

# 泰勒展开与交替投影最大似然结合的离网格DOA估计算法

刘帅 许媛媛 闫锋刚 金铭\*

(哈尔滨工业大学(威海)信息科学与工程学院 威海 264209)

**摘要:** 针对最大似然DOA估计算法需要多维搜索、计算量大且面临着在网格估计的问题, 该文提出一种基于泰勒展开的离网格交替投影最大似然算法。该方法首先利用交替投影将多维搜索转化为多个1维搜索, 获得对应预设大网格的粗估计结果, 再利用矩阵求导理论将1维代价函数在粗估计结果处进行2阶泰勒展开, 最后, 通过对2阶泰勒展开求偏导并令导数等于零, 求得离网参数的闭式解。与交替投影最大似然算法相比, 该方法突破了搜索网格大小的限制, 在保证算法精度的同时, 有效减少了算法的在网格计算点数, 提升了运算效率。仿真结果证明了该算法的有效性。

**关键词:** 最大似然算法; 交替投影; 离网格; 泰勒展开

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2024)00-0001-09

DOI: 10.11999/JEIT231376

## Off-grid DOA Estimation Algorithm Based on Taylor-expansion and Alternating Projection Maximum Likelihood

LIU Shuai XU Yuanyuan YAN Fenggang JIN Ming

(School of Information Science and Engineering, Harbin Institute of Technology (Weihai),  
Weihai 264209, China)

**Abstract:** According to the problem that the maximum likelihood DOA estimation algorithm requires multi-dimensional search, is computationally intensive, and there is a problem in grid estimation, an Off-grid alternating projection maximum likelihood algorithm based on Taylor expansion is proposed. Firstly, the alternating projection method is used to transform the multi-dimensional search into multiple one-dimensional searches to obtain the rough estimation results corresponding to the preset large grid. Then, the second-order Taylor expansion of the one-dimensional cost function at the rough estimation results is carried out by using the matrix derivation theory. Finally, by calculating the partial derivative of the second-order Taylor expansion and making the derivative equal to zero, the closed-form solution of the off-grid parameters is obtained. Compared with the alternating projection maximum likelihood algorithm, this method breaks through the limitation of the search grid size. While ensuring the accuracy of the algorithm, it effectively reduces the number of points in the grid calculation of the algorithm while ensuring the accuracy of the algorithm, and improves the operation efficiency. Simulation results show the effectiveness of the algorithm.

**Key words:** Maximum likelihood algorithm; Alternating projection; Off-grid; Taylor expansion

### 1 引言

波达方向估计(Direction Of Arrival, DOA)作为阵列信号处理的重要分支之一, 在近几十年来得到了迅猛发展, 其应用范围已经涉及诸如雷达、声

呐、通信、导航等众多领域<sup>[1,2]</sup>。基于子空间的方法是最早发展起来的DOA估计方法之一, 其中最具代表性的是多重信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)<sup>[3]</sup>和基于旋转子不变技术的信号参数估计(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)<sup>[4]</sup>。此外, 还有其他一些基于子空间的方法<sup>[5-9]</sup>。然而, 这些方法在实际应用中具有一定的局限性, 例如, 其需要足够的快拍数才能获得高分辨率的估计性能, 且当多源信号间强相关时, 算法性能会下降甚至失效。20世纪80年代后期开始, 出现了一类子

收稿日期: 2023-12-13; 改回日期: 2024-05-10; 网络出版: 2024-06-17

\*通信作者: 金铭 [jinming0987@163.com](mailto:jinming0987@163.com)

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(62071144, 62171150), 泰山学者工程专项经费(tsqn202211087)

Foundation Items: The General Projects of National Natural Science Foundation of China (62071144, 62171150), Taishan Scholars Project Special Funds (tsqn202211087)

空间拟合类算法<sup>[10-12]</sup>。其中,最大似然算法参数估计类方法是参数估计理论中一种典型和实用的估计方法。与子空间分解类算法相比,该类算法估计性能优良,尤其在低信噪比、小快拍数据情况下。此外,该类算法在相干源情况下仍能有效工作。

最大似然算法的方向估计似然函数是非线性的,在参数求解的过程中,其存在着多维搜索及在网格估计的问题。针对于多维搜索问题,现有的多维优化算法主要有多项式参数化(Method of Direction Estimation, MODE)算法、修正变量投影(Modified Variable Projection, MVP)算法以及交替投影(Alternating Projection, AP)算法。多项式参数化算法可以在2维空间谱中,利用相互耦合的不同轴向的阵列流型对投影矩阵进行参数表示,将2维空间搜索降维成两个1维搜索,但该算法要求阵型必须为方阵<sup>[13]</sup>。修正变量投影算法针对信号子空间算法提出,同样适用于多维非线性最大化问题,但信号相关系数较高时算法性能会发生恶化<sup>[14]</sup>。交替投影算法是通过迭代实现的,在迭代的每一步,其均相对于一个参数进行优化,而其他参数保持不变,将多维搜索转化为了多个1维搜索,降低了计算量。但是,该类算法在参数估计的过程中同样面临着在网格计算的问题<sup>[15]</sup>,其需要较小的网格才能保持高的估计精度,此时搜索速度较慢,算法效率较低,不能满足工程应用中实时性的要求;而当网格增大时,算法效率提高,相应地,算法性能便会下降。

