

基于滑动窗与韧性函数的递归最小 p 范数滤波方法

查代奉 邱天爽

(大连理工大学电子与信息工程学院 大连 116024)

摘要: α 稳定分布可以更好地描述实际应用中遇到的具有显著脉冲特性的随机信号和噪声。与其它统计模型不同, α 稳定分布没有统一闭式的概率密度函数, 其二阶及二阶以上统计量均不存在。针对系统中存在独立 SaS 噪声与高斯噪声, 该文基于 SaSG 分布模型, 提出了一种混合噪声环境下基于滑动窗与韧性函数自适应广义递归最小 p 范数滤波算法, 并对算法进行了分析。计算机模拟和分析表明, 这种算法是一种在 SaSG 分布背景噪声条件下具有良好鲁棒性的方法。

关键词: 信号处理; α 稳定分布; 分数低阶统计量; 最小 p 范数

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2007)01-0054-05

Adaptive Generalized Recursive Least p-Norm Filtering Algorithm Based on Minimum Dispersion Criterion

Zha Dai-feng Qiu Tian-shuang

(School of Electronic and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: Alpha stable distribution, a generalization of Gaussian, is better for modeling impulsive noises than Gaussian distribution in signal processing. This class of process has no close form of probability density function and finite second order moments. In this paper, a new adaptive generalized recursive least p-norm filtering algorithm is proposed based on SaSG noise model. The simulation experiments show that the proposed new algorithm is more robust than the conventional algorithm.

Key words: Signal processing; α stable distribution; Fractional lower order statistics; Least p-norm

1 引言

长期以来, 囿于理论发展的限制, 关于随机信号理论的研究主要局限于高斯分布情况下的二阶统计量。然而, 在诸如水声、雷达、通信、语音信号和生物医学信号处理等领域的实际应用中, 许多随机信号是非高斯分布的。这样, 将其作为高斯分布的情况来分析和处理, 常不能得到满意的结果。 α 稳定分布^[1-3] 是一种广义的高斯分布, 其概念先是由利维(Levy)于 1925 年在研究广义中心极限定理时提出的。 α 稳定分布的统计特性由其特征函数的 4 个参数来决定。概率密度函数没有统一的封闭表达式, 但它的特征函数存在统一的形式

$$\Phi_{\alpha}(t) = \exp\{j\mu t - \gamma|t|^{\alpha} [1 + j\beta \operatorname{sgn}(t)\varpi(t, \alpha)]\} \quad (1)$$

其中 $\varpi(t, \alpha) = \tan(\alpha\pi/2)$ ($\alpha \neq 1$), $\varpi(t, \alpha) = (2/\pi)\log|t|$ ($\alpha = 1$)。 α 是特征指数 ($0 < \alpha \leq 2$), 控制着随机过程的脉冲程度, α 愈小脉冲性愈强; β 是对称系数, $\beta = 0$ 时表示对称分布, 记为 SaS (Symmetry α -Stable distribution), γ 是分散系数 (dispersion); μ 为位置参数。当 $\alpha = 2$ 时, α 稳定分布与正态分布完全相同。若随机信号的特征指数为 α , 则只有阶数小于 α 阶的统计矩是有限的^[1-3]。对于非高斯稳定过程, 当 $1 \leq \alpha < 2$ 时, 稳定过程 $\{X(t), t \in T\}$ 张成的线性空

间 $L(X(t), t \in T)$ 是 Banach 空间, 并且当 $0 < \alpha < 1$ 时, 只是度量空间。这些空间对于线性估计问题不像 Hilbert 空间那样具有好的特性和结构。

在通信与雷达系统中, 特别在多接入(MA)跳频扩谱(FHSS)无线网络中, 由于通道重复使用, 每个终端均干扰着由其他终端发射的信号, 因此, 多接入干扰(MAI)可用 SaS 予以建模; 同时, 在发射与接收机的发热单元中, 常同时存在不可避免的内部热高斯噪声, 因此, 导致系统中存在独立 SaS 噪声与高斯噪声, 即一种服从 SaSG 分布的混合噪声(如图 1 所示)。SaSG 分布不存在概率密度函数的封闭表达式, 但它的特征函数为^[4-5]

$$\Phi_{\text{SaSG}}(t) = \exp\{-\gamma_{\text{SaS}}|t|^{\alpha} - \gamma_G t^2\} \quad (2)$$

