

交替分离算法的 Cramer-Rao 界

邵 朝 卢光跃

(西安邮电学院 388 信箱 西安 710061)

摘 要: 该文推导了交替分离算法的 Cramer-Rao 界。交替分离算法的 Cramer-Rao 界涉及到矩阵的“减”逆, 而矩阵“减”逆具有比普通 Moore-Penrose 广义逆更为宽松的定义条件, 在理论上, 一个确定矩阵有无数个“减”逆。为了建立分离算法的 Cramer-Rao 界, 该文求出了一个确定矩阵的一个特定“减”逆矩阵。根据任一确定性定理, 得到分离数据的密度分布函数, 从而获得交替分离算法的 Cramer-Rao 界。交替分离算法的 Cramer-Rao 界将多信号对信号参数估计的影响能更直观反映出来。通过对交替分离算法的 Cramer-Rao 界的讨论, 该文还给出了有关矩阵分离算子一些重要的性质。

关键词: 交替分离算法; Cramer-Rao 界; 矩阵“减”逆; 矩阵分离算子

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)03-0582-03

Alternating Separation Algorithm and Its Cramer-Rao Bound

Shao Chao Lu Guang-yue

(Institution of Xi'an Posts and Telecommunications, Xi'an 710061, China)

Abstract: This paper provides the Cramer-Rao lower bound of alternating separation algorithm. In the Cramer-Rao bound, the “-” inversion of a definite matrix must be established, which extends the theory of Cramer-Rao bound. In additional, this Cramer-Rao bound displays the multiple signal effect in the parameter estimated process. By discussion the Cramer-Rao lower bound of Alternating Separation algorithm, some properties of the signal separation operator matrix are given.

Key words: Alternating separation algorithm; Cramer-Rao bound; The “Subtractive” inversion of matrix; Signal separation matrix operator

1 引言

在有源雷达、声纳系统中, 发射一个波形已知的信号, 通过目标反射回波来确定目标的方位、距离等参数。对于任何无偏的估计算法, Cramer-Rao界表示了这些方法可能达到的估计误差的下界。从本质上讲, Cramer-Rao界是Fisher信息矩阵的引申结果。因而Cramer-Rao界的讨论一直是信号处理学科的一个重要研究课题^[1-5]。文献[2]虽然讨论了对目标估计的距离、速度和方向的Cramer-Rao界, 而且对加性噪声做出了比较一般的假定, 但是在单个信号假设前提下进行讨论的; 文献[3]建立了齐次高斯随机场下的Cramer-Rao界, 其方法是将随机场参数化, 在这些参数下获得场的均值和方差, 再进一步得到其Fisher信息矩阵, 完成场的Cramer-Rao界讨论; 文献[4, 5]在多个信号同时存在条件下, 推导出Cramer-Rao界的表达为矩阵形式^[4], 这样就无法获得多个信号同时存在时对Cramer-Rao界影响的直观的结果。到目前, 所有关于Cramer-Rao界的讨论的文献在涉及到数据模型的

概率分布函数时, 其方差矩阵都是满秩的, 这样的假设当然是依其数据特征为依据的, 但此种假设无疑大大简化了问题的讨论。本文讨论矩阵分离情形下的Cramer-Rao界, 这时加性噪声矢量由于分离矩阵的色化, 其协方差矩阵是奇异的, 因而对应多元随机变量的分布密度函数的表达式要用矩阵的“减”逆来表征。这无疑丰富了Cramer-Rao界的理论内涵。另外通过对矩阵分离情形下的Cramer-Rao界的讨论, 可以更直观地理解多信号存在环境下对单个信号参数估计的Cramer-Rao界的影响。观察多信号对单个信号参数估计的Cramer-Rao的影响。从基本原理上揭示出多信号同时存在情况下, 对估计误差的影响趋势。另外, 在本文的讨论中, 也揭示出传统Cramer-Rao界讨论中不曾出现的一些新问题。这对深入理解Cramer-Rao界也有一定的现实意义。

2 矩阵分离的信号模型

假设有 D 个平面波信号, 照射在由 M 个各向同性的阵元组成的均匀线阵上, 则阵列输出数据具有形式:

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^D \mathbf{a}(\theta_i) s_i(t) + \mathbf{n}(t), \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

