

基于分数低阶统计量的空域-模糊域 DOA 估计算法

何 劲 刘 中

(南京理工大学电子工程系 南京 210094)

摘要: 该文提出一种非高斯 SaS 噪声背景下非平稳信号的 DOA 估计算法。算法首先定义基于分数低阶统计量的空间模糊函数, 利用信号在模糊域中的不同特征将信号分离; 然后对不同的信号, 选择信号模糊函数对应的模糊点的平均进行子空间分析; 最后利用 MUSIC 算法实现 DOA 的估计。与基于分数低阶统计量的空域处理方法相比, 该文提出的算法利用了信号在模糊域中的信息, 提高了算法的估计精度。计算机仿真证明了算法的有效性。

关键词: SaS 噪声; DOA 估计; 分数低阶统计量; 空间模糊函数

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)01-0109-04

Spatial-Ambiguity-Domain based DOA Estimation Algorithm Using Fractional Lower Order Statistics

He Jin Liu Zhong

(Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: In this paper, a DOA estimation algorithm for non-stationary signals embedded in impulsive SaS noise environments is proposed. Firstly, a Spatial Ambiguity Function based on the Fractional Lower Order Statistics (FLOS-SAF) is defined to separate signals by exploiting the ambiguity domain characteristic. Then the average of ambiguity-domain points is carefully selected to perform the subspace analysis. Finally the MUSIC algorithm is applied to obtain DOA estimates. Comparison with the spatial processing method using fractional lower order statistics, the proposed algorithm provides more precise DOA estimates by using the ambiguity domain information of signals. Computer simulation results show the effectiveness of the algorithm.

Key words: SaS noise; DOA estimation; Fractional lower order statistics; Spatial ambiguity function

1 引言

DOA 估计是阵列信号处理的一个重要的研究领域, 在无源探测、雷达、声纳、通信等领域具有广泛的应用^[1]。经过数十年的发展, DOA 估计理论已经比较完善。传统的 DOA 估计大都是基于高斯模型假设的, 即假设信号和噪声均服从高斯分布, 在这种假设下, 利用阵列信号的二阶或高阶累积量可获得较理想的结果。然而, 在实际情况下, 噪声往往是非高斯的, 如海杂波噪声、大气噪声、无线信道噪声等^[2]。近年来的研究发现, 这些噪声模型更适合用 SaS 过程来表示; 但这类信号模型不存在二阶及以上矩, 这就使得传统的基于二阶或高阶累积量的分析方法不再适用于 SaS 噪声环境。

针对 SaS 噪声环境下的 DOA 估计问题, 文献[3]给出了最优的最大似然 DOA 算法, 但算法由于需要多维搜索, 计算量大限制了它的实际应用。文献[4]基于两个 SaS 随机变量的共变(Covariation), 构造了阵列信号的共变矩阵, 提出了类似 MUSIC 算法的 ROC-MUSIC 算法, 与最大似然算法相比, ROC-MUSIC 算法降低了计算量。但 ROC-MUSIC 算

法假设信号和噪声都服从 SaS 分布, 这个假设并不合理, 因为在现实中, 信号通常是有限能量的。文献[5]在文献[4]的基础上, 定义了阵列信号的分数低阶矩(Fractional Lower Order Moment, FLOM), 构造了一个阵列接收的 FLOM 矩阵, 提出 FLOM-MUSIC 算法, 将 ROC-MUSIC 算法中的信号模型假设推广到更一般的情况, 给出了一种 SaS 噪声环境下 DOA 估计的基本框架, 并通过仿真发现 FLOM-MUSIC 算法与 ROC-MUSIC 算法具有相同的性能。国内也有学者利用 FLOM 进行 SaS 噪声环境下的 DOA 估计的研究^[6], 分析了基于 FLOM 的 TLS-ESPRIT 算法的性能。

但是, 应该注意到在业已发展的 SaS 噪声环境下 DOA 估计算法大都是基于阵列信号数据的分数低阶矩特征, 而对一些特殊的非平稳信号来说, 利用信号本身的特性可以提高 DOA 估计的精度。Amin 等^[7-9]将时频分析引入阵列信号处理中, 提出空间时频分布的概念, 利用空间时频分布矩阵进行子空间分析, 提高了 DOA 估计算法的性能。本文利用非平稳信号的模糊域的特性, 定义基于分数低阶统计量的空间模糊函数(Fractional Lower Order Statistics based Spatial Ambiguity Function, FLOS-SAF), 利用信号在模糊域中的不同分布情况将信号分理, 并提取信号模糊函数对应的模糊点的平均进行子空间分析, 结合 MUSIC 算法实现 DOA 的