离网格参数估计可以平衡计算效率和计算精度之间的关系,近年来引起了研究人员的广泛重视。目前已有研究成果主要集中在压缩感知(Compress Sensing, CS)理论、稀疏重构技术领域<sup>[16,17]</sup>。以稀疏重构DOA估计方法为例,该方法需要选择一个稀疏度量,在预定的离散字典网格上进行信号的重构,然而实际上待估计信源的位置往往不会正好落在网格上,不可避免地会存在离网偏差。针对该问题,文献<sup>[18]</sup>提出了一种离网格模型,在信号真实到达角处采用1阶泰勒展开式近似表示,使得估计性能进一步提高。在此基础上,文献<sup>[19,20]</sup>将离网格思想引入MUSIC算法,将导向矢量进行1阶泰勒展开,通过应用信号子空间与噪声子空间的正交性估计出离网偏差,降低了预设网格带来的固有偏差,实现了参数估计性能的提升。文献<sup>[21]</sup>提出了一种基于泰勒展开求解离网参数的方法,该方法通过将平方误差代价函数2阶泰勒展开并最小化得到初始偏移量,然后对其不断优化,实现了高精度的离网格DOA估计。综上,已有离网格DOA估计方

法大体可以分为两类,其一是基于导向矢量的泰勒展开,该类方法通过对导向矢量进行1阶泰勒展开构造离网格模型,在获得粗估计值的基础上,对离网参数进行优化求解,但最大似然算法代价函数较复杂,难以应用此类方法实现离网参数的估计;其二是通过构造代价函数的2阶展开,实现离网格DOA估计,但最大似然涉及多维寻优,该类方法也无法直接应用于最大似然算法。

基于此,本文针对最大似然离网格参数估计问题开展研究,提出了基于泰勒展开的离网格交替投影最大似然算法。该方法首先利用交替投影算法将多维搜索转化为1维搜索,并得到对应预定义大网格的粗估计结果;其次,在粗估计结果处基于矩阵求导理论对1维代价函数进行2阶泰勒展开,构造新的近似代价函数;然后,对该近似代价函数求偏导并令导数等于零,求得离网参数的闭式解,更新参数估计结果,并采用交替投影技术对其不断迭代优化,直至满足收敛条件,实现参数精确估计,达到估计精度和计算效率的统一;最后,通过仿真验证了所提算法的有效性。

## 2 信号模型与经典最大似然算法

### 2.1 信号模型

考虑由空间距离为半波长 $d = \lambda/2$ 的 $M$ 个阵元组成的均匀线阵和 $P$ 个窄带远场信号,第 $p(p = 1, 2, \dots, P)$ 个信号的方位角为 $\theta_p$ 如图1所示。

假设入射信号互不相关且与噪声之间相互独立,则该阵列的接收信号可以表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{\theta_1}, \mathbf{a}_{\theta_2}, \dots, \mathbf{a}_{\theta_P}] \in \mathbb{C}^{M \times P}$  为阵列信号的阵列流形矩阵,  $\mathbf{s}(t) = [\mathbf{s}_1(t), \mathbf{s}_2(t), \dots, \mathbf{s}_P(t)]^T \in \mathbb{C}^{P \times 1}$  为 $P$ 个相互独立的入射信源,  $\mathbf{n}(t) = [\mathbf{n}_1(t), \mathbf{n}_2(t), \dots, \mathbf{n}_M(t)]^T \in \mathbb{C}^{M \times 1}$  为均值为零,方差为 $\sigma^2$ 的加性高斯白噪声。

第 $m$ 个阵元空域导向矢量 $\mathbf{a}_m(\theta)$ 具有形式

$$\mathbf{a}_m(\theta) = \exp(-j2\pi f \tau_m) \quad (2)$$

式中,  $f$  为信号频率,  $\tau_m(m = 1, 2, \dots, M)$  为不同阵

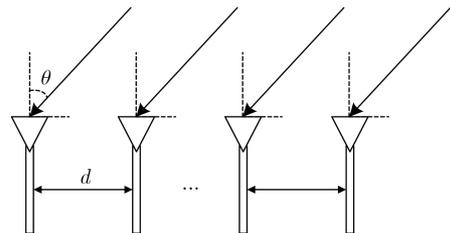


图1 均匀线阵接收信号模型

元间的空间延迟，对于均匀线阵而言，以最左边的阵元为参考点(位于原点)，其具体的表达形式为

$$\tau_m = \frac{1}{c}(x_m \sin \theta) \quad (3)$$

式中， $c = 3 \times 10^8$  m/s为光速， $x_m$ 为第 $m$ 个阵元相对原点的坐标。

通过采集 $L$ 个快拍，接收数据矩阵表示为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (4)$$

式中， $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(L)] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ ， $\mathbf{S} = [\mathbf{s}(1), \mathbf{s}(2), \dots, \mathbf{s}(L)] \in \mathbb{C}^{P \times L}$ ， $\mathbf{N} = [\mathbf{n}(1), \mathbf{n}(2), \dots, \mathbf{n}(L)] \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 。

## 2.2 经典最大似然算法

基于2.1节建立的阵列模型，阵列接收信号的协方差矩阵理论表达式为

$$\mathbf{R} = \mathbb{E}[\mathbf{Y}\mathbf{Y}^H] = \mathbf{A}\mathbf{R}_S\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} \quad (5)$$

式中， $(\cdot)^H$ 为矩阵的共轭转置； $\mathbf{R}_S$ 为信号的协方差矩阵； $\mathbf{I} \in \mathbb{C}^M$ 为单位阵。在实际运算中，考虑到接收数据长度是有限的，所以阵列协方差矩阵估计表达式为

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t) \quad (6)$$

在满足上述条件下，假设信源数已知或通过其他方式估计已获得，则由确定性最大似然(DML)，可得样本数据 $L$ 次快拍的联合概率密度函数为

$$f\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_L\} = \prod_{i=1}^L \frac{1}{\det\{\pi\sigma^2\mathbf{I}\}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2}|\mathbf{y}_i - \mathbf{A}\mathbf{s}_i|^2\right) \quad (7)$$

式中， $\det\{\cdot\}$ 为该矩阵的行列式， $\mathbf{y}_i \triangleq \mathbf{y}(i)$ ， $\mathbf{s}_i \triangleq \mathbf{s}(i)$ 。

