t)$ 。正是由于 $\eta(t)$ 的存在, 使得式(17)更加适于自适应滤波。因为在迭代次数 t 小时, $\eta(t)$ 使较大的 $\Delta \mathbf{w}(t)$ 对算法的贡献较小; 而在迭代次数 t 较大时, $\eta(t)$ 使较小 $\Delta \mathbf{w}(t)$ 对算法的贡献较大。

3 加权平均最小 p -范数算法的简化

在式(17)中, 如果用一个适当的常量来代替时变系数 $\eta(t)$, 就可以得到最小 p -范数(LMP)算法^[3]和动量最小 p -范数(momentum-LMP, m-LMP)算法。分别介绍如下:

(1)LMP 算法 如果令式(17)中时变系数 $\eta(t) = 0$, 则算法就会按照 p -范数 $|y(i) - y'(i)|^p$ 最小的原则来更新权系数, 这样式(17)所示算法就简化为 LMP 算法, 如式(18)所示:

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + \mu |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] \quad (18)$$

在式(18)中, 如果令 $p = 1$ 则算法就变成了 LMAD 算法^[4]。尽管推导过程不同, 但是本质上 LMAD 算法就是符号 LMS 算法。

(2)修正的平均加权最小 p -范数算法 把式(17)算法中等号右边第 2 项的时变系数 $\eta(t)$ 用系数 λ 代替, 可以得到修正的加权平均最小 p -范数 LMP 算法, 如式(19)所示:

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + (1-\lambda)\mu |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] + \lambda \eta(t) \Delta \mathbf{w}(t) \quad (19)$$

(3)动量 LMP 算法 如果用固定的常数 η 来代替时变系数 $\eta(t)$, 同时选取系数 $\lambda = 1$, 则算法简化为动量 LMP 算法, 如式(20)所示

$$\mathbf{w}(t+1) = \mathbf{w}(t) + (1-\eta)\mu |e(t)|^{p-1} \mathbf{x}(t) \text{sgn}[e(t)] + \eta \Delta \mathbf{w}(t) \quad (20)$$

4 模拟实验

为了分析比较各种算法的性能, 本文以一个自适应均衡器为例进行了计算机仿真。假设输入信号 $s(t)$ 为一个伪随机二进制序列 $\{-1, 1\}$, 信道的传输函数为二阶全极点模型, 则

信道的输出 $u(t)$ 为

$$u(t) + a_1 u(t-1) + a_2 u(t-2) = s(t) \quad (21)$$

将 α 稳定分布噪声 $n(t)$ 叠加在 $u(t)$ 上, 得到序列 $x(t)$ 为

$$x(t) = u(t) + n(t) \quad (22)$$

根据混合信噪比选取噪声 $n(t)$ 的分散系数 γ , 混合信噪比的定义为

$$\text{SNR} = 10 \log\{\text{Var}[u(t)]/\gamma\} \quad (23)$$

其中 $\text{Var}[u(t)]$ 为信号 $u(t)$ 的方差。假定均衡器的输出 $y(t)$ 为

$$y'(t) = x(t) + w_1(t)x(t-1) + w_2(t)x(t-2) \quad (24)$$

为了讨论方便, 将式(17)、式(18)、式(19)和式(20)分别称为算法 1、算法 2、算法 3 和算法 4。在计算机仿真中, 本文采用上述 4 种算法来估计权系数 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 。由于信道是一个二阶 AR 模型, 所以 a_1 和 a_2 的估值为

$$\hat{a}_1 = E[w_1(t)], \quad \hat{a}_2 = E[w_2(t)] \quad (25)$$

其中 $E[\cdot]$ 表示取均值的操作。定义 a_1 和 a_2 的方差分别表示为

$$\text{Var}(a_1) = 10 \log E\{[w_1(t) - E(w_1(t))]^2\} \quad (26)$$

$$\text{Var}(a_2) = 10 \log E\{[w_2(t) - E(w_2(t))]^2\} \quad (27)$$

在计算机仿真中, 本文选取 $a_1 = -0.975, a_2 = 0.95$ 的信道模型。为了获得可信的权系数 $w(t)$, 每次实验迭代 1000 次, 共做 100 次独立实验。

为了对上述 4 种算法进行公平的比较, 先假定 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 的初值分别等于 a_1 和 a_2 的真值, 即排除不同算法跟踪性能的不同而专门比较它们的稳态误差。控制各算法的稳态误差功率均为 P_e , 并由此得到 4 种算法的等价收敛因子 μ_1, μ_2, μ_3 和 μ_4 。再设 $w_1(t)$ 和 $w_2(t)$ 的初值为 0, 使用前面所得到的等价收敛因子进行信道参数 a_1 和 a_2 的估计, 并比较不同算法的性能。图 1 和图 2 分别给出了 $\alpha = 1.2$, 混合信噪比为 0dB 和 10dB 时 $w(t)$ 的曲线。图 3 和图 4 分别给出了 $\alpha = 1.5$, 混合信噪比为 0dB 和 10dB 时 $w(t)$ 的曲线。