估计。最后,在计算机仿真中,我们假设信号为线性调频信号,将本文提出的算法和 FLOM-MUSIC 算法进行了比较,结果表明本文算法的成功概率和估计精度都要优于 FLOM-MUSIC 算法。

2 信号模型与噪声模型

假设一个 L 元等增益的均匀线阵,有 $P(P < L)$ 个远场独立信号辐射到线阵上。设阵元间距为 d , 设信号方向分别为 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_P$, 以阵列的第一阵元为基准, 各信号源在基准点的复包络分别为 $s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)$, 则在第 m 个阵元上第 t 次快拍的采样值为

$$x_m(t) = \sum_{i=1}^P s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(m-1)d \sin \theta_i} + n_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, L \quad (1)$$

式中 $n_m(t)$ 表示第 m 个阵元上的噪声。将各阵元上第 t 次快拍的采样写成向量形式:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (2)$$

式中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_P)] \quad (3)$$

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[1, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}d \sin \theta_i}, \dots, e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(L-1)d \sin \theta_i} \right]^T \quad (4)$$

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_P(t)]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{n}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_L(t)]^T \quad (6)$$

上面的模型中我们假设噪声是零均值独立同分布的 SaS 型随机过程, 其分布的特征函数为

$$\varphi(t) = e^{(j\delta t - \gamma|t|^\alpha)} \quad (7)$$

其中 α 为特征指数, $0 < \alpha \leq 2$; δ 为位置参数; γ 为分布的偏移系数, 相当于高斯分布的方差。当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, δ 为 SaS 概率密度的中值; 当 $1 < \alpha \leq 2$ 时, δ 为 SaS 概率密度的均值; 当 $\delta = 0, \gamma = 1$ 时, SaS 型随机过程服从标准 SaS 分布。此时, 它的概率密度函数为^[10]

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \Gamma(\alpha k + 1) x^{-\alpha k} \sin\left(\frac{k\alpha\pi}{2}\right), & 0 < \alpha < 1 \\ \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}, & \alpha = 1 \\ \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \Gamma\left(\frac{2k+1}{\alpha}\right) x^{2k}, & 1 < \alpha < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x^2}{4}\right)}, & \alpha = 2 \end{cases} \quad (8)$$

其中 $\Gamma(t)$ 为 gamma 函数。

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (9)$$

图 1 是不同 α 值时标准 SaS 分布概率密度曲线。从图中我们可以发现 SaS 分布的一个重要特性: 特征指数 α 越小, SaS 概率密度的拖尾越长, 这就意味着 SaS 型的随机变量的特征指数越小, 冲击性就越强。高斯分布是 SaS 分布的极限形式。

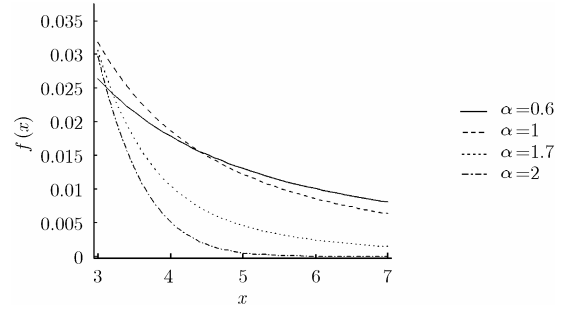


图 1 SaS 分布概率密度曲线

和高斯分布不同的是, 特征指数为 $\alpha (\alpha \neq 2)$ 的 SaS 分布, 其二阶以上矩都不存在, 即, $E\{|x|^p\} = \infty, p \geq 2$ 只存在小于 α 的矩, 即 $E\{|x|^p\} = \infty, p \geq \alpha, E\{|x|^p\} < \infty, p < \alpha$ 。通常用共变来表征两个特征指数为 $1 < \alpha \leq 2$ 的 SaS 分布的随机变量, 即

$$[X, Y]_\alpha = \frac{E\{XY^{(p-1)}\}}{E\{|Y|^p\}} \gamma_Y, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (10)$$