经过数学推导，可得到关于参量 $\theta$ 的最大似然估计

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_A \hat{\mathbf{R}}) \quad (8)$$

式中， $\operatorname{tr}(\cdot)$ 为求矩阵的迹； $\mathbf{P}_A^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_A$ 为正交投影矩阵； $\mathbf{P}_A = \mathbf{A}\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}(\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ ； $(\cdot)^\dagger$ 为矩阵的广义逆， $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^H\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^H$ 。

由于求解式(8)需要用多维非线性在网格搜索实现，为克服该求解过程中计算量过大的问题，本文对基于泰勒展开的离网格交替投影最大似然算法开展研究，以期完善离网格最大似然相关理论，推动最大似然算法的工程应用。

## 3 基于泰勒展开的离网格交替投影最大似然算法

### 3.1 算法原理

交替投影(AP)算法是一种基于交替优化方法和投影矩阵分解的方法，该方法是通过迭代实现的。在迭代的每一步，仅对一个参数进行优化，而其他参数保持不变，于是第 $p$ 个角度的第 $k+1$ 迭代 $\hat{\theta}_p^{(k+1)}$ 可以通过下面的1维优化问题得到

$$\hat{\theta}_p^{(k+1)} = \max_{\theta_p} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{[\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{(p)}^{(k)}), \mathbf{a}(\theta_p)]} \hat{\mathbf{R}}) \quad (9)$$

式中， $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{(p)}^{(k)}$ 表示 $P-1$ 维已计算出的参数矢量，其为

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{(p)}^{(k)} = [\hat{\theta}_1^{(k)}, \hat{\theta}_2^{(k)}, \dots, \hat{\theta}_{p-1}^{(k)}, \hat{\theta}_{p+1}^{(k)}, \dots, \hat{\theta}_P^{(k)}] \quad (10)$$

文献[15]提出了一种简单有效的初始化方法：

首先，求出第1个信号的DOA估计值，这时有

$$\hat{\theta}_1^{(0)} = \max_{\theta_1} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{\mathbf{a}(\theta_1)} \hat{\mathbf{R}}) \quad (11)$$

然后，假定第一个信号源位于 $\hat{\theta}_1^{(0)}$ ，求出第二个信号的DOA值，即

$$\hat{\theta}_2^{(0)} = \max_{\theta_2} \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{[\mathbf{a}(\hat{\theta}_1^{(0)}), \mathbf{a}(\theta_2)]} \hat{\mathbf{R}}) \quad (12)$$

按照上面的方法进行下去，在第 $p$ 次迭代时，保持前 $p-1$ 个计算好的值不变，求出 $\hat{\theta}_p^{(0)}$ ，如此直至求出 $P$ 个初始值。

由式(9)可知，利用交替投影法实现最大似然参数估计时，需要在参数取值范围内划分计算网格，然后逐点计算代价函数的值。由于实际信号的入射角可能来自于任何方向，信号入射角大概率不会落在划分的网格点上，进而导致参数估计出现离网偏差。针对上述问题，本文首先利用(9)式得到 $\theta_p$ 角的粗估计值 $\hat{\theta}_{p,n}$ ，然后在 $\hat{\theta}_{p,n}$ 的邻域内，对代价函数进行2阶泰勒展开，基于矩阵求导原理推导代价函数的1阶、2阶导数表达式，最终得到最大似然离网格参数估计的闭式解。该算法在实现高精度离网格参数估计的同时，有效降低了算法的计算复杂度。算法具体过程如下：

取交替投影过程中的1维代价函数

$$L(\theta) = \operatorname{tr}(\mathbf{P}_{[\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{(p)}^{(k)}), \mathbf{a}(\theta_p)]} \hat{\mathbf{R}}) \quad (13)$$

在目标函数 $L$ 中对第 $p$ 个信源的粗估计结果 $\hat{\theta}_{p,n}$ 进行2阶泰勒展开，构造新的近似代价函数

$$\tilde{L}(\delta_p) = L(\hat{\theta}_{p,n}) + L'(\hat{\theta}_{p,n})\delta_p + \frac{1}{2}L''(\hat{\theta}_{p,n})\delta_p^2 \quad (14)$$

式中， $\delta_p = \theta_p - \hat{\theta}_{p,n}$ 为 $\hat{\theta}_{p,n}$ 的偏移量； $L'(\hat{\theta}_{p,n})$ 和 $L''(\hat{\theta}_{p,n})$ 分别为 $L(\hat{\theta})$ 在 $\hat{\theta}_{p,n}$ 处的1阶导数值和2阶导

数值。从式(14)中可以看出, 近似代价函数值  $\tilde{L}(\delta_p)$  与预定义大网格下的粗估计值  $\hat{\theta}_{p,n}$  有关, 则近似精度与预定义网格大小有关。预定义网格较小, 近似代价函数与原代价函数之间的偏差较小, 同时, 算法运算时间较长; 预定义网格较大, 算法运行时间较短, 但是, 近似代价函数与原代价函数之间的偏差也就较大。为平衡算法运行时间和精度之间的关系, 应选择合适的预定义网格大小, 仿真实验3针对此问题进行了仿真分析。

为了求出近似代价函数  $\tilde{L}$  的最大值, 将  $\tilde{L}$  对偏移量  $\delta_p$  求导, 并令其导数为零, 解得

$$\delta_p = -\frac{L'(\hat{\theta}_{p,n})}{L''(\hat{\theta}_{p,n})} \quad (15)$$