其中 γ_{SaS} 为 SaS 噪声的分散系数, $\gamma_G = \sigma_G^2/2$ 为高斯噪声的分散系数, σ_G^2 为高斯噪声的方差, SaSG 分布记为 $\text{SaSG}(\alpha, \gamma_{\text{SaS}}, \gamma_G)$ 。

SaSG 分布与 SaS 分布有类似的性质^[4]:

(1) 若 X 为一个特征指数为 α 的 SaSG 分布随机变量,

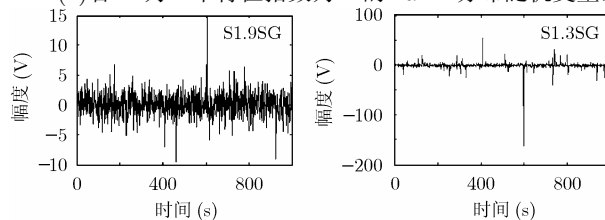


图 1 SaSG 分布噪声

2005-04-25 收到, 2005-08-30 改回

国家自然科学基金(60372081, 60172072, 30170259)和辽宁省科学技术基金(2001101057)资助课题

当 $\alpha > 1$ 时其均值存在;

(2)当 $\alpha = 2$ 时 SaSG 分布为两个独立高斯变量之和;

(3)当 $0 < |X| < \infty$ 且 $0 < p < \alpha$, 则 $E|X|^p < \infty$ 。

2 系统模型

考虑如图 2 所示的系统辨识框图中设计一个具有平稳过程 $\mathbf{x}(k)$ 输入的自适应 FIR 滤波器, 选择一个合适的权值 \mathbf{w} , 使得滤波器的输出和期望的响应 $d(n)$ 尽可能地接近。图 2 中输出的瞬时误差为 $e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}$, 输入矢量 $\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T$, 自适应权矢量 $\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T$, $(\cdot)^T$ 表示转置, 未知系统输出 $y(k) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}_{opt}$, 系统噪声 $n(k)$ 为 SaSG 分布噪声 ($1 < \alpha \leq 2$), 期望信号 $d(k) = y(k) + n(k)$ 。

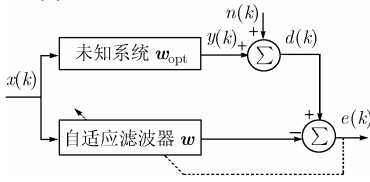


图 2 系统辨识中的自适应 FIR 滤波器

自适应滤波的目的是通过调整滤波器的系数来最小化误差的函数, 对于高斯与脉冲混合噪声下的自适应 FIR 滤波问题, 我们主要考虑的是对脉冲噪声的抑制与滤波。由于 LMS 准则需要输入数据的长期统计特性, 而实际中, 常依据一组数据来对数据统计特性进行估计或近似。所以, 使用最小二乘(LS)方法如递归最小二乘(RLS)来求取最佳滤波系数。传统的最小二乘(LS)(即 L2 范数)方法由于具有计算简单而广泛用于数据建模, 该方法以误差函数的 2 范数 $J_{LS} = \sum_{k=1}^K |e(k)|^2$ 为代价函数。

由于系统噪声 $n(k)$ 为 SaSG 分布噪声 ($1 < \alpha \leq 2$), 使得瞬时误差信号 $e(k) = d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}$ 不存在二阶和高阶统计量(如方差、协方差、自相关、高阶矩、高阶累积量等), 只存在 $p < \alpha \leq 2$ 的分数低阶统计量。因此, 许多传统的基于二阶、高阶统计量的阵列信号处理方法就不再适用。在处理这类噪声时, 原来基于最小均方误差(LMS)准则的滤波算法不再是最优算法。

自从 α 稳定分布引入信号处理领域以来, 出现了许多自适应滤波算法, 其中大部分是基于最小离差准则(MD)的, Shao 与 Nikias 最早提出了最小平均 p 范数自适应滤波算法^[5], 可以看成 LMS 算法的推广, 最小平均 p 范数估计方法已经广泛用于 α 稳定分布信号处理中。