其中 $Y^{(\beta)} = |Y|^{\beta-1} Y^*$, $*$ 表示复数共轭, 可以发现共变是分数低阶矩的函数。而变量 X, Y 间的分数低阶矩定义为

$$f[X, Y] = E\{XY^{(p-1)}\}, \quad 1 \leq p < \alpha \quad (11)$$

3 基于分数低阶矩的空间模糊函数

我们知道非平稳随机信号 $x(t)$ 的模糊函数的定义^[11] 为

$$D(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} e^{j2\pi\nu t} dt \quad (12)$$

当存在服从高斯分布的噪声时, 模糊函数能够很好地反映信号能量在模糊域中的分布情况。但是, 当存在服从 SaS 分布的噪声时, 式(12)将是一个无界统计量, 不能反映信号的能量分布状况。为此, 我们引入分数低阶统计量, 定义非平稳随机信号基于分数低阶矩的模糊函数为:

定义 1 (基于 FLOM 的模糊函数) 设非平稳信号 $x(t)$ 中包含 SaS 分布的随机变量, 我们定义基于 FLOM 的模糊函数为

$$D^p(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{x\left(t + \frac{\tau}{2}\right)x^{(p-1)}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} e^{j2\pi\nu t} dt \quad (13)$$

从式(13)可以看到基于 FLOM 的模糊函数是传统的模糊函数的自然推广, 当式(13)中 $p = 2$ 时, 式(13)就退化到传统模糊函数。

定义 2 (基于 FLOM 的空间模糊函数) 设矢量信号 $\mathbf{x}(t)$ 中包含 SaS 分布的随机变量, 基于 FLOM 的空间模糊函数为

$$D^p(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left\{\mathbf{x}\left(t + \frac{\tau}{2}\right)\mathbf{x}^{(p-1)}\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right\} e^{j2\pi\nu t} dt \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{x}^{(p)} = [x_1^{(p)}, \dots, x_L^{(p)}]^T \quad (15)$$

根据 FLOM 的定义, 定义的式(14)在 $p < \alpha$ 时是有界的。因此, 在以后的分析中, 均假设 $p < \alpha$ 。在实际应用中, α

的值可以通过观测信号时域数据估计得到^[12]。下面的定理将分析阵列接收数据基于 FLOM 的空间模糊函数的结构特点。

定理 若信号 $\boldsymbol{x}(t)$ 满足式(2), 则式(14)可以表示成:

$$\boldsymbol{D}^p(\tau, \nu) = \boldsymbol{A} \boldsymbol{T} \boldsymbol{A}^H + \eta \boldsymbol{I} \quad (16)$$

其中 $\boldsymbol{D}^p(\tau, \nu)$ 的第 (i, k) 个元素 $D_{ik}^p(\tau, \nu)$ 表示成

$$D_{ik}^p(\tau, \nu) = \sum_{q=1}^P \sum_{r=1}^P a_i(\theta_q) T_{qr} a_k^*(\theta_r) + \eta \delta_{ik} \quad (17)$$

其中

$$T_{qr} = \int_{-\infty}^{\infty} E \left[s_q \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \left| \sum_{r=1}^P s_r \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + n_m(t) \right|^{p-2} \cdot s_r^* \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right] e^{j2\pi t \nu} dt \quad (18)$$

$$\eta = \int_{-\infty}^{\infty} E \left[n_i \left(t + \frac{\tau}{2} \right) \left| \sum_{r=1}^P s_r \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + n_m(t) \right|^{p-2} \cdot \left[\sum_{r=1}^P s_r \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + n_k \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]^* \right] e^{j2\pi t \nu} dt \quad (19)$$

证明 略。

可以发现, 式(16)的结构可以用来进行 DOA 的估计。但是, 式(16)中, 矩阵 \boldsymbol{T} 为非对角化的, 它的非对角线上的元素是信号间模糊函数的交叉项所造成的。在实际处理中, 为了降低交叉项对估计性能的影响, 可以取多个模糊矩阵的平均。由于不同的信号在模糊域内的能量分布是不同的, 而模糊平面上的每个模糊点都对应着一个模糊矩阵, 所以我们可以对不同的信号可以选择不同模糊点对应的分数低阶空域模糊矩阵来进行分析。

在实际处理中, 所获得的阵列数据是有限长的, 因此式(16)可以利用下式进行估计:

$$\hat{\boldsymbol{D}}_{ik}^p(\tau, \nu) = \frac{1}{K} \sum_{m=1}^M \sum_{r=1}^{R_m} D_{ik}^p(\tau_m, \nu_r) \quad (20)$$

