

基于似然值概率密度演变的速率可变穿刺 Turbo 码的最优设计

吕淑娟 卫 国 朱近康

(中国科学技术大学个人通信与扩频实验室 合肥 230027)

摘 要: 该文提出了一种新的用似然值概率密度演变来为高斯信道下的速率可变穿刺 Turbo 码(RCPT)选择最优穿刺矩阵的方法。这种新方法通过比较不同穿刺矩阵对应的解码门限来衡量 Turbo 码在低信噪比区域的性能。这种分析方法与传统的通过距离谱来分析 Turbo 码性能的方法相比主要有两个优点: 一是这种新的分析方法与交织器无关, 门限值不会随着交织器的变化而变化; 二是在码字比较长的情况下, 这种新的分析方法计算复杂度不会增加太多。计算机仿真结果表明, 当码字比较长时, 在高斯信道下, 这种分析方法选出的最优穿刺矩阵与传统的距离谱分析方法选出的最优的穿刺矩阵是完全一致的。该文还进一步给出了以 3G 中的 Turbo 码为母码的最优 RCPT 矩阵以及其门限, 并且发现当 3G 协议中的速率匹配采用穿刺的时候, 速率匹配可以等效为一个穿刺矩阵。对于一些可以进行比较的速率, 这个穿刺矩阵跟用该文提出的方法给出的最优穿刺矩阵是完全一致的。

关键词: 编码; 似然值概率密度演变; 高斯近似; 速率可变穿刺 Turbo 码(RCPT); 门限; 3G; 速率匹配

中图分类号: TN911.22

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)02-0269-05

Searching the Optimal Puncture Matrix for Rate Compatible Punctured Turbo (RCPT) Codes with Density Evolution

Lü Shu-juan Wei Guo Zhu Jin-kang

(PCN&SS Lab, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

Abstract: A new algorithm for searching the optimal puncture matrices of the rate compatible punctured Turbo(RCPT) codes is proposed. The algorithm is based on density evolution and its main goal is to analyze the thresholds for different puncture matrices. The thresholds are calculated using Gaussian approximation and simulation. Compared to a conventional distance spectrum approach, this new approach has two advantages. The first advantage is that the new algorithm is independent of the interleaver. The second is that when the Turbo code is very long, the complexity of the calculation will not increase too much for the proposed approach. In AWGN channels, when the code is long, the examples shows that the optimal puncture matrices are the same for both approaches while the proposed approach has reduced computational complexity. This paper also analyzes the puncture matrices of the code used in 3GPP and provides the optimal matrices and thresholds. The result shows that the rate matching algorithm given in 3GPP corresponds to some RCPT matrixes when using puncturing and these matrixes are the same as those optimal matrices given in this paper for certain rates.

Key words: Code; Density evolution; Gaussian approximation; Rate Compatible Punctured Turbo (RCPT) codes; Threshold; 3G; Rate matching

1 引言

可变速率的编码技术在混合自动请求重传(HARQ)中得到了广泛应用, Hagenauer^[1]提出了提供不同差错保护等级的可变速率穿刺卷积编码技术; 1995 年, Barbulescu^[2]用可变速率的 Turbo 码来提供不同程度的差错保护; 1997 年, Narayanan^[3]提出了基于 Turbo 码的 ARQ 技术。后来, Rowitch^[4]提出了用距离谱来选择最优的可变速率穿刺 Turbo 码的穿刺图案。但是这种方法有两个不足, 第一是跟交织器的交织图案有关系, 也就是说相同的子码, 换一种交织图案, 就要重新计算一遍距离谱, 这大大地增加了寻找最

优码字的计算复杂度; 第二是在码字很长的情况下, 计算距离谱的复杂度会很大。

近年来, 对于迭代解码技术, 除了传统的距离谱分析方法之外, 又出现了一种新的基于似然值概率密度演变(density evolution)的分析方法。这种方法得名于 Richardson 和 Urbanke^[5]对低密度校验码(LDPC)的分析, 同时 Gamal^[6], Divsalar^[7]和 Brink^[8]使用了高斯函数来近似似然值的概率密度函数, 并将其应用于对 Turbo 码的分析。这种方法适用于比较长的码字, 与交织器的交织图案没有关系, 而且在码字比较长的时候不会增加太多的计算复杂度, 这就弥补了距离谱分析方法的不足。Laddomada^[9]已经将似然值概率密度演变的方法用于选择最优的可变速率穿刺串行级联码。本文将基于高斯近似的似然值概率密度演化分析方法用于优化