对于稳定分布过程, 文献中常用最小 p 范数(即 L_p 范数)估计方法进行信号滤波与模型估计^[6], 即使误差的 L_p 范数最小, 可以认为最小 p 范数方法是最小二乘(LS)的推广, 该方法以误差函数的 p 范数:

$$J_{LP} = \sum_{k=1}^K |e(k)|^p, \quad 1 < p < \alpha \quad (3)$$

为代价函数, 在此函数下的最小 p 范数优化问题的解法有递

归最小 p 范数^[2,7] (RLP)方法与迭代重加权最小二乘^[8,9] (IRLS)方法。递归最小 p 范数(RLP)方法在稳定分布噪声下对滤波器的性能较递归最小二乘(RLS)有显著提高。

本文将在 RLP 算法基础上提出一种基于数据加窗与新代价函数的鲁棒性递归滤波方法。

3 加窗递归最小 p 范数滤波算法

为进一步提高估计器的鲁棒性, 抑制 SaSG 分布噪声, 我们提出了如下一种基于数据加窗的代价函数:

$$\begin{aligned} J(K) &= \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \rho(e(k)) \\ &= \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \rho(d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(K)) \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\rho(e(k)) = (1/p) |e(k)|^p$, $1 < p < \alpha$, L 为数据窗长度, $0 < \lambda \leq 1$, 引入加权因子 λ^{K-k} 是为了赋予老数据与新数据以不同的权值使滤波器具有对输入过程特性变化的快速反映能力。将代价函数对 $\mathbf{w}(K)$ 求偏导并等于 0, 有

$$\begin{aligned} \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \frac{\partial \rho(e(k))}{\partial \mathbf{w}(K)} &= \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \frac{\partial \rho(e(k))}{\partial e(k)} \cdot \frac{\partial e(k)}{\partial \mathbf{w}(K)} \\ &= \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \frac{\partial \rho(e(k))}{\partial e(k)} (-\mathbf{x}(k)) \\ &= - \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \frac{\partial \rho(e(k))}{\partial e(k)} \frac{1}{e(k)} e(k) \mathbf{x}(k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} e(k) \mathbf{x}(k) \\ = \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} (d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}(K)) \mathbf{x}(k) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} d(k) \mathbf{x}(k) \\ = \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}(K) \end{aligned} \quad (6)$$

令 $\mathbf{R}(K) = \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)$, $\mathbf{P}(K) =$

$\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} |e(k)|^{p-2} d(k) \mathbf{x}(k)$, 有 $\mathbf{R}(K)\mathbf{w}(K) = \mathbf{P}(K)$ 及如

下关系式:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(K) &= \lambda \left[\sum_{k=K-L+1}^{K-1} \lambda^{K-k-1} |e(k)|^{p-2} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \right] \\ &\quad + |e(K)|^{p-2} \mathbf{x}(K) \mathbf{x}^T(K) \\ &= \lambda \mathbf{R}(K-1) + |e(K)|^{p-2} \mathbf{x}(K) \mathbf{x}^T(K) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(K) &= \lambda \left[\sum_{k=K-L+1}^{K-1} \lambda^{K-k-1} |e(k)|^{p-2} d(k) \mathbf{x}(k) \right] \\ &\quad + |e(K)|^{p-2} d(K) \mathbf{x}(K) \\ &= \lambda \mathbf{P}(K-1) + |e(K)|^{p-2} d(K) \mathbf{x}(K) \end{aligned} \quad (8)$$

由上述等式可求得:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(K) &= \mathbf{w}(K-1) + |e(K)|^{p-2} \mathbf{R}^{-1}(K) \\ &\quad \cdot \mathbf{x}(K)[d(K) - \mathbf{w}^T(K-1)\mathbf{x}(K)] \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(K) &= \mathbf{w}(K-1) + |e(K)|^{p-2} \lambda^{-1} \mathbf{R}^{-1}(K-1) \\ &\quad \cdot \mathbf{x}(K)[d(K) - \mathbf{w}^T(K)\mathbf{x}(K)] \end{aligned}$$

由矩阵求逆引理^[10]:

$$(A + \mu \mathbf{xy}^T)^{-1} = A^{-1} \left[I - \frac{\mu \mathbf{xy}^T A^{-1}}{1 + \mu \mathbf{y}^T A^{-1} \mathbf{x}} \right]$$

令 $\lambda \mathbf{R}(K-1) = A$, $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{x}(K)$, 求得

$$\mathbf{R}^{-1}(K) = \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1}(K-1) - \frac{1}{\lambda} \mathbf{K}(K) \mathbf{x}^T(K) \mathbf{R}^{-1}(K-1) \quad (9)$$