其中

$$\hat{D}_{ik}^p(\tau_m, \nu_r) = \left[\sum_{t=0}^{N-1} x_i(t) |x_k(t - \tau)|^{p-2} x_k^*(t - \tau) e^{j2\pi t \nu} \right]_{\tau_m, \nu_r} \quad (21)$$

$\hat{D}_{ik}^p(\tau_m, \nu_r)$ 表示模糊平面上对应于 τ_m, ν_r 的分数低阶模糊函数, M 为所取的时延点数, R_m 为第 m 个时延点数上的频延点数, 所以

$$K = \sum_{n=1}^M R_m \quad (22)$$

4 DOA 估计算法流程

基于以上的讨论, 根据 MUSIC 算法^[13]的思想提出用于 DOA 估计的 FLOM-AD-MUSIC 算法。算法过程如下:

步骤 1 估计噪声特征指数 α , 选择合适的 FLOM 参数 p , 计算阵列接收的基于分数低阶矩的空间模糊函数, 并令 $q = 1$ 。

步骤 2 利用式(20)~式(22)计算第 q 个信号在模糊平面内的模糊点对应的模糊矩阵的平均。

步骤 3 对步骤 2 获得的模糊矩阵进行奇异值分解得到

噪声子空间的估计 $\hat{\boldsymbol{E}}_n$;

步骤 4 利用 MUSIC 算法估计第 q 个信号的 DOA。

步骤 5 判断是否还有未估计的信号, 若有, 则令 $q=q+1$ 并返回步骤 2; 若无则退出。

5 讨论

尽管 FLOM-AD-MUSIC 算法的提出是针对非平稳信号, 对平稳信号(如正弦信号), 若信号频率不同, 则信号在模糊域中就可分离, 因此可用 FLOM-AD-MUSIC 进行 DOA 估计。在上一节的算法实现流程中, 假设所有信号在模糊域中都是可分的。若存在模糊域中不可分的信号(假设进行第 q 个信号估计时, 有 P 个信号具有相同或近似的模糊域特性), 那么该模糊矩阵中包含有 P 个信号的模糊域信息, 因此, 对其进行奇异值分解得到的信号子空间维数为 P , 噪声子空间维数为 $L - P$, 算法将得到 P 个信号的 DOA 估计值。所以 FLOM-AD-MUSIC 算法在平稳信号和多个信号在模糊域中不可分离的情况下同样适用。

6 计算机仿真

这一节通过计算机仿真比较 FLOM-MUSIC 和 FLOM-AD-MUSIC 算法的性能。

考虑一个阵元间距为半波长的 8 元线阵。假设有两个线性调频信号分别位于 -5° 和 5° , 其中 $\omega_{s1} = 0$, $\omega_{e1} = \pi$, $\omega_{s2} = \pi$, $\omega_{e2} = 0$, ω_s 和 ω_e 分别表示起始频率和终止频率。现仿真分析 SaS 噪声背景下, FLOM-MUSIC 和本文提出的 FLOM-AD-MUSIC 算法的成功概率和信号 1 估计的均方根误差随信噪比的变化关系。信噪比定义为^[4]

$$\text{GSNR} = 10 \log \left(\frac{\sum_{t=1}^N |s(t)|^2}{\gamma N} \right) \quad (23)$$

图 2~图 5 给出了噪声为 $\alpha = 1.6$ 和 $\alpha = 1.4$ 时的仿真结果。计算机仿真时, 快拍数为 256, 参数 $p = 1$, 当估计信号分别位于 $(-7^\circ, -3^\circ)$ 和 $(3^\circ, 7^\circ)$ 时, 记为一次成功估计; 共进行 200 次独立蒙特卡罗试验。从图 2~图 5 我们可以发现, 与 FLOM-MUSIC 算法比, 本文提出的 FLOM-AD-MUSIC 算法的成功概率高, 估计的均方根误差小, 其性能优于 FLOM-MUSIC 算法。