式中 $\mathbf{a}(\theta_i)$ 表示信号的导向矢量, 记参数 $\omega_i = (2\pi d/\lambda)$

2005-06-27 收到, 2005-12-08 改回

国家自然科学基金(60372036), 总装部空间技术国家重点实验室开放研究课题(51473020203QT6702)和陕西省自然科学基金(2002F24)资助课题

$\sin(\theta_i)$, $s_i(t)$ 为第 i 个信号波形, $\mathbf{n}(t)$ 为加性噪声矢量。文献[5]证明了存在矩阵算子系 $\mathbf{Q}_i (1 \leq i \leq D)$, 满足关系式

$$\mathbf{Q}_i \mathbf{a}(\theta_j) = \delta_{i,j} \mathbf{a}(\theta_j) \quad (2)$$

文献[6]证明了假设 D 个平面波信号方位参数“已知”情况下, 矩阵算子 \mathbf{Q}_i 具有下面的形式(以矩阵算子 \mathbf{Q}_D 为例, 其他矩阵算子 \mathbf{Q}_i 以类似形式构造):

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_D &= \mathbf{I} - \mathbf{A}_{D-1}(\mathbf{H}_{D-1}^{-1} + \beta_D \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1}) \mathbf{A}_{D-1}^H \\ &\quad + \beta_D \mathbf{A}_{D-1} \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{v} \mathbf{a}_D^H \end{aligned} \quad (3)$$

其中矩阵 $\mathbf{H}_{D-1} = \mathbf{A}_{D-1}^H \mathbf{A}_{D-1} = (\alpha_{k,j})$, $\mathbf{A}_{D-1} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{D-1}]$; 矢量 $\mathbf{v} = \mathbf{A}_{D-1}^H \mathbf{a}_D$; 其中 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i)$ 。常数 $\beta_D = (1 - \chi_D)^{-1}$, $\chi_D = \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{v}$ 。显然 β_D 和 χ_D 为实常数。应该注意的是在式(3)中, 只有矢量 \mathbf{v} 及 \mathbf{a}_D 以及常数 β_D 和 χ_D 与待估计参数 θ_D 有关。

由式(3)和式(2), 算子 \mathbf{Q}_D 是 $M \times M$ 阶矩阵, 它有 $D-1$ 个零特征矢量, 有一个以 1 为特征值的特征矢量。文献[5]证明了算子 \mathbf{Q}_D 的这些特征矢量的唯一性, 因此矩阵 \mathbf{Q}_D 的秩为 $M-D+1$, 且矩阵 \mathbf{Q}_D 的其余非零特征矢量及特征值完全由它的零特征矢量与 1 特征矢量确定。算子 \mathbf{Q}_D 还有下面一些以命题形式表述的性质。

命题 1 (零空间特性) $\mathbf{Q}_D \mathbf{A}_{D-1} = \mathbf{0}$ (4)

命题 2 (幂等特性) $\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D = \mathbf{Q}_D$ (5)

由矩阵 \mathbf{Q}_D 的幂等特性, 可得 \mathbf{Q}_D 的非零特征值全为 1, 1 特征值个数等于 $M-D+1$ 。

命题 3 (右作用特性)^[6]

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{D-1}^H \mathbf{Q}_D = \beta_D \mathbf{v} \mathbf{a}_D^H - \beta_D \mathbf{v} \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{A}_{D-1}^H \\ \mathbf{a}_D^H \mathbf{Q}_D = \beta_D (\mathbf{a}_D^H - \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{A}_{D-1}^H) \end{cases} \quad (6)$$

比较命题 3 与命题 1 和命题 2 的结论, 可以看出矩阵 \mathbf{Q}_D 的左特征矢量具有更复杂的结构。

命题 4^[6] $\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H = \mathbf{Q}_D + \beta_D \mathbf{a}_D \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{A}_{D-1}^H$ (7)

推论 1 矢量 \mathbf{a}_D 是矩阵 $\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H$ 的一个非零特征矢量, 对应特征值为 β_D 。

