

# 基于最小全变差的 SAR 图像自聚焦算法

甘荣兵 王建国

(电子科技大学电子工程学院 成都 610054)

**摘要:** 该文分析了方位一维图像的全变差范数随二次相位误差的变化情况, 得到全变差范数是二次相位误差的单峰函数的结论, 且在二次相位误差等于零时全变差范数最小。从而利用全变差范数作为性能函数, 采用黄金分割最优化算法, 通过循环迭代得到自聚焦的 SAR 图像。实验结果表明此算法在处理二次相位误差时优于相位梯度自聚焦算法。通过算法复杂度的分析表明该算法的计算量约为相位梯度自聚焦的二分之一。

**关键词:** 合成孔径雷达; 相位误差; 自聚焦; 全变差

中图分类号: TN957.52

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)01-0012-03

## Minimum Total Variation Autofocus Algorithm for SAR Imaging

Gan Rong-bing Wang Jian-guo

(College of Electronic Engineering, UESTC, Chengdu 610054, China)

**Abstract:** Minimum Total Variation Autofocus (MTVA) algorithm for SAR imaging is studied. Firstly, the relationship between total variation of SAR image and 2nd-order phase error is analyzed. The results show that total variation is a single peak function of 2nd-order phase error. Total variation reaches minimum when zero phase error. Then total variation norm is used as performance function. Golden selection method is adopted to get focused SAR image. Finally, experimental results show that MTVA algorithm has good performance and is better than Phase Gradient Autofocus (PGA) algorithm. Study of complexity shows that MTVA's computation amount is nearly half of PGA's.

**Key words:** Synthetic Aperture Radar (SAR); Phase error; Autofocus; Total variation

### 1 引言

在合成孔径雷达(SAR)成像系统中, 由于飞行器运动误差等因素造成方位向二次相位误差, 从而使输出 SAR 图像散焦, 影响了 SAR 获取信息的能力。特别是国内导航参数误差较大, 飞行器的速度的测量误差较大。因此, 合成孔径雷达的自聚焦算法的研究格外重要, 引起了国内外学者的研究, 得到了一些自聚焦算法。其中 Eichel 等人研究的相位梯度自聚焦(PGA)算法<sup>[1,2]</sup>效果较好, 并且可以处理高阶的相位误差。但是 PGA 算法计算量较大, 而且输出图像并没有达到最好。国内学者研究了对比度最优自聚焦算法<sup>[3]</sup>, 但是对比度最优只是人的主观感受, 缺乏理论依据。

本文研究了基于图像全变差范数最小的自聚焦(MTVA)算法。首先分析了 SAR 图像的全变差函数与二次相位误差的关系, 然后根据全变差范数的性能, 得到了自聚焦算法。最后用仿真实验作了验证。比较了 MTVA 算法和 PGA 算法的复杂度。

### 2 SAR 图像二次相位误差与全变差

#### 2.1 二次相位误差对 SAR 图像的影响

对于 SAR 方位向成像, 在只考虑二次相位误差, 忽略

多普勒质心的情况下, 点目标方位信号可表示成

$$s_0 = \exp(j\pi kt^2), \quad |t| < T_s/2 \quad (1)$$

其中  $T_s$  是合成孔径时间,  $k$  是多普勒斜率。

如果参考信号存在二次相位误差系数  $\Delta k$ , 参考信号为

$$s_f = \exp[j(k + \Delta k)t^2], \quad |t| < T_s/2 \quad (2)$$

滤波后得到点目标成像后的结果, 即点扩展函数(PSF)为<sup>[4]</sup>

$$A(t) = C(P) - C(Q) + j[S(P) - S(Q)] \quad (3)$$

其中  $C(\cdot)$  和  $S(\cdot)$  表示菲涅耳积分。  $P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Delta\omega t}{2n} + n \right)$ ,  $Q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\Delta\omega t}{2n} - n \right)$ ,  $n = \sqrt{2\Phi_{2m}}$ ,  $\Phi_{2m} = \frac{\pi}{4} T_s^2 \Delta k$ ,  $\Delta\omega$  是信号带宽。