则根据以上分析, 第  $p$  个信源的离网格估计结果为

$$\hat{\theta}_p^{(k+1)} = \hat{\theta}_{p,n} + \delta_p \quad (16)$$

注意到, 离网格参数的求解与代价函数的导数有关, 为得到离网格参数估计的闭式解, 本文对其进行推导。

由矩阵迹的性质

$$d(\text{tr } \mathbf{X}) = \text{tr}(d \mathbf{X}) \quad (17)$$

可将式(15)中1维代价函数  $L(\theta) = \text{tr}(\mathbf{P}_B \hat{\mathbf{R}})$  的1阶导数  $L'(\theta)$  及2阶导数  $L''(\theta)$  整理为

$$L'(\theta) = \frac{d \text{tr}(\mathbf{P}_B \hat{\mathbf{R}})}{d\theta} = \text{tr}(\mathbf{P}_B' \hat{\mathbf{R}}) \quad (18)$$

$$L''(\theta) = \frac{d^2 \text{tr}(\mathbf{P}_B \hat{\mathbf{R}})}{d\theta^2} = \text{tr}(\mathbf{P}_B'' \hat{\mathbf{R}}) \quad (19)$$

式中,  $\mathbf{P}_B'$ ,  $\mathbf{P}_B''$  分别代表投影矩阵  $\mathbf{P}_B = \mathbf{B}\mathbf{B}^\dagger = \mathbf{B}(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$  的1阶导数和2阶导数,  $\mathbf{B}(\theta) = [\mathbf{A}(\hat{\boldsymbol{\Theta}}^{(k)}), \mathbf{a}(\theta)]$  为交替投影过程中第  $k$  次迭代第  $p$  次交替投影的导向矢量, 则有

$$\mathbf{B}'(\theta) = [0, \mathbf{a}'(\theta)] \quad (20)$$

$$\mathbf{B}''(\theta) = [0, \mathbf{a}''(\theta)] \quad (21)$$

式中,  $\mathbf{a}'(\theta)$ ,  $\mathbf{a}''(\theta)$  分别代表  $\mathbf{a}(\theta)$  的1阶导数和2阶导数。

首先推导投影矩阵的1阶导数, 利用求导数的链式法则, 得

$$\mathbf{P}_B' = \mathbf{B}'\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\dagger'} \quad (22)$$

伪逆矩阵  $\mathbf{B}^\dagger = (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H$  的1阶导数  $\mathbf{B}^{\dagger'}$  为

$$\mathbf{B}^{\dagger'} = ((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1})' \mathbf{B}^H + (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \quad (23)$$

由矩阵微分的性质

$$d(\mathbf{X}^{-1}) = -\mathbf{X}^{-1}(d\mathbf{X})\mathbf{X}^{-1} \quad (24)$$

有

$$\begin{aligned} ((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1})' &= -((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1})(\mathbf{B}^H \mathbf{B})'((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1}) \\ &= -(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \\ &\quad - (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{B}' (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \end{aligned} \quad (25)$$

结合式(25), 可将式(23)整理为

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{\dagger'} &= ((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1})' \mathbf{B}^H + (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \\ &= -(\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \\ &\quad - (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{B}' (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \\ &\quad + (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \\ &= (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} (I - \mathbf{B} (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H) \\ &\quad - (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \mathbf{B}' (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^H \\ &= (\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \mathbf{P}_B^\perp - \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger \end{aligned} \quad (26)$$

进一步地, 将式(26)代入式(22)并整理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B' &= \mathbf{B}'\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}\mathbf{B}^{\dagger'} \\ &= \mathbf{B}'\mathbf{B}^\dagger + \mathbf{B}((\mathbf{B}^H \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{H'} \mathbf{P}_B^\perp - \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger) \\ &= \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger + (\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger)^H \end{aligned} \quad (27)$$

式中,  $\mathbf{P}_B^\perp = I - \mathbf{P}_B$ 。

结合式(27), 可将式(18)整理为

$$\begin{aligned} L'(\theta) &= \text{tr}((\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger + (\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger)^H) \hat{\mathbf{R}}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger \hat{\mathbf{R}}) + \text{tr}((\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger)^H \hat{\mathbf{R}}) \end{aligned} \quad (28)$$

阵列接收数据协方差矩阵具有共轭对称性, 即

$$\mathbf{R}^H = \mathbf{R} \quad (29)$$

又, 矩阵的迹存在以下性质<sup>[22]</sup>

$$\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}\mathbf{A}) \quad (30)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A}^H) = [\text{tr}(\mathbf{A})]^* \quad (31)$$

则代价函数的1阶导数  $L'(\theta)$  可整理为

$$L'(\theta) = 2\text{Re}(\text{tr}(\mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger \hat{\mathbf{R}})) \quad (32)$$

式中,  $\text{Re}(\cdot)$  表示取实部。

下面对投影矩阵的2阶导数进行推导:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_B'' &= \mathbf{P}_B^{\perp'} \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}'' \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^{\dagger'} \\ &\quad + (\mathbf{P}_B^{\perp'} \mathbf{B}' \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}'' \mathbf{B}^\dagger + \mathbf{P}_B^\perp \mathbf{B}' \mathbf{B}^{\dagger'})^H \end{aligned} \quad (33)$$

注意到,  $\mathbf{P}_B^\perp = I - \mathbf{P}_B$ , 则有  $\mathbf{P}_B^{\perp'} = -\mathbf{P}_B'$ , 结合式(27), 式(33)可整理为

$$\begin{aligned}
P_B'' &= -P_B' B' B^\dagger + P_B^\perp B'' B^\dagger + P_B^\perp B' \\
&\cdot ((B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp - B^\dagger B' B^\dagger) \\
&+ (-P_B' B' B^\dagger + P_B^\perp B'' B^\dagger \\
&+ P_B^\perp B' ((B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp - B^\dagger B' B^\dagger))^H \\
&= -2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger - (B^\dagger)^H (B')^H P_B^\perp B' B^\dagger \\
&+ P_B^\perp B'' B^\dagger + P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp \\
&+ (-2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger - (B^\dagger)^H (B')^H P_B^\perp B' B^\dagger \\
&+ P_B^\perp B'' B^\dagger + P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp)^H \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L''(\theta) &= 2\text{Re}(\text{tr}(-2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger \hat{R}) - \text{tr}((B^\dagger)^H (B')^H P_B^\perp B' B^\dagger \hat{R}) \\
&+ \text{tr}(P_B^\perp B'' B^\dagger \hat{R}) + \text{tr}(P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp \hat{R})) \quad (36)
\end{aligned}$$