定义 1 对于给定矩阵 \mathbf{X} , 若矩阵 \mathbf{Y} 满足 $\mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{X} = \mathbf{X}$, 称矩阵 \mathbf{Y} 为矩阵 \mathbf{X} 的“减”逆(也被称为{1}-逆), 记为 \mathbf{X}^- 。容易验证。

命题 5 矩阵 $\mathbf{Q}_D + \beta_D \mathbf{a}_D \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{A}_{D-1}^H + \lambda \mathbf{a}_D \mathbf{a}_D^H$ (λ 为确定实常数)是 $\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H$ 的一个“减”逆。同样容易验证。

命题 6 当 $\lambda = \beta_D^{-1} - \beta_D$ 时, 矩阵 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^- = \mathbf{Q}_D + \beta_D \mathbf{a}_D \mathbf{v}^H \mathbf{H}_{D-1}^{-1} \mathbf{A}_{D-1}^H + \lambda \mathbf{a}_D \mathbf{a}_D^H$ 与 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)$ 互为对方的一个“减”逆。

3 交替分离算法的Cramer-Rao界的建立

用矩阵算子 \mathbf{Q}_D 作用于式(1)两端, 由式(2)得^[6-8]

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{Q}_D \mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(\theta_D) s_D(t) + \mathbf{Q}_D \mathbf{n}(t) \quad (8)$$

设 $\mathbf{n}(t)$ 为零均值白复高斯随机过程, 即服从 $N(0, \sigma \mathbf{I})$ 分布, 且设 $\mathbf{n}(t)$ 与信号统计独立。这样矢量 $\mathbf{x}(t)$ 的概率密度函数

为^[4, 7, 9],

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}(1), \dots, \mathbf{x}(N)) \\ &= \frac{1}{(\sigma \pi)^{mN} \gamma} \exp \left\{ - \left(1/\sigma \right) \sum_{t=1}^N [\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}(\theta_D) s_D(t)]^H \right. \\ & \quad \left. \cdot (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^- [\mathbf{x}(t) - \mathbf{a}(\theta_D) s_D(t)] \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{M-D}$, 而 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{M-D}$ 表示矩阵 $\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H$ 的非零特征值。 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-$ 表示矩阵 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)$ 的“-”逆^[9], 且表达式(9)与矩阵 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)$ 的“-”逆的选择无关^[9]。

定理 1 由式(9), 参照文献[4]的方法, 可证明, 关于参数 θ 的Cramer-Rao界有如下表达式:

$$\begin{aligned} \text{CRB}^{-1}(\omega_D) &= N \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-}{\partial \omega_D} (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^- \right]^2 \right\} \\ &\quad - \frac{N}{m} \text{tr}^2 \left\{ \frac{\partial (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-}{\partial \omega_D} (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^- \right\} \\ &\quad + 2N \text{SNR} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{d}}^H(\theta_D) [\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{a}}(\theta_D) (\tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_D) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\theta_D)^{-1} \tilde{\mathbf{a}}^H(\theta_D) \right] \tilde{\mathbf{d}}(\theta_D) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

其中列矢量 $\mathbf{d}(\theta_D) = [\partial \mathbf{a}(\omega) / \partial \omega]_{\omega=\omega_D}$; $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_D) = (\sqrt{\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H})^- \cdot \mathbf{a}(\theta_D)$; $\tilde{\mathbf{d}}(\theta_D) = (\sqrt{\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H})^- \mathbf{d}(\theta_D)$ 。

将式(10)与文献[4]比较, 这时的单信号的 $\text{CRB}^{-1}(\omega_D)$ 由两部分组成, 第二部分在形式上完全与文献[4]的单信号的 $\text{CRB}^{-1}(\omega_D)$ 相同; 而第一部分是第“ D ”个信号与“其他”信号相关联的因子, 反映矩阵 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-$ 关于参数 ω_D 变化率, 实质上反映的是多个信号之间的关联程度。由式(3), 若第“ D ”个信号与“其他”信号在空域正交, 则矩阵 $(\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-$ 与参数 ω_D 无关, 这时, 第一部分是零。式(10)蜕化成单信号情形。