7 结束语

本文提出了 FLOM-AD-MUSIC 算法实现了 SaS 噪声环境下非平稳信号的 DOA 估计。在证明了基于 FLOM 的空间模糊函数的结构可用来进行 DOA 估计之后, 算法根据信号在模糊平面内的能量分布, 选取多个 FLOM 模糊矩阵的平均来进行子空间分析, 利用 MUSIC 算法实现信号的 DOA 的估计。最后, 通过计算机仿真试验表明, 对非平稳信号, 本文提出的算法在不同强度的 SaS 噪声背景下 DOA 估计的成功概率比 FLOM-MUSIC 算法高, 而估计的均方根误差比

FLOM-MUSIC 算法小,其性能要优于 FLOM-MUSIC 算法。

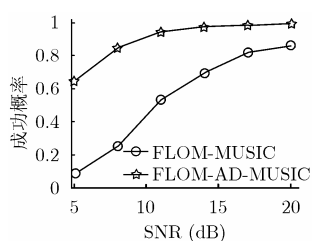


图2 $\alpha = 1.6$ 时成功概率曲线

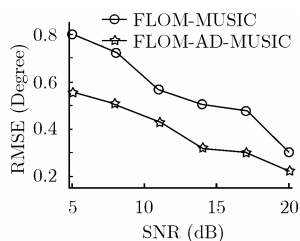


图3 $\alpha = 1.6$ 时均方根误差曲线

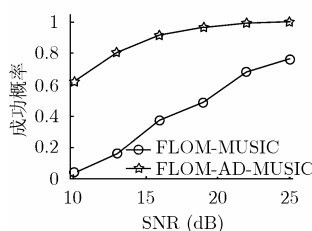


图4 $\alpha = 1.4$ 时成功概率曲线

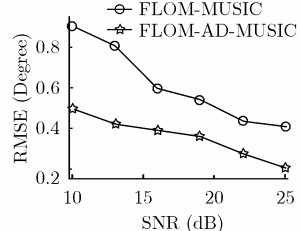


图5 $\alpha = 1.4$ 时均方根误差曲线

参考文献

- [1] Krim H and Viberg M. Two decades of array signal processing research: The parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag*, 1996, 13(4): 67–94.
- [2] Shao M and Nikias C L. Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications. New York: Wiley, 1995, Chap. 2–5.
- [3] Tsakalides P and Nikias C L. Maximum likelihood localization of sources in noise modeled as a stable process. *IEEE trans on SP*, 1995, 43(11): 2700–2713.
- [4] Tsakalides P and Nikias C L. The robust covariation-based MUSIC(ROC-MUSIC) algorithm for bearing estimation in impulsive noise environments. *IEEE Trans. on SP*, 1996, 44(7): 1623–1633.
- [5] Liu T H and Mendel J M. A subspace-based direction finding algorithm using fractional lower order statistics. *IEEE Trans. on SP*, 2001, 49(8): 1605–1613.
- [6] 吕泽均, 肖先赐. 基于分数阶矩的测向方法研究. *电波科学学报*, 2002, 17(6): 561–564.
- [7] Lu Zejun and Xiao Xianci. A new direction finding algorithm based on fractional order moment. *Chinese Journal of Radio Science*, 2002, 17(6): 561–564.
- [8] Belouchrani A and Amin M G. Time-frequency MUSIC. *IEEE SP Letters*, 1999, 6(5): 109–110.
- [9] Zhang Y, Mu M, and Amin M G. Time-frequency maximum likelihood methods for direction finding. *J. Franklin Inst*, 2000, 337(4): 483–497.
- [10] Hassani A, Belouchrani A, and Amin M G. Time-frequency ESPRIT for direction-of-arrival estimation of chirp signals. *Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop Proceedings*, Rosslyn, VA, USA, 2002: 337–341.
- [11] Shao M and Nikias C L. Signal processing with fractional low order moments: Stable processes and their application. *Proc. IEEE*, 1993, 81(7): 986–1010.
- [12] 张贤达, 保铮. 非平稳信号分析与处理. 北京: 国防工业出版社, 1998, 第2章.
- [13] Tsihrantzis G A and Nikas C L. Fast estimation of the parameters of alpha-stable impulsive interference. *IEEE Trans. on SP*, 1996: 44(6): 1492–1503.
- [14] Schmidt R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation. *IEEE Trans. on AP*, 1986, 34: 276–280.

何 劲: 男, 1980 年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、空时自适应处理、非平稳信号处理、机载 SAR 运动目标检测与成像.

刘 中: 男, 1963 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为现代信号处理、传感器网络、混沌与信息动力学.