其中增益向量 $\mathbf{K}(K) = \frac{|e(K)|^{p-2} \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)}{\lambda + |e(K)|^{p-2} \mathbf{x}^T(K) \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)}$

可写为

$$\mathbf{K}(K) = |e(K)|^{p-2} \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K) \quad (10)$$

所以

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(K) &= \mathbf{R}^{-1}(K) \mathbf{P}(K) \\ &= \lambda \mathbf{R}^{-1}(K) \mathbf{P}(K-1) + \mathbf{R}^{-1}(K) |e(K)|^{p-2} d(K) \mathbf{x}(K) \quad (11) \end{aligned}$$

最后得到加窗递归最小 p 范数(SW-RLP)滤波算法的权值修正式:

$$\mathbf{w}(K) = \mathbf{w}(K-1) + \{d(K) - \mathbf{x}^T(K)\mathbf{w}(K-1)\} \mathbf{K}(K) \quad (12)$$

其中 $b(K) = d(K) - \mathbf{x}^T(K)\mathbf{w}(K-1)$ 为先验估计误差。

4 SW-RLP 算法的鲁棒性改进

在二阶统计算法中, 为提高估计器的鲁棒性更好地抑制脉冲噪声, Huber 曾提出过一种分段代价函数^[7]:

$$J_{\text{Huber}} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_k |e(k)|^2, & |e(k)| \leq h \\ \sum_k [h |e(k)| - h^2/2], & |e(k)| > h \end{cases} \quad (13)$$

其中 $h > 0$ 为控制参数。相应地, 为进一步提高 SW-RLP 算法的鲁棒性, 抑制 SaSG 分布脉冲噪声, 我们相应地提出如下一种分段 $\rho(e(k))$ 函数与 $q(e(k))$ 函数:

$$\rho(e(k)) = \begin{cases} \frac{1}{p} |e(k)|^p, & |e(k)| \leq \Delta_1 \\ \frac{2}{p} \Delta_1 |e(k)|^{p-1} - \frac{1}{p} \Delta_1^p, & \Delta_1 < |e(k)| < \Delta_2 \\ \frac{2}{p} \Delta_1 \Delta_2^{p-1} - \frac{1}{p} \Delta_1^p, & \Delta_2 \leq |e(k)| \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} q(e(k)) &= \frac{\partial \rho(e(k))}{\partial e(k)} \frac{1}{e(k)} \\ &= \begin{cases} |e(k)|^{p-2}, & |e(k)| \leq \Delta_1 \\ \frac{2(p-1)}{p} \Delta_1 |e(k)|^{p-3}, & \Delta_1 < |e(k)| < \Delta_2 \\ 0, & \Delta_2 \leq |e(k)| \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

其中 $1 < p < \alpha$, Δ_1, Δ_2 为阈值参数, 图 3 表示不同算法的 $\rho(e(k))$ 函数与 $q(e(k))$ 函数, 最后推导得到 SW-RLP 滤波

算法的鲁棒性算法(R-SW-RLP 算法)权值迭代式:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(K) &= \mathbf{w}(K-1) + \{d(K) - \mathbf{x}^T(K)\mathbf{w}(K-1)\} \\ &\quad \cdot \frac{q(e(K)) \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)}{\lambda + q(e(K)) \mathbf{x}^T(K) \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{-1}(K) &= \frac{1}{\lambda} \mathbf{R}^{-1}(K-1) - \frac{1}{\lambda} \frac{q(e(K)) \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)}{\lambda + q(e(K)) \mathbf{x}^T(K) \mathbf{R}^{-1}(K-1)\mathbf{x}(K)} \\ &\quad \cdot \mathbf{x}^T(K) \mathbf{R}^{-1}(K-1) \end{aligned}$$

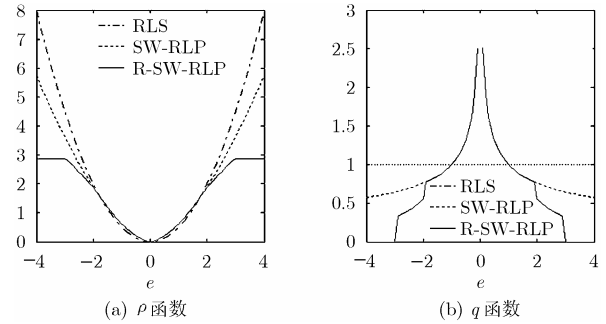


图 3 不同算法的 $\rho(e(k))$ 函数(a)和 $q(e(k))$ 函数(b)