可变速率穿孔Turbo码的设计。

2 原理

2.1 信道模型

假设二进制信号通过信噪比(SNR)为 $10\lg(1/\sigma_n^2)$ 的加性高斯白噪声信道, σ_n^2 是噪声方差。经过信道后的信号可以表示成 $y = x + n$, 这里 $x \in \{+1, -1\}$, n 是均值为0, 方差为 σ_n^2 的高斯随机变量。接收信号的先验概率密度函数可以写成 $p(y|X = x) = \exp[-(y-x)^2/(2\sigma_n^2)]/(\sqrt{2\pi}\sigma_n)$ 。相应地, y 的似然值为 $Y = [\ln p(y|x = +1)/p(y|x = -1)]$ 或者

$$Y = (2/\sigma_n^2) \cdot y = (2/\sigma_n^2) \cdot (x + n) = \mu_y \cdot x + n_y \quad (1)$$

其中 $\mu_y = 2/\sigma_n^2$, n_y 是均值为0、方差为 $\sigma_y^2 = 4/\sigma_n^2$ 的高斯随机变量。因此 y 的均值和方差满足

$$\mu_y = \sigma_y^2/2 \quad (2)$$

2.2 速率可变的穿孔 Turbo 码

二进制数据流先通过一个码率为 $1/N$ 的 Turbo 码编码器, 然后有选择地删除一些编码比特, 这个过程称为穿孔(puncturing), 可以从获得高码率的码字, 最高码率为 $N-1/N$ 。对于系统比特流和 $N-1$ 个校验比特流, 穿孔是周期进行的。设穿孔周期为 P , Rowitch 在文献[4]中给出的仿真结果表明, 在相同的码率的情况下, P 越大, 高信噪比时的吞吐率也越高。在一个周期里, 对应于输入的 P 个比特, 编码器输出 N 个大小为 P 的比特流(其中1路是系统比特流, 其它 $(N-1)$ 路是校验比特流), 对应与 $N \times P$ 的矩阵 \mathbf{P}_{\max} 的每一行相乘。因此当矩阵元素 $p_{ij} = 0$ 时, 对应的比特被穿孔; 当矩阵元素为 $p_{ij} = 1$ 时, 对应的比特就被传输, 这里 $i = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 0, 1, \dots, P-1$ 。这样就形成了一组码母相同、但由于穿孔矩阵不同而最终传输的码字不同的码组。可以获得的码率为 $R_l = P/(P+l)$, $l = 0, 1, \dots, (N-1)P$ 。对于每个 l , 都可以得到一个 $N \times P$ 的穿孔矩阵 $\mathbf{P}_{\max}(l)$, 这些穿孔矩阵之间要满足约束条件: $\mathbf{P}_{\max}(l+1)$ 必须包含相同位置的 $\mathbf{P}_{\max}(l)$ 的所有为1的元素, 并且只多一个附加的1。

2.3 用高斯近似的似然值概率密度演化方法分析 Turbo 解码

一般而言, 迭代解码的误比特率分为3个区域: (1)在低信噪比区域, 随着信噪比的增加, 误比特率下降很慢, 几乎不会变化; (2)误比特率随着信噪比的增加下降非常快, 下降的趋势类似于悬崖上的瀑布, 也称为瀑布区域(waterfall); (3)在较高信噪比区域, 随着信噪比的增加, 误比特率几乎不会下降, 称为地板效应(error floor)。传统的通过分析距离谱来找寻最优码字的方法以码字在地板效应区域的性能最优为目的, 很少关注误比特率开始显著下降的区域。本文讨论的方法则是优化码字的误比特率开始显著下降的信道信噪比(也称为门限), 门限越低, 误比特率曲线开始明显下降得越早, 相应地, 码字在此区域的性能也越好。