在得到代价函数的1阶、2阶导数表达式后，综合式(15)，得到第 $p$ 个信源的离网偏差 $\delta_p$ 为

$$\begin{aligned}
\delta_p &= -\frac{L'(\hat{\theta}_{p,n})}{L''(\hat{\theta}_{p,n})} \\
&= -\frac{\text{Re}(\text{tr}(P_B^\perp B' B^\dagger \hat{R}))}{\text{Re}(\text{tr}(-2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger \hat{R}) - \text{tr}((B^\dagger)^H (B')^H P_B^\perp B' B^\dagger \hat{R}) \\
&+ \text{tr}(P_B^\perp B'' B^\dagger \hat{R}) + \text{tr}(P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp \hat{R}))} \quad (37)
\end{aligned}$$

综上所述，本文所提算法在交替投影将多维搜索转换为多个1维搜索的基础上，利用矩阵分析的相关理论，推导了1维代价函数的1阶导数和2阶导数，并利用2阶泰勒展开近似表示最大似然代价函数，求得了离网格参数的闭式表达式，实现了参数的高精度离网格估计，算法具体的步骤如下：

步骤1 通过阵列接收数据 $\mathbf{Y}$ ，根据式(11)、式(12)进行初值估计，得到空间角度的 $P$ 个初始估计值 $\hat{\theta}_1^{(0)}, \hat{\theta}_2^{(0)}, \dots, \hat{\theta}_P^{(0)}$ 。

步骤2 根据式(9)进行1次1维搜索得到第 $p(p=1, 2, \dots, P)$ 个角度大网格对应的参数粗估计结果 $\hat{\theta}_{p,n}$ 。

步骤3 计算代价函数 $L(\theta)$ 的1阶导数 $L'(\hat{\theta}_{p,n})$ 和2阶导数 $L''(\hat{\theta}_{p,n})$ ，其中 $L'(\hat{\theta}_{p,n})$ 由式(32)计算， $L''(\hat{\theta}_{p,n})$ 由式(36)计算。

步骤4 利用式(37)得到离网参数 $\delta_p$ ，根据式(16)更新参数估计结果，得到第 $p$ 个角度的第 $k+1$ 迭代估计值 $\hat{\theta}_p^{(k+1)}$ 。

步骤5 重复步骤2-4，交替优化参数估计结果，当满足搜索精度或达到最大迭代次数时结束循环，得到空间角度的 $P$ 个估计值 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_P$ 。

### 3.2 算法计算复杂度分析

在计算复杂度方面，本文提出算法的计算量可分为阵列协方差矩阵计算、代价函数计算、离网参数计算3部分。为方便分析，假设算法对应的导向矢量通过正余弦查表得到，暂不考虑其计算量，与

将式(34)代入式(19)，代价函数的2阶导数 $L''(\theta)$ 可整理为

$$\begin{aligned}
L''(\theta) &= \text{tr}((-2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger - (B^\dagger)^H (B')^H \\
&\cdot P_B^\perp B' B^\dagger + P_B^\perp B'' B^\dagger + P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} \\
&\cdot B^{H'} P_B^\perp) \hat{R} + (-2P_B^\perp B' B^\dagger B' B^\dagger \\
&- (B^\dagger)^H (B')^H P_B^\perp B' B^\dagger + P_B^\perp B'' B^\dagger \\
&+ P_B^\perp B' (B^H B)^{-1} B^{H'} P_B^\perp)^H \hat{R}) \quad (35)
\end{aligned}$$

结合矩阵的迹的性质及接收数据协方差的性质，可进一步将式(35)整理为

计算量有关的参数为阵元个数 $M$ 、入射信源个数 $P$ 、快拍数 $L$ 、迭代次数 $i_{max}$ 。不失一般性，假设空间角度的搜索范围为其值域范围，即 $-90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ，令1次1维搜索点数为 $N_1$ 。

#### 3.2.1 阵列协方差矩阵计算

两个复数相乘的计算量为 $(4m+2a)$  ( $m$ 表示乘法运算， $a$ 表示加法运算，下同)，因此其单快拍自相关矩阵的计算量为 $M \times M \times (4m+2a)$ ，对 $L$ 个快拍，阵列自相关矩阵的计算量为 $L \times M^2 \times (4m+4a)$ 。

#### 3.2.2 1维代价函数计算

代价函数部分的计算量由需要计算的代价函数点数和每点所需的计算量确定。本文算法利用交替投影技术将 $P$ 维搜索转化为 $P$ 次1维搜索，首先需要进行 $P$ 次1维搜索以完成初值估计，搜索的点数为 $P \times N_1$ ；之后进行 $i_{max}$ 次迭代，每次迭代同样需要进行 $P$ 次1维搜索，搜索次数为 $i_{max} \times P \times N_1$ ；则本文算法总共所需计算的代价函数点数为 $(i_{max}+1) \times P \times N_1$ 。每个函数点涉及的计算量包括投影矩阵的计算、投影矩阵与协方差矩阵相乘得到的矩阵 $\mathbf{P}_R$ 的计算以及 $\mathbf{P}_R$ 的迹的求解计算。其中，计算投影矩阵的计算量为 $((P-1)P(P+1)/6 + M^2P + 2MP^2) \times (4m+2a) + ((P-1)P(P+1)/6M^2P + 2MP^2) \times 2a$ ，计算 $\mathbf{P}_R$ 需要的计算量为 $M^2 \times M \times (4m+2a) + M^2 \times M \times 2a$ ，计算 $\mathbf{P}_R$ 的迹需要的计算量为 $M \times 2a$ ，整理后可得代价