阈值参数 Δ_1 和 Δ_2 的选择影响着 R-SW-RLP 算法的性能。尽管后验估计误差 $e(K)$ 的分布一般并不知道, 但文献[11]提出通过估计假定不含脉冲噪声的误差的方差 $\hat{\sigma}$, 能检测并拒绝 $e(K)$ 中的脉冲噪声, 同时提出了如下一个基于阈值 T 方程:

$$\theta_T = P_{\text{rob}} \{ |e(K)| > T \} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T/(\sqrt{2}\hat{\sigma})} \exp(-x^2) dx \quad (16)$$

不难知道, 若给定 θ_{Δ_1} 和 θ_{Δ_2} , $|e(K)|$ 落在 $[\Delta_1, \Delta_2]$ 区间与 $[\Delta_1, +\infty)$ 的置信度分别为 $1 - \theta_{\Delta_1}$ 与 $1 - \theta_{\Delta_2}$, 因此由式(16)可求得对应的 Δ_1 与 Δ_2 。而对于本文的后验估计误差 $e(K)$, 由于其方差 $\hat{\sigma}$ 并不存在, 对非高斯 α 稳定随机变量, 其位置参数为 0, 分散系数为 γ , 在 T 较大时有^[3]

$$P_{\text{rob}} \{ |e(K)| > T \} = \gamma \left\{ \int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx \right\}^{-1} T^{-\alpha} \quad (17)$$

根据给定的 θ_{Δ_1} 与 θ_{Δ_2} , 由式(17)可求得对应的 Δ_1 与 Δ_2 。

5 误差与权值的渐近特性

为方便讨论, 我们特做以下假设:

- (1) 输入信号为零均值、平稳遍历过程, 即 $E\{\mathbf{x}(k)\} = \mathbf{0}$;
- (2) 系统噪声 $n(k)$ 为 SaSG 分布噪声 ($1 < \alpha \leq 2$), 且 $E\{n(k)\} = 0$;
- (3) $\mathbf{x}(k)$, $n(k)$ 和 $\mathbf{w}(k)$ 相互统计独立。

对后验估计误差:

$$\begin{aligned} e(K) &= d(K) - \mathbf{x}^T(K)\mathbf{w}(K) \\ &= [\mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}(K)]^T \mathbf{x}(K) + n(K) \\ &= \mathbf{v}(K)^T \mathbf{x}(K) + n(K) \quad (18) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{v}(K) = \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}(K)$ 为权值误差矢量, 有

$$E\{e(K)\} = E\{\mathbf{v}(K)^T \mathbf{x}(K)\} + E\{n(K)\} \quad (19)$$

因此, $E\{e(K)\} = E\{\mathbf{v}(K)^T\} \cdot E\{\mathbf{x}(K)\} = 0$, 同理, 对先验估计误差 $b(K) = \mathbf{v}(K-1)^T \mathbf{x}(K) + n(K)$ 有 $E\{b(K)\} =$

$$E\{\mathbf{v}(K-1)^T \mathbf{x}(K)\} + E\{n(K)\} = 0.$$

$$\text{由 } \mathbf{P}(K) = \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} q(e(k)) \mathbf{x}(k) (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}_{\text{opt}} + n(k)),$$

$$\mathbf{w}(K) = \mathbf{R}^{-1}(K) \mathbf{P}(K), \text{ 有}$$

$$\mathbf{w}(K) = \left(\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \right)^{-1} \cdot \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} q(e(k)) \mathbf{x}(k) (\mathbf{x}^T(k) \mathbf{w}_{\text{opt}} + n(k)) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(K) &= \left(\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \right)^{-1} \\ &\times \left\{ \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \mathbf{w}_{\text{opt}} \right. \\ &\left. + \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) n(k)\} \right\} \\ &= \mathbf{w}_{\text{opt}} + \left(\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \right)^{-1} \\ &\cdot \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) n(k)\} \end{aligned} \quad (21)$$

利用权值误差矢量 $\mathbf{v}(K) = \mathbf{w}_{\text{opt}} - \mathbf{w}(K)$ 和先验估计误差重写上式为

$$E\{\mathbf{v}(K)\} = -E \left[\left(\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \right)^{-1} \cdot \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) n(k)\} \right] \quad (22)$$