Turbo 码的迭代解码采用两个子译码器, 通过交换外部信息(extrinsic information)来相互支持, 从而提高译码性能, 这里外部信息是每个信息比特从其他所有的编码比特中获得的关于本信息比特的似然值。Wiberg 在文献[10]中指出在码长比较长的情况下, 当最大后验概率解码器的输入是高斯分布时, 迭代解码器输出的似然值也可以近似为高斯随机分布。这启发了人们用高斯概率密度函数来近似似然值的概率密度函数, 并用来分析 Turbo 解码。这种建模又会引入码字收敛的概念, 即当信道信噪比大于某个门限的时候, 随着迭代解码次数的增加, 误码率会趋近于0, 这时称解码是收敛的; 相反, 当信道信噪比小于此门限的时候, 随着迭代解码次数的增加, 误码率会趋近于一个不为零的常数, 这时我们解码是不收敛的。这就是通常所说的“门限效应”。这个门限值有两种方法可以获得, 第1种是通过计算码字的误比特率曲线, 误比特率开始迅速下降时对应的信道信噪比就是门限; 第2种方法是用高斯近似的似然值概率密度演变方法求这个门限值。Gamal 在文献[6]中已经验证了这两种方法获得的门限值吻合得很好。本文就用基于高斯近似的似然值概率密度演变的方法来计算门限, 进而预测误比特率开始迅速下降的信道信噪比。Gamal 还指出这种方法的门限值只跟构成这个级联码的各个子码的结构有关系, 与交织器无关, 因此通过改变 Turbo 码的交织器来优化距离谱的方法并不能改变这个门限值, 而且当码字很长的时候也不会增加太多的复杂度, 因此不需要进行复杂的误比特率计算也可以预测其性能。

由图1可以看到第2个解码器的输出, 也就是上次迭代输出的外部信息, 被反馈到第1个解码器的输入 Z , 也就是这次迭代的先验信息, Ax 是编码数据经过信道以后的信道信息, Z_1 是这次迭代输出的外部信息, 并且它们之间满足以下关系, $Z_1 = L_1 - Z - Ax$ 。对于第2个解码器也有类似的关系。假定第1次迭代时的先验信息初始值 $Z = 0$ 。由于已经假定外部信息是高斯分布的, 而一个高斯随机变量的统计特性是由它的均值和方差决定的。假设外部信息的均值为 μ , 方差为 σ^2 , 则有关外部信息的“信噪比”有3种定义: (1)由统计独立的均值和方差来决定, $\text{SNR}(\mu, \sigma) = \mu^2/\sigma^2$; (2)由于假设输入解码器的数据是服从高斯分布的, 由前面的式(2)可以得到 $\sigma^2 = 2\mu$, 所以 $\text{SNR}(\mu) = \mu/2$; (3)由误比特率 P_b 经 Q^{-1} 函数算出信噪比, 即 $\text{SNR}(P_b) = Q^{-1}(P_b)$ 。为了简单起见, 本文采用第2种 $\text{SNR}(\mu)$ [7]。

2.4 用高斯近似的似然值概率密度演化方法来选择最优的速率可变穿孔 Turbo 码

本文用似然值概率密度演化的方法来选取门限值最低的穿孔图案, 在码长比较长的时候, 门限值越低的码字误比特率迅速下降得越早, 在相同的信道信噪比的情况下误比特率更低, 性能也更好。由图1可以看到第1个解码器输出的

外部信息 Z_1 经过交织器以后即为第 2 个解码器的输入信息 Z'_1 ; 同样地, 第 2 个解码器输出的外部信息 Z_2 经过解交织器以后就是第 1 个解码器的输入信息 Z 。对于一个给定的信道信噪比, 每输入一个信噪比为 SNR_{in} 的 Z , 都可以得到一个信噪比为 SNR_{out} 的 Z_1 , 通过改变 SNR_{in} 的值并重复, 可以得到第 1 个和第 2 个解码器的 $SNR_{out} - SNR_{in}$ 的曲线, 设为 a_1 和 a_2 。将这两条曲线画在一张图上, 曲线 a_1 以 SNR_{in} 为横坐标, 以 SNR_{out} 为纵坐标, 而曲线 a_2 则相反, 以 SNR_{out} 为横坐标, 以 SNR_{in} 为纵坐标。如果这两条曲线没有相交, 说明门限小于这个信道信噪比, 反之, 如果相交, 则说明门限大于这个信道信噪比。门限值就是这两条曲线刚好相切时对应的信道信噪比。