定理 2 若 $D=1$, 式(10)为

$$\text{CRB}^{-1}(\omega) = NM(M^2 - 1) \frac{\text{SNR}}{6} \quad (11)$$

这些与当前文献中的结果是一致的^[4]。

定理 3 对于加性噪声功率的估计的CRB, 有表达式

$$\text{CRB}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{mN} - \frac{\sigma^2}{m^2} \text{tr}^2 \left\{ \frac{\partial (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^-}{\partial \omega_D} (\mathbf{Q}_D \mathbf{Q}_D^H)^- \right\} \text{CRB}(\omega_D) \quad (12)$$

其中 $m = M - D + 1$ 。当信号个数 $D=1$ 时, $\text{CRB}(\sigma) = \sigma^2 / (MN)$, 这些与当前文献中的结果是一致的^[4]。

4 计算机仿真实验

假设均匀线阵的阵元个数 $M=10$, 阵元间距 d 等于信号波长的一半。这样的阵列半功率波瓣宽度约为 10° 。取时域快拍数 $N=1$, 被考察信号功率和噪声功率也同时为 1。设有 3 个或 2 个信号, 它们的方位参数为 $(-6^\circ, -3^\circ, \theta)$ 和 $(-3^\circ, \theta)$, 以此来考察函数 $\text{CRB}(\theta)$ 的变化, 基此来考察多个信号对参数估计的相互影响。如图 1 所示。图 2 中画出了在同样条件下函数 $\text{CRB}(\sigma)$ 的变化曲线。从图中可以看出, 矩阵分离算法估计的Cramer-Rao下界不但与所用阵列孔径有

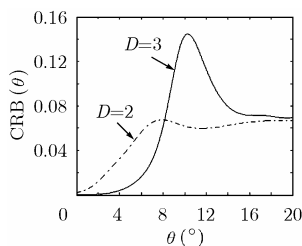


图1 方位参数的Cramer-Rao界随信源个数及信号间距的变化曲线

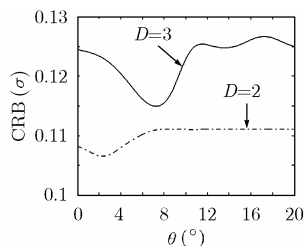


图2 加性噪声功率参数的Cramer-Rao界随信源个数及信号间距的变化曲线

关,而且也与待估计其方位参数的信号个数有关。这样也就从更深层次揭示了信号参数估计误差与内因及外在因素的关联性。

5 结束语

通过对矩阵分离算法所对应的Cramer-Rao界的讨论,揭示了矩阵分离算法对信号参数估计误差与多种因素的关联关系。使得对矩阵分离算法本身以及Cramer-Rao界有了更为深刻的认知。

参考文献

- [1] Kay S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing. vol. I: Estimation Theory. Prentice Hall PTR, 1993.
- [2] Dogandzic A and Nehorai A. Cramer-Rao bounds for estimating range, velocity, and direction with an active array. *IEEE Trans. on SP*, 2001, 49(6): 1122–1137.
- [3] Francos J M. Cramer-Rao bound on the estimation accuracy of complex-valued homogeneous Gaussian random fields. *IEEE Trans. on SP*, 2002, 50(3): 710–724.
- [4] Stoica P and Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound. *IEEE Trans. on ASSP*, 1989, 37(5): 720–741.
- [5] Friedlander B and Porat B. The exact Cramer-Rao bound for Gaussian autoregressive processes. *IEEE Trans. on AES*, 1989, 25(1): 3–8.
- [6] Shao Chao, Lu Guangyue, and Bao Zheng. The matrix form of alternating separation algorithm. ICSP04, Beijing, China, 2004, vol(I): 69–72.
- [7] Shao Chao, Lu Guangyue, and Bao Zheng. A novel direction of arrival estimator. *Journal of Electronics (China)*, 2004, 21(2): 97–103.
- [8] Shao Chao, Lu Guangyue, and Bao Zheng. Some properties of AS,AP and ASAP algorithm. *Science in China (F)*, 2004, 47(4): 409–420.
- [9] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用. 北京: 北京工业大学出版社, 1996.

邵朝: 男, 1955年生, 博士, 教授, 主要研究方向为阵列信号处理、CDMA多用户检测算法及OFDM关键技术。

卢光跃: 男, 1971年生, 博士, 教授, 主要研究方向为雷达成像技术、OFDM及CDMA关键技术。