从式(3)可见, 系统的点扩展函数是一个复杂的函数。当二次相位误差为零时, 点扩展函数为辛格函数, 相位为  $\pi/4$ 。随着相位误差的增加主瓣展宽、主瓣峰值减小、旁瓣电平增加, 点扩展函数中有残留的二次相位。

设不同位置处的目标的向后散射特性为:  $\sigma_i \exp(j\varphi_i)$ , 它是不随时间变化的常量。输出的方位向的一维复图像为

$$g(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i A(t - \tau_i) \exp(j\varphi_i) \quad (4)$$

由于目标是不同位置的目标点, 因此

$$\tau_i \neq \tau_j, \quad \text{当 } i \neq j \quad (5)$$

## 2.2 全变差范数

全变差范数的定义为<sup>[5]</sup>

$$\|f\|_V = \int_R |f'(x)| dx \quad (6a)$$

$$\|f\|_V = \sum_{n=1}^N |f(n+1) - f(n)| \quad (6b)$$

式(6a)是可微函数的全变差范数, 式(6b)是离散函数的全变差范数。全变差范数反映了函数的振荡或起伏特性。全变差范数越大, 函数的振荡越剧烈。

## 2.3 SAR 图像全变差范数与二次相位误差的关系

下面我们通过推导分析 SAR 图像的全变差范数与二次相位误差的关系。将式(4)对空间位置求导, 得到图像的导数为

$$g'(t) = \sum_{i=1}^N \sigma_i A'(t - \tau_i) \exp(j\varphi_i) \quad (7)$$

则方位向复图像的全变差函数为

$$\|g(t)\|_V = \int \left| \sum_{i=1}^N \sigma_i \exp(j\varphi_i) A'(t - \tau_i) \right| dt \quad (8)$$

由于  $A(t)$  是系统的点扩展函数, 其支集是目标位置附近的小区域, 再由式(5), 可以认为各个目标信号的支集交迭较少, 可将式(8)中的积分与绝对值运算交换顺序, 得到

$$\|g(t)\| \approx \int \sum_{i=1}^N |\sigma_i \exp(j\varphi_i) A'(t - \tau_i)| dt \quad (9)$$

因此可以得到

$$\|g(t)\|_V \approx \int |A'(t)| dt \cdot \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (10)$$

其中  $V = \int |A'(t)| dt$  是点目标经雷达系统的点扩展函数的全变差范数,  $\sum_{i=1}^N \sigma_i$  是由场景决定的常数。因此  $\|g(t)\|_V$  与  $V$  成正比,  $\|g(t)\|_V$  随  $\Delta k$  的变化趋势与  $V$  随  $\Delta k$  的变化趋势相同。

由式(3)可见  $V$  的形式很复杂, 当系统参数确定以后,  $V$  只与相位误差有关。我们用数值方法得到了  $V$  与相对二次相位误差  $\Delta k/k_0$  的关系, 如图1所示。其中采用的参数是 SIR-C 的参数, 横坐标表示相对二次相位误差(二次相位误差系数与调频斜率的比值)。纵坐标是全变差范数  $V$  的归一化结果。可见,  $V$  是极小值在  $\Delta k$  等于零处的单峰函数。再根据式(10)可以得到 SAR 图像的全变差函数也是二次相位误差  $\Delta k$  的单峰函数, 最小值出现在  $\Delta k = 0$  处。

图2给出了面目标图像的全变差函数与  $\Delta k/k_0$  的关系,

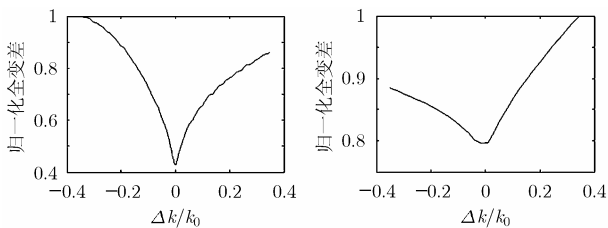


图1 PSF的全变差与  $\Delta k/k_0$  的关系曲线

图2 图像的全变差与  $\Delta k/k_0$  的关系曲线

可见, 对于面目标同样是  $\Delta k = 0$  时全变差函数达到最小值。这从实验证明了从式(8)到式(9)的近似是合理的。图中曲线的波纹状是不同散射单元间的耦合造成的, 但是这种波纹不影响二次相位误差的搜索。