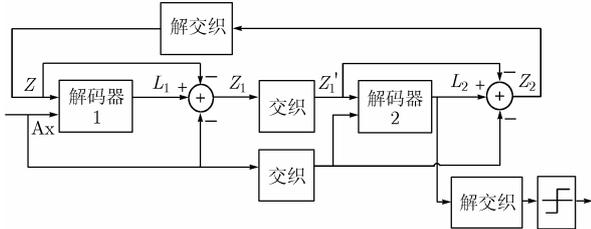


图 1 迭代译码的 Turbo 码译码器

3 最优的 RCPT 码字和性能仿真结果

3.1 对参考文献[4]中 Encoder A 的穿刺矩阵的分析

Rowitch 在文献[4]中用距离谱的分析方法来选取最优的 RCPT 穿刺图案, 并给出了一些码字的最优的 RCPT 图案。这里首先对文献[4]中给出的一个母码 Encoder A 进行分析, 编码寄存器的长度为 4, 速率为 1/3, 生成多项式为 $(1, 21/37)_{octal} + (21/37)_{octal}$ 。以穿刺周期 $P = 4$ 为例。对于每一个速率, 每一种可能的穿刺图案, 都可以用似然值概率密度演化的方法来求出该码字对应的门限, 门限最低的那个 RCPT 码就是最优的码字。

因为似然值是近似高斯分布的, 令图 1 中的 $Z = \mu_Z \cdot x + n_Z$, 这里 $x \in \{+1, -1\}$ 是对应的信息比特, n_Z 是均值为 0, 方差为 σ_Z^2 的高斯随机变量。由式 (1) 和式 (2) 可以得到 $\mu_Z = \sigma_Z^2 / 2$ 。

根据以下步骤来求门限。

对于每个信道信噪比进行(1)–(5)的操作:

- (1)根据需要的 SNR_{in} 值以及关系式 $SNR = \mu / 2$ 来得到一组 μ 值, 对于每个 μ 值进行以下(2)–(5)的操作;
- (2)根据 $\mu_Z = \sigma_Z^2 / 2$ 产生均值为 μ_Z 、方差为 σ_Z^2 的高斯随机变量 n_Z ;
- (3)产生要编码的信息比特流 x , 并把上面的 μ_Z 和 n_Z 代入式(1), 得到了一组近似高斯分布的似然值 Z ;
- (4)对信息比特流 x 进行编码并通过加性高斯白噪声信道(AWGN)得到接收到的数据流 Ax ;
- (5)将上面得到的数据 Ax 和 Z 代入图 1 所示的子解码器进行译码, 同时记录每个子解码器对应每个 μ 值的 SNR_{in} 和 SNR_{out} 。

对应于每个信道信噪比, 两个子解码器各有一条 $SNR_{out} - SNR_{in}$ 的曲线, 如果有某个信道信噪比 \overline{SNR} 刚好使这两条曲线相切, 那么这个 \overline{SNR} 就是要求的门限。表 1 给出了用似然值概率密度演化的方法选出来的最优 RCPT 码字及其门限值, 最优码字与文献[4]中给出的一样, 这从另一个角度印证了这种穿刺图案的优越性, 即对应于任何较长的码字, 这种穿刺图案都是最优的。

3.2 对 3G 协议中 Turbo 码的穿刺矩阵的分析

3G 协议^[11]中给出了另一种 Turbo 码的母码, 编码寄存器的长度为 3, 速率为 1/3, 生成多项式为 $(1, 15/13)_{octal} + (15/13)_{octal}$ 。以穿刺周期 $P = 4$ 为例。表 1 给出了基于 3G 中的 Turbo 码为母码的最优的 RCPT 码字及其对应的门限。

分析过程中发现当不穿刺系统比特的时候, 有以下两个性质: (1)第 1 路校验比特和第 2 路校验比特是完全等价的, 也就是说把穿刺矩阵的第 2 行和第 3 行互换, 其门限不发生改变; (2)穿刺矩阵中列的循环移位不影响其门限。