由于当 K 足够大时 $E\{\mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \approx \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) / \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k}$ (文献 [12]), $\sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\}$ 可由 $E\{q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k)\} \cdot A$ 近似表示, $A = \sum_{k=K-L+1}^K \lambda^{K-k}$ 为归一化因子。

当 K 足够大时, 有

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(K)\} &\stackrel{\text{逼近}}{\approx} -E \left\{ \left(q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \cdot A \right)^{-1} \{q(e(k)) \mathbf{x}(k) n(k)\} \cdot A \right\} \\ &= -E \left\{ \left(q(e(k)) \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \right)^{-1} q(e(k)) \mathbf{x}(k) n(k) \right\} \\ &= -E \left\{ \left[\mathbf{x}^T(k) \right]^{-1} n(k) \right\} = -E \left\{ \left[\mathbf{x}^T(k) \right]^{-1} \right\} \\ &\quad \cdot E\{n(k)\} \end{aligned} \quad (23)$$

当 $K \rightarrow +\infty$ 时, $\lim_{K \rightarrow \infty} E\{\mathbf{v}(K)\} = 0$, 即

$$\lim_{K \rightarrow \infty} E\{\mathbf{w}(K)\} = \mathbf{w}_{\text{opt}}$$

6 仿真结果

考虑如图 2 所示框图中设计一个具有平稳过程 $\mathbf{x}(k)$ 输入的自适应 FIR 滤波器的设计, 选择一个最佳权值 $\mathbf{w}_{\text{opt}} = [1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1]^T$, 输入信号为长度为 10000 的序列 $\sin((1:10000)/10)$; 混合噪声为特征指数为 $\alpha = 1.8$, 分散系

数 $\gamma_{\text{SaS}}, \gamma_G$ 分别为 1 与 0.5 的 SaSG 分布噪声, 即 $n(k) \sim \text{SaSG}(1.8, 1, 1/2)$, 参数 $p = 1.6$ 。

实验 1 若分别设置 $L = 2, \lambda = 0.8$ 与 $L = 5, \lambda = 0.8$, 利用 SW-RLP 与 RLP 算法进行独立实验, 得到 SW-RLP 与 RLP 算法的权值误差矢量的范数收敛曲线如图 4 所示。图 4(a), 4(b) 两图中 SW-RLP 的迭代次数少于 RLP 算法达 10 次。可以看出 SW-RLP 算法由于加窗作用从而使得滤波器系数权值的收敛速度有提高。

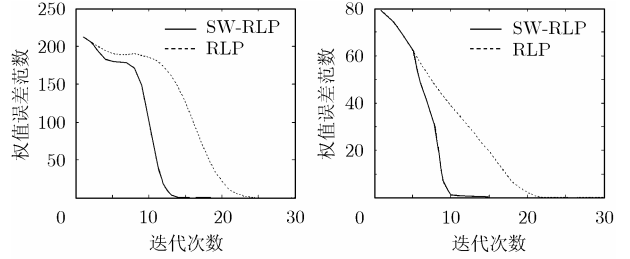


图 4 SW-RLP 与 RLP 算法的收敛曲线

实验 2 再分别设置 $L = 2, \lambda = 0.9$ 与 $L = 15, \lambda = 0.9$, 利用 R-SW-RLP 和 SW-RLP 算法进行独立实验, 得到 R-SW-RLP 和 SW-RLP 算法的收敛曲线如图 5 所示。图 5(a) 中 R-SW-RLP 的迭代次数少于 SW-RLP 算法 2 次。图 5(b) 中 R-SW-RLP 的迭代次数少于 SW-RLP 算法达 6 次。可以看出 R-SW-RLP 算法由于采用韧性函数 $\rho(e(k))$ 使得收敛速度有提高。

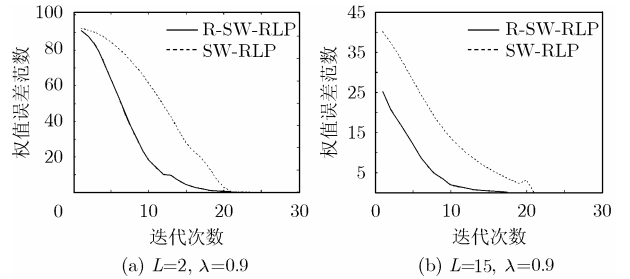


图 5 R-SW-RLP 与 SW-RLP 算法的收敛曲线

实验 3 设置 $L = 10, \lambda = 0.9$, 利用 R-SW-RLP, SW-RLP 和 RLP 算法进行独立实验, 收敛后利用得到的权值进行频响估计, 得到算法的幅频响应与相频响应曲线如图 6 所示, 可以看出 R-SW-RLP 算法的幅频响应和相频响应曲线与已知系统的频响曲线最接近。