全变差函数在相位误差最小时达到最小的另一个解释: 当系统存在二次相位误差时, 目标信号压缩后残留了二次相位, 残留的二次相位将使图像散焦、旁瓣增高, 从而使全变差范数增大。二次相位误差越大, 旁瓣越高, 全变差范数越大。

## 3 基于最小全变差的自聚焦算法

由于 SAR 图像全变差函数具有很好的单峰特性, 因此可以采用简单的最优化方法搜索使全变差函数达到最小时的匹配函数, 然后进行成像处理得到匹配的输出图像。

这样我们的性能函数为

$$J = \|g(n)\|_V = \sum_{n=1}^N |g(n+1) - g(n)| \quad (11)$$

由于是单峰函数, 可以采用黄金分割法对二次相位误差进行搜索<sup>[6]</sup>, 算法步骤如下:

(1) 设定停止循环的最小误差  $\varepsilon > 0$ ; 确定调频斜率的搜索区间  $[a, b]$ , 我们取  $a = 0.5k_0$ ,  $b = 1.5k_0$ 。(这个范围可以满足我们聚焦的要求, 因为调频斜率不会超出此范围。)作方位 FFT, 得到方位频谱图;

(2) 计算  $k_2 = a + \frac{(-1 + \sqrt{5})}{2}(b - a)$ , 生成参考函数并成

像处理, 计算  $y_2 = J(k_2)$ ;

(3) 计算  $k_1 = a + b - k_2$ , 生成参考函数并成像处理, 计算  $y_1 = J(k_1)$ ;

(4) 若  $|k_1 - k_2| < \varepsilon$ , 则取  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ , 得到聚焦图像

$g_k$ , 停止; 否则转(5);

(5) 若  $y_1 \leq y_2$ , 则置  $b = k_2$ ,  $k_2 = k_1$ ,  $y_2 = y_1$  转(3); 否则置  $a = k_1$ ,  $k_1 = k_2$ ,  $y_1 = y_2$ , 计算  $k_2 = a + b - k_1$ , 生成参考函数并成像处理, 计算  $y_2 = J(k_2)$ , 转(4)。

## 4 仿真实验结果

我们对分析得到的算法进行了仿真实验, 对 SAR 回波信号进行方位自聚焦处理。得到了算法的搜索精度, 将自聚焦结果与相位梯度自聚焦结果作了比较。实验中 SAR 的工作模式为条带式。

### 4.1 调频斜率搜索精度

图3给出了在搜索过程中的  $k$  值变化情况。设置允许误

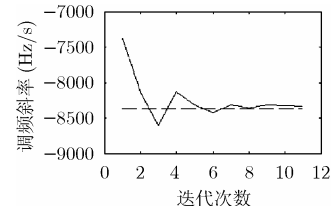
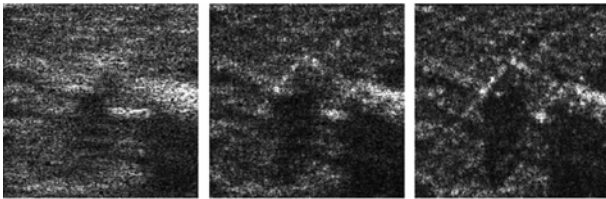


图3 调频斜率搜索曲线图

差为 10Hz/s, 在这个精度范围内聚焦效果是可以接受的。图中实线代表每次循环得到的  $k$  值, 虚线代表真实的  $k$  值。从图中可见, 搜索过程有较好的收敛性, 且最终得到的估计值与真实值的误差很小(小于 1%)。

#### 4.2 自聚焦图像比较

图 4 给出了自聚焦结果。图 4(a)是未采用自聚焦处理的散焦图像, 图 4(b)是相位梯度自聚焦的结果, 图 4(c)是最小全变差自聚焦的结果。可见, MTVA 算法有很好的自聚焦效果, 其结果明显好于 PGA 算法。