函数计算所需要的计算量为  $(i_{max} + 1) \times P \times N_1 \times [((P - 1)P(P + 1)/6 + M^2P + 2MP^2 + M^3) \times (4m + 4a) + M \times 2a]$ 。

### 3.2.3 离网参数求解

离网参数的求解仅需要在迭代过程中进行, 求解次数为  $i_{max} \times P$ , 其计算量由1阶导数的计算量和2阶导数的计算量确定。其中, 1阶导数的计算量为  $(M^3 + 3M^2P + 4MP^2 + (P - 1)P(P + 1)/3) \times (4m + 4a) + (M^2 + M) \times 2a$ , 2阶导数的计算量为  $(6M^3 + 11M^2P + 6MP^2 + (P - 1)P(P + 1)/2) \times (4m + 4a) + (M^2 + 4M) \times 2a + M^2 \times 2m$ , 整理后可得离网参数求解所需要的计算量为  $i_{max} \times P \times [(7M^3 + 14M^2P + 10MP^2 + 5(P - 1)P(P + 1)/6) \times (4m + 4a) + (M^2 + 5M) \times 2a + M^2 \times 2m]$ 。

整理可得本文所提算法所需计算量为

$$C = \{L \times M^2 + (i_{max} + 1) \times P \times N_1 \times ((P - 1) \cdot P(P + 1)/6 + M^2P + 2MP^2 + M^3) + i_{max} \times P \times (7M^3 + 14M^2P + 10MP^2 + 5(P - 1)P(P + 1)/6)\} \times (4m + 4a) + \{(i_{max} + 1) \times P \times N_1 \times M + i_{max} \times P \times (M^2 + 5M)\} \times 2a + i_{max} \times P \times M^2 \times 2m \quad (38)$$

注意到,  $M > P$ , 则算法计算复杂度为  $O(LM^2) + O(i_{max}N_1M^3P)$ 。

## 4 仿真验证

由本文的分析过程可知, 该算法对阵型无限制, 下面仅以均匀线阵为例进行分析。仿真所用阵列为10阵元均匀线阵, 阵元间距为入射信号波长的1/2; 入射信号由两个中心频率为200 MHz的独立信源生成, 快拍数据长度为100。

**实验1** 验证本文算法测角性能。选取ML算法、基于交替投影的最大似然(Alternating Projection Maximum Likelihood, APML)算法和文献[20]算法为对比算法, 其中本文所提算法及文献[20]所提算法的搜索网格为 $1^\circ$ , ML算法及APML算法的搜索网格为 $0.01^\circ$ 。仿真中取信号入射角度为最坏情况(位于网格中央), 分别为 $-8.5^\circ$ ,  $8.5^\circ$ , 信噪比以2 dB间隔在 $0 \sim 20$  dB变化, 进行200次蒙特卡洛实验, 得到波达方向估计RMSE结果随信噪比的变化如图2所示, 统计各算法平均运行时间如表1所示。

由图2可以看出, 本文算法测角性能优于文献[20]所提算法、ML算法及APML算法; 同时, 随着信噪比的增大, 本文所提算法测角性能改善越来越好, 信噪比为20 dB时, 本文算法与细网格ML算法相比DOA估计性能可提高约25.8%。这是因为本

文算法在粗网格估计的基础上, 采用泰勒展开进行离网偏差的闭式求解, 因此在采用大网格搜索也可达到与细网格ML算法一致的测角性能; 此外, 本文所提算法所得为闭式解, 与细网格ML算法相比估角结果精度更高, 估角结果也更加精确。需要注意的是, 本文从实际工程应用中高精度要求出发, ML算法与APML算法采用较小的网格以达到较高的精度, 而本文算法与文献[20]所提算法为离网格DOA估计算法, 采用较大的网格即可达到较高的精度, 因此, 两类算法采用不同的搜索网格。

采用3.2节相同方法, 分析文献[20]算法、ML算法及APML算法计算量, 与本文方法的计算量进行对比。

文献[20]算法:

$$C_{[20]} = \{L \times M^2 + N_1 \times (M - P) \times (M + 1) + P \times [3M(M - P) + 2M - P]\} \times (4m + 4a) + M^3 \times (4m + 2a) \quad (39)$$

算法计算复杂度为  $O(LN_1M^4)$ 。

ML算法:

$$C_{ML} = \{L \times M^2 + N_2^P \times ((P - 1)P(P + 1)/6 + M^2P + 2MP^2 + M^3)\} \times (4m + 4a) + N_2^P \times M \times 2a \quad (40)$$

算法计算复杂度为  $O(LM^2) + O(N_2^P M^3)$ 。

APML算法:

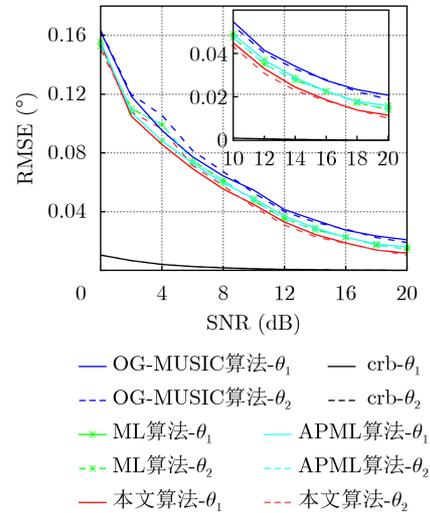


图2 RMSE随信噪比的变化

表1 算法平均运行时间

	本文算法	文献[20]算法	ML	APML
理论计算量	式(38)	式(39)	式(40)	式(41)
确定计算量	$1.5441 \times 10^7$	$2.1755 \times 10^5$	$3.3272 \times 10^{12}$	$1.4788 \times 10^9$
运行时间(s)	0.0108	$8.1673 \times 10^{-4}$	$2.5644 \times 10^3$	0.9785

$$C_{APML} = \{L \times M^2 + (i_{\max} + 1) \times P \times N_2 \times ((P - 1)P(P + 1)/6 + M^2P + 2MP^2 + M^3)\} \times (4m + 4a) + (i_{\max} + 1) \times P \times N_2 \times M \times 2a \quad (41)$$