以速率 1/2 为例, 因为速率为 1/2 的所有的穿刺矩阵都是从速率 4/7 的最优的穿刺矩阵(见表 1)衍生出来的, 共有表 2 所示的 5 种选择, 其中 2 和 3 是等价的, 所以门限相同, 性能完全一样(因为把这两个穿刺矩阵拓展开来就可以看到是一样的); 同理 4 和 5 也是等价的, 仿真结果也证实了这些论断。因此, 只要在穿刺矩阵 1, 3, 5 中选出一个门限最低就可以了。图 2 给出了在信道信噪比 $E_b / N_0 = 0.5\text{dB}$ 的时候 3 个穿刺矩阵的 SNR_{out} 和 SNR_{in} 的关系, 可以看到在信道信噪比为 0.5dB 的时候, 穿刺矩阵 5 两个子码器的 $SNR_{out} - SNR_{in}$ 曲线已经相交, 而穿刺矩阵 3 的两个子码器的 $SNR_{out} - SNR_{in}$ 曲线正好相切(如图中箭头所指区域)但是穿刺矩阵 1 的两个子码器的 $SNR_{out} - SNR_{in}$ 曲线之间还有一定的距离。因此得出结论, 穿刺矩阵 1 的门限最低。本文也用仿真来验证穿刺矩阵 1, 3, 5 对应的误比特率变化。图 3 给出了编码长度为 65536 时, 它们的误比特率随着信道信噪比变化的曲线, 可以看出随着信道信噪比的增加, 穿刺矩阵 1 对应的误比特率最先开始下降, 然后穿刺矩阵 3 和 5 对应的误比特率才开始下降。

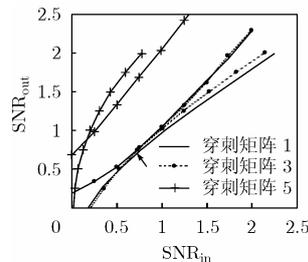


图 2 以 3G 协议中的 Turbo 码为母码, 速率为 1/2, 在信道信噪比为 0.5dB 时的 3 种穿刺矩阵的外部信息的输入、输出信噪比特性

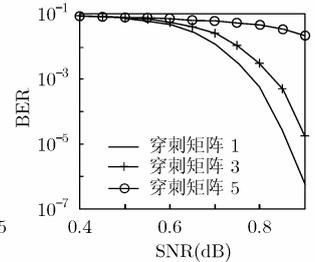


图 3 以 3G 协议中的 Turbo 码为母码, 速率为 1/2 的 3 种穿刺矩阵的误比特率曲线

表 1 母码为 3G 中的 Turbo 码的最优的 RCPT 穿刺矩阵, 穿刺周期为 4

码率	4/5	2/3	4/7	1/2	4/9	2/5	4/11	1/3
门限(dB)	2.72	1.41	0.94	0.47	0.26	0.074	-0.033	-0.22
穿刺矩阵	1110	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111
	1000	1000	1010	1010	1110	1110	1111	1111
	1000	1000	1000	1010	1010	1110	1110	1111

表 2 母码为 3G 中的 Turbo 码的速率为 1/2 的可选的 RCPT 穿刺矩阵, 穿刺周期为 4

1	2	3	4	5
1111	1111	1111	1111	1111
1010	1010	1010	1110	1011
1010	1100	1001	1000	1000

表 3 母码为 Encoder A 的最优的 RCPT 穿刺矩阵, 穿刺周期为 4, 码长为 4096

码率	4/5	2/3	4/7	1/2	4/9	2/5	4/11	1/3
门限(dB)	2.81	1.26	0.79	0.42	0.17	-0.013	-0.14	-0.26
穿刺矩阵	1110	1111	1111	1111	1111	1111	1111	1111
	0010	0010	1010	1010	1110	1110	1111	1111
	0010	0010	0010	1010	1010	1110	1110	1111

在 3G 系统中为了适应人们对高速移动数据业务的需求, 引入了高速下行分组接入技术 HSDPA。HSDPA 中的速率匹配算法包括两次速率匹配, 如图 4 所示。有关速率匹配的算法在协议文献[11]中有详细的介绍, 这里不再赘述。举个简单的例子来说明 3G 协议中给出的速率匹配算法跟本文所寻找的最优的 RCPT 矩阵是等效的。设定参数: Turbo 码编码以后的数据 $N_{in} = 12000$, $N_{IR} = 12000$, $N_{out} = 8000$, 系统比特优先。则按照协议中给出的算法对这些数据进行速率匹配, 在第 2 次速率匹配的时候需要穿刺掉 4000 bit, 第 1 路和第 2 路校验比特各穿刺掉 2000 bit, 这个速率匹配流程可以等效成一个 RCPT 矩阵, 即 Turbo 码编码出来的数据与穿刺矩阵对应位置相乘的结果跟上面的速率匹配是完全等效的, 这个穿刺矩阵为

$$P_{max} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

这个矩阵就是上面表 3 中得到的对应于速率 1/2 的最优的 RCPT 矩阵的循环移位, 所以两个矩阵是等价的, 门限一样。因此, 对于这个速率, 3G 协议中给出的速率匹配算法是与本文求出来的穿刺矩阵是一致的, 也是最优的。