(a) 散焦图像 (b) PGA 结果 (c) MTVA 结果

图 4 自聚焦处理结果比较

### 5 算法复杂度分析

算法复杂度是 SAR 成像处理的一个重要因素, 尤其是实时成像处理, 要求尽可能减小计算量。因此分析了本文 MTVA 算法的复杂度, 并且与 PGA 算法作了比较。首先设图像方位长度为  $M$ , 选取的  $N$  条一维图像作估计。计算量按复数乘法或加法的次数计。

#### 5.1 MTVA 算法复杂度

分析 MTVA 每次循环的计算量。每次循环的主要计算量是作一次成像处理和计算图像全变差。其中成像处理包括 (1) 参考信号的重新生成及其 FFT, 计算量为  $M + (3/2)M \log_2 M$ 。(2) 参考信号与图像相乘及图像的 IFFT, 计算量为  $MN + (3/2)NM \log_2 M$ 。计算全变差的计算包括求差、绝对值、求和, 计算量为  $3MN$ 。一次循环的总计算量为  $(3/2)NM \log_2 M + 4MN + (3/2)M \log_2 M + M$ , 因此一次循环的计算量阶次为  $O[(3/2)NM \log_2 M]$ 。

#### 5.2 PGA 算法复杂度

PGA 算法的每次循环包括: (1) 找出方位方向的幅度最大点并移至中心, 再作加窗运算。(2) 作 FFT, 计算出相位梯度  $PG = \sum_{n=1}^N \text{Im}[G(m, n)G^*(m, n)] / \left( \sum_{n=1}^N |G(m, n)| \right)$ 。(3) 计算出相位误差并作频域修正。(4) 作 IFFT 得到图像。

算幅度要作  $MN$  次运算, 略去移动过程的计算量, 加窗计算量为  $MN$ , 总共  $2MN$ ; 作 FFT 运算量为

$(3/2)MN \log_2 M$ , 计算相位梯度计算量约为  $5MN$  次; 计算相位误差并作频域修正运算量约为  $MN$ ; 作 IFFT 运算量为  $(3/2)MN \log_2 M$ 。总的计算量约为  $3MN \log_2 M + 8MN$ , 一次循环的计算量的阶次为  $O(3NM \log_2 M)$ 。

可见, MTVA 的一次循环计算量约为 PGA 的二分之一, 两者在循环次数上差别不大, 因此 MTVA 总的计算量约为 PGA 的二分之一。我们用 MATLAB 仿真, MTVA 和 PGA 一次循环的计算时间分别为 1.125s 和 2.844s。

### 6 结束语

根据理论分析, 在 SAR 成像处理中, 二次相位误差导致图像全变差范数增大。全变差范数是二次相位误差的单峰函数。采用全变差范数最小的准则进行自聚焦处理, 处理结果表明 MTVA 算法是可行的, MTVA 算法效果优于 PGA 算法, 并且运算量减小了近二分之一。PGA 比 MTVA 的优势在于 PGA 可以处理更高阶的相位误差, 而 MTVA 只是针对二次相位误差。

### 参考文献

- [1] Wahl D E, Eichel E H, and Ghiglia D C, *et al.* Phase gradient autofocus—A robust tool for high resolution SAR phase correction, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1994, 30(3): 827–835.
- [2] Eichel P H and Jakowatz C V. Phase-gradient algorithm as an optimal estimator of the phase derivative. *Optics Letters*, 1989, 14(20): 1101–1103.
- [3] 刘月花, 荆麟角. 对比度最优自聚焦算法. 电子与信息学报, 2003, 25(1): 24–30.  
Liu Yue-hua and Jin Lin-jiao. Contrast optimization autofocus algorithm. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2003, 25(1): 24–30.
- [4] 张澄波. 综合孔径雷达——原理、系统分析与应用. 北京: 科学出版社, 1989: 163–177.
- [5] Mallat Stephane. A Wavelet Tour of Signal Processing, Second Edition. Academic Press, 1999: 24–25
- [6] 《数学手册》编写组. 数学手册, 北京: 高等教育出版社, 1979: 923–925.

甘荣兵: 男, 1975 年生, 博士生, 研究方向为雷达信号处理。

王建国: 男, 1954 年生, 教授, 从事合成孔径雷达成像、雷达目标识别、合成孔径雷达对抗技术等。