算法计算复杂度为 $O(LM^2) + O(i_{\max}N_2M^3P)$ 。

式中,  $N_1$ 为本文所提算法及文献[20]算法的网格点数,  $N_2$ 为ML算法及APML算法的网格点数。

在此基础上, 取算法迭代次数  $i_{\max} = 3$ ,  $L = 100$ ,  $M = 10$ ,  $P = 2$ ,  $N_1 = 181$ ,  $N_2 = 18001$  计算各算法的理论计算量, 同时与蒙特卡洛实验统计得到的各算法运行时间进行横向对比, 得到对比结果如表1所示。

由表1可知, 4种算法的理论计算量之比约为1:0.0141:215000:96; 4种算法运行时间之比为1:0.0756:237000:91。其中, ML算法主要进行  $N_2^P$  次代价函数值计算, APML算法主要进行  $(i_{\max} + 1)PN_2$  次代价函数值计算, 为保证算法精度, 取较大  $N_2$  值时, 计算量较大; 本文所提算法主要进行  $(i_{\max} + 1)PN_1$  次代价函数值计算以及  $i_{\max}P$  次离网参数的求解, 与ML算法及APML算法相比计算量较小; 文献[20]算法主要进行  $N_1$  次谱函数值计算以及  $P$  次离网参数的求解, 与本文算法相比, 计算量更小, 但是, 从图2可以看出, 该方法参数估计性能略逊于本文算法, 且受MUSIC算法本身的限制, 该算法无法实现相干源条件下参数估计。

综上所述, 本文提出的算法在保证算法精度的基础上, 缩短了运行时间, 大大提高了算法效率, 保证了最大似然算法在实际工程应用中的实时性要求。

**实验2** 本文算法适用性验证。仿真中固定信噪比为20 dB, 本文方法计算网格分别取 $0.5^\circ$ ,  $1^\circ$ ,  $1.5^\circ$ ,  $2^\circ$ , 将本文所提泰勒展开构造的近似代价函数与 $0.01^\circ$ 网格情况下ML算法代价函数作对比, 其结果如图3所示。

从图3中可以看出, 在 $0.5^\circ$ 小网格情况下, 2阶泰勒展开的近似代价函数可实现对ML算法代价函数的完美拟合; 但随着网格逐渐增大, 近似代价函数的拟合误差逐渐增大, 进而导致离网格角度估计误差增大, 影响算法的性能。因此在实际工程应用中, 网格选取不宜过大, 过大的网格将会带来较大的测角误差。

**实验3** 考察本文所提算法性能及运行时间随网格大小的变化关系。仿真中假定信号入射角度处于网格正中间(对应最差的离网格估计情况), 固定信噪比为20 dB, 网格大小以 $0.1^\circ$ 间隔在 $0.5 \sim 2.5^\circ$ 之间变化, 进行500次蒙特卡洛实验, 分别统计算法的参数估计精度和运行时间, 得到仿真结果如图4所示。