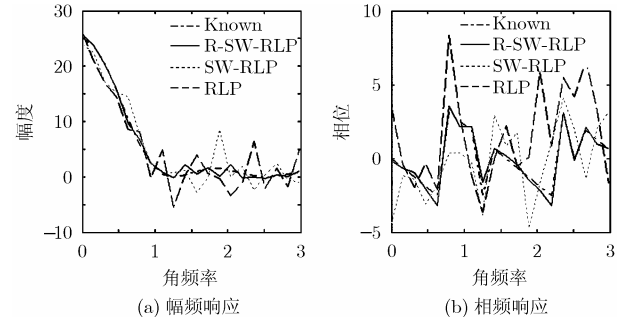


图 6 算法的幅频和相频响应曲线

7 结束语

α 稳定分布^[1-3,13]可以更好地描述实际应用中所遇到的具有显著脉冲特性的随机信号和噪声。与其它统计模型不同, α 稳定分布没有统一闭式的概率密度函数, 其二阶及二阶以上统计量均不存在。针对系统中存在独立 S α S 噪声与高斯噪声, 本文基于 S α SG 分布模型, 提出了一种混合噪声环境下的基于滑动窗与韧性函数的自适应韧性加窗递归最小 p 范数滤波算法。计算机模拟表明, 这种算法是一种在 S α SG 分布背景噪声条件下具有良好韧性的方法。

参 考 文 献

- [1] Nikias C L and Shao M. Signal Processing with Alpha-Stable Distributions and Applications. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995: 2-45.
- [2] Nikias C L and Shao M. Signal processing with fractional lower order moments: Stable processes and their applications. *Proc. IEEE*, 1993, 81(7): 986-1010.
- [3] Samorodnitsky G and Taqqu M S. Stable Non-Gaussian Random Process: Stochastic Models with Infinite Variance. New York: Chapman and Hall, 1994: 102-145.
- [4] Breich R and Zoubir A. Estimation and detection in a mixture of symmetric alpha stable and Gaussian interference. *Higher-Order Statistics, Proceedings of the IEEE Signal Processing Workshop on*. 1999: 219-223.
- [5] Ilow J, Hatzinakos D and Venetsanopoulos A N. Performance of FH SS radio networks with interference modeled as a mixture of Gaussian and alpha-stable noise. *IEEE Trans. on Communications*, 1998, 46(4): 509-520.
- [6] Kuruoglu E E, Peter J W, and William J F. Least lp-norm estimation of autoregressive model coefficients of symmetric α -stable processes. *IEEE Signal Processing Letters*, 1997, 4(7): 402-412.
- [7] Bodenschatz J S and Nikias C L. Symmetric alpha-stable filter theory. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 1997, 45(5): 2301-2306.
- [8] Yarlagadda R, Bednar J, and Watt T. Fast algorithms for lp deconvolution. *IEEE Trans. on Acoust. Speech Signal Process.*, 1985, 33(4): 174-182.
- [9] Todd K. Moon and Wynn C. Stirling. Mathematical methods and algorithms for signal processing. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2000: 120-131.
- [10] Haykin S. Adaptive Filter Theory. 3rd ed. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1996: 140-151.
- [11] Zou Y S, Chan C, and Ng T S. A Recursive Least M-estimate (RLM) adaptive filter for robust filtering in impulsive noise. *IEEE Signal Processing Letters*, 2000, 7(6): 324-326.
- [12] Weng J F and Leung S H. Adaptive nonlinear RLS algorithm for robust filtering in impulse noise. *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits Syst.*, 1997, vol. 4: 2337-2340.
- [13] 邱天爽等. 统计信号处理——非高斯信号处理及其应用. 北京: 电子工业出版社, 2004.

查代奉: 男, 1971 年生, 博士生, 研究方向为非高斯随机信号处理的理论与应用.

邱天爽: 男, 1954 年生, 博士, 教授, 博士生导师, IEEE 会员, 信号处理学会委员, 主要研究方向为数字信号处理理论与应用、生物医学信号处理、非平稳与非高斯信号处理等.