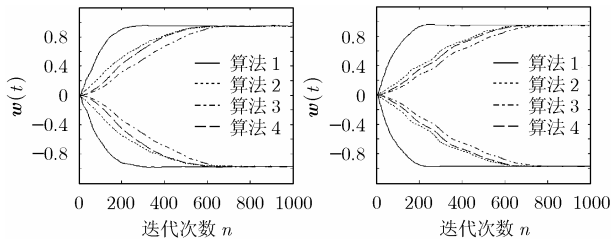


图 1 $\alpha=1.2$, SNR=0dB 时的 $w(t)$

图 2 $\alpha=1.2$, SNR=10dB 时的 $w(t)$

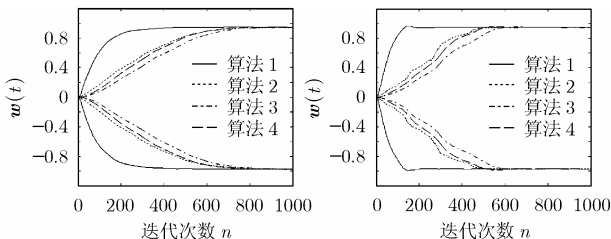


图 3 $\alpha=1.5$, SNR=0dB 时的 $w(t)$

图 4 $\alpha=1.5$, SNR=10dB 时的 $w(t)$

从图 1-图 4 可以看出, 无论是在 $\alpha = 1.2$ 还是在 $\alpha = 1.5$ 的情况下, 在低信噪比和高信噪比时, 算法 1 的收敛速度都

优于其它 3 种算法, 且算法 1 的计算量只比算法 2 增加了一次加法运算, 因此它们的运算复杂度相同, 都为 $O(M)$, 其中 M 为自适应系统的阶数。在文献[8]给出的 RLMP 算法的运算复杂度为 $O(LM^2)$, 其中 L 为数据窗的长度。

图 5 和图 6 给出算法 1 和文献[9]中给出的加权平均最小均方自适应算法(这里称为算法 5)的性能曲线。为了保证实验的公平性, 采用与前面相同的方法得到等价的收敛因子。在图 5 中 $\alpha = 1.2$, 在图 6 中 $\alpha = 2.0$ (高斯分布), 信噪比均为 0dB。

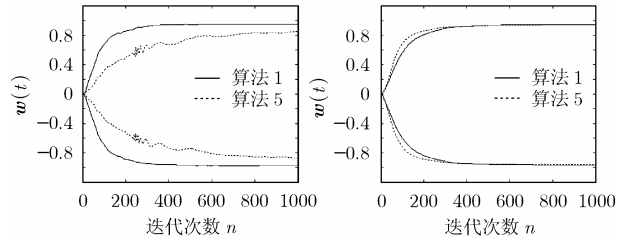


图 5 $\alpha=1.2$, SNR=0dB 时的 $w(t)$

图 6 $\alpha=2.0$, SNR=0dB 时的 $w(t)$

从计算机仿真结果可以看出: 本文提出的加权平均最小 p -范数算法(算法 1)在分数低阶 α 稳定分布条件下, 具有很好的收敛特性, 比已有的 LMP 算法收敛更快, 更稳定, 比其它几种简化算法具有更好的性能。另一方面, 基于二阶统计量的加权平均最小均方算法(算法 5)在高斯噪声下具有较好的性能, 但是在分数低阶 α 稳定分布条件下, 其性能严重退化。而本文中的算法 1 则在高斯和分数低阶 α 稳定分布条件下均具有很好的韧性。

5 结束语

本文提出了一种新的适用于 α 稳定分布噪声环境的自适应滤波算法, 这种算法通过使加权平均误差函数的 p -范数最小来实现自适应滤波。在这种算法的基础上, 本文还得到两种派生的动量 LMP 自适应算法。通过计算机仿实现 α 稳定条件下的信道均衡, 结果表明本文算法所得到的参数估计比已有 LMP 算法的结果更为优越。

参考文献

- [1] Pillai S S and Harisanakar M. Simulted performance of a DS spread spectrum system in impulsive atmospheric noise. *IEEE Trans. on Electromagn. Compat.*, 1987, 29(1): 80-82.
- [2] Bouvet M and Schwartz S C. Comparison of adaptive and robust receivers for signal detection in ambient underwater noise. *IEEE Trans. on Acoust. Speech Signal Processing*, 1989, 37(5): 621-626.
- [3] Nikias C L and Shao M. *Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications*. New York: Wiley, 1995, chapter 2.
- [4] Shao M and Nikias C L. *Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications*.

- Proc. IEEE*, 1993, 87(1): 986–1010.
- [5] Arikan O, Gelge M, and Cetin A E, *et al.* Adaptive filtering approaches for non-Gaussian stable processes. *IEEE ICASSP 95*, Detroit, USA, May 1995, 2: 1400–1403.
- [6] Aydin G, Tranrikulu O, and Cetin E. Robust least mean mixed norm adaptive filtering for alpha-stable random processes *IEEE ISCAS 97*, Hong-Kong, China, June 1997, 4: 2296–2299.
- [7] Kalluri S, and Arce G R. Adaptive weighted myriad filter algorithms for robust signal processing. *IEEE Tran. on Signal Processing*, 1998, 46(2): 322–334.
- [8] Belge M and Miller E L. A sliding window RLS-like adaptive algorithm for filtering alpha-stable noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 2000, 7(4): 86–89.
- [9] Dahanyake B W and Upton A R M. Derivation of momentum LMS learning algorithms by minimizing objective function. *IEEE International Conference on Neural Networks*, Orlando, USA, March 1993, 2: 831–835.
- 邱天爽: 男, 1954 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事非高斯非平稳随机信号分析与处理的教学研究工作.
- 杨志春: 男, 1975 年生, 硕士生, 从事非高斯 Alpha 稳定分布噪声抑制研究.
- 李小兵: 男, 1967 年生, 讲师, 博士生, 从事信号与图像处理方面的教学研究工作.
- 陈艳霞: 女, 1969 年生, 硕士, 副教授, 从事信号与图像处理方面的教学研究工作.