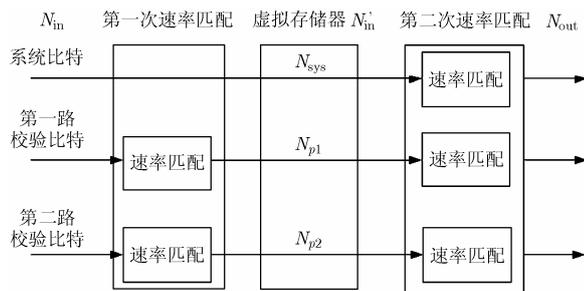


图 4 3G 系统 HSDPA 的速率匹配

4 结束语

本文提出了一种新的基于似然值概率密度演变来为速率可变穿刺 Turbo 码选择在高斯信道下最优穿刺矩阵的方法, 这种新方法通过比较不同穿刺矩阵对应的迭代解码的门限的高低来区分 Turbo 码解码性能的好坏, 门限值跟交织器无关, 从而简化了交织器的选择和寻找最优码字的复杂度。另一个优点就是在码字很长时, 这种分析方法计算复杂度不会提高太多。本文给出的实例的计算机仿真结果表明, 当码字比较长时, 在高斯信道下, 通过利用这种提出的新的分析方法选出的最优的穿刺矩阵与通过传统的距离谱分析方法选出的最优的穿刺矩阵是完全一致的; 文中还进一步给出了以 3G 中的 Turbo 为母码的最优的 RCPT 矩阵以及其门限, 并且发现当速率匹配采用穿刺的时候可以等效成一个 RCPT 矩阵, 而且在特定的速率下, 这个矩阵跟本文得到的最优 RCPT 穿刺矩阵是等价的。

参考文献

- [1] Hagenauer J. Rate compatible punctured convolutional codes (RCPC codes) and their applications. *IEEE Trans. on Commun.*, 1988, 36(4): 389-400.
- [2] Barbulescu A S and Pietrobon S S. Rate compatible turbo codes. *Electron. Lett.*, 1995, 31(3): 535-536.
- [3] Narayanan K R and Stüber G L. A novel ARQ technique using the turbo coding principle. *IEEE Commun. on Lett.*, 1997, 1(3): 49-51.
- [4] Rowitch D N and Milstein L B. On the performance of hybrid FEC/ARQ systems using rate compatible punctured turbo (RCPT) codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 2000, 48(6): 948-959.
- [5] Richardson T and Urbanke R. The capacity of low density

- parity check codes under message passing decoding. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 599–618.
- [6] Gamal H E and Hammons Jr A R. Analyzing the Turbo decoder using the Gaussian approximation. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, 2001, 47(2): 671–686.
- [7] Divsalar D, Dolinar S, and F. Pollara. Iterative turbo decoder analysis based on density evolution. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 2001, 19(5): 891–907.
- [8] Brink S ten. Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 2001, 49(10): 1727–1737.
- [9] Laddomada M and Scanavino B. Design of punctured serially concatenated convolutional codes. *IEEE Commun. Lett.*, 2005, 9(2): 169–171.
- [10] Wiberg N. Codes and decoding on general graphs. Linköping Studies in Sci. and Technol., Linköping, Sweden, Ph.D. dissertation 440, 1996.
- [11] 3GPP TS 25.212 v5.9.0. Multiplexing and channel coding (FDD). Jun. 2004.
- 吕淑娟: 女, 1979 年生, 博士生, 研究方向为移动通信与无线通信中的编码技术.
- 卫 国: 男, 1959 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为个人通信与移动通信、信号处理.
- 朱近康: 男, 1943 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为移动通信与无线通信、扩频通信.