从图4可以看出, 随着网格大小的增大, 算法运行时间逐渐减小, 其原因在于算法搜索次数随着

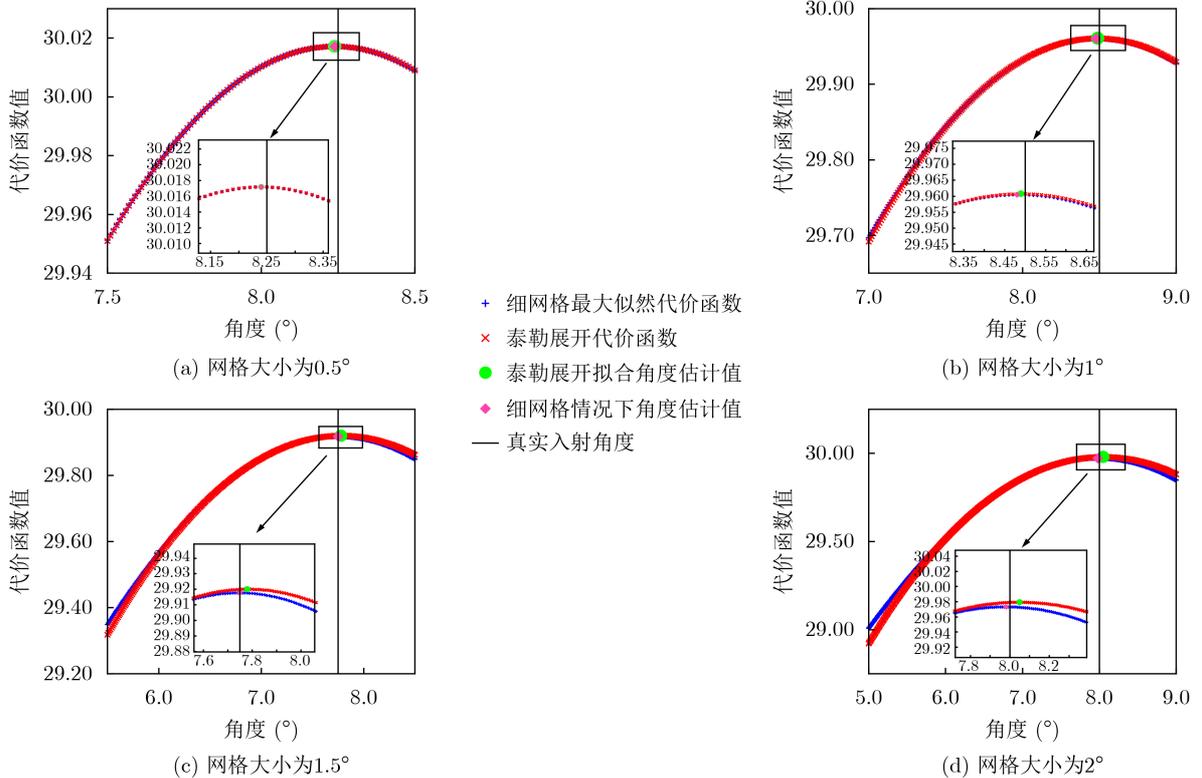


图3 泰勒展开拟合情况

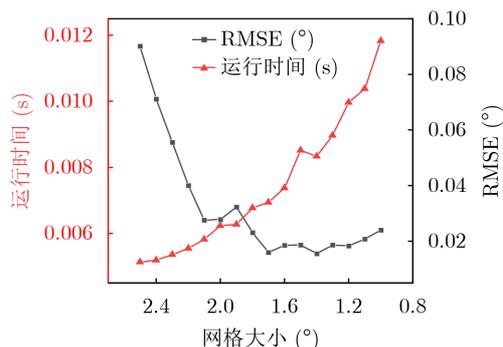


图 4 算法性能及运行时间随网格大小的变化

网格增大而减小。但值得注意的是，算法性能随着网格大小的增大逐渐变差，这是由于泰勒展开拟合效果受网格大小影响，当网格大小较大时，拟合效果下降，进而导致本文所提算法性能下降。同时，随着网格大小越来越小，算法性能改善效果不大，这是因为当网格大小为 $1.5^\circ$ 左右时，利用2阶泰勒展开得到的近似代价函数几乎可以与原代价函数完美拟合，网格大小进一步减小，拟合效果改善较小，对本文算法性能改善效果不明显。在实际工程应用中，网格大小的选取需要根据算法性能需要与算法效率需求综合考虑，一般情况下，网格大小可取 $1.5^\circ$ 。

## 5 结束语

本文提出了一种基于泰勒展开的离网格交替投影最大似然算法。该算法在利用交替投影技术将多维代价函数寻优转化为多个1维代价函数寻优的基础上，通过矩阵导数运算原理，推导了代价函数的1阶、2阶导数表达式，在此基础上对代价函数进行2阶泰勒展开构造新的近似代价函数，进一步求偏导令其等于零得到离网偏差的闭式表达式，突破了搜索网格大小的限制，减少了算法搜索的次数，在保证精度的同时降低了运算复杂度，进一步平衡了算法精度与运算效率之间的关系。仿真结果验证了算法的有效性，与APML算法相比，本文所提算法能在改善算法性能的基础上，将运行时间降为 $1/91$ ，且在信噪比为 $20\text{ dB}$ 情况下，本文所提算法测角性能可提高 $25.8\%$ 。

## 参考文献

- [1] SHAMAEI K and KASSAS Z M. A joint TOA and DOA acquisition and tracking approach for positioning with LTE signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 2689–2705. doi: [10.1109/TSP.2021.3068920](https://doi.org/10.1109/TSP.2021.3068920).
- [2] LONMO T I B, AUSTENG A, and HANSEN R E. Data-driven autocalibration for swath sonars[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2021, 46(3): 979–987. doi: [10.1109/JOE.2020.3036184](https://doi.org/10.1109/JOE.2020.3036184).
- [3] SCHMID R. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: [10.1109/TAP.1986.1143830](https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830).
- [4] ROY R and KAILATH T. ESPRIT — estimation of signal parameters via rotational invariance techniques[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1989, 37(7): 984–995. doi: [10.1109/29.32276](https://doi.org/10.1109/29.32276).
- [5] WAX M and ADLER A. Direction of arrival estimation in the presence of model errors by signal subspace matching[J]. *Signal Processing*, 2021, 181: 107900. doi: [10.1016/j.sigpro.2020.107900](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2020.107900).
- [6] SUN Meng, WANG Yide, and PAN Jingjing. Direction of arrival estimation by a modified orthogonal propagator method with spline interpolation[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2019, 68(11): 11389–11393. doi: [10.1109/TVT.2019.2944516](https://doi.org/10.1109/TVT.2019.2944516).
- [7] ASGHARI M, ZAREINEJAD, REZAEI S M, et al. DOA estimation of noncircular signals under impulsive noise using a novel empirical characteristic function-based MUSIC[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2023, 42(6): 3706–3743. doi: [10.1007/s00034-022-02289-9](https://doi.org/10.1007/s00034-022-02289-9).
- [8] LIN Hongguang, JIN Longsheng, DING Ruixuan, et al. DOA estimation method for incoherently distributed sources based on spatial-temporal generalized ESPRIT[J]. *AEU - International Journal of Electronics and Communications*, 2023, 168: 154701. doi: [10.1016/j.aeue.2023.154701](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2023.154701).
- [9] ZHANG Wei, HAN Yong, JIN Ming, et al. An improved ESPRIT-like algorithm for coherent signals DOA estimation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2020, 24(2): 339–343. doi: [10.1109/LCOMM.2019.2953851](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2019.2953851).
- [10] YANG Zai, CHEN Xinyao, and WU Xunmeng. A robust and statistically efficient maximum-likelihood method for DOA estimation using sparse linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2023, 59(5): 6798–6812. doi: [10.1109/TAES.2023.3280894](https://doi.org/10.1109/TAES.2023.3280894).
- [11] GAO Yumeng, LI Jianghui, BAI Yechao, et al. An improved subspace weighting method using random matrix theory[J]. *Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering*, 2020, 21(9): 1302–1307. doi: [10.1631/FITEE.1900463](https://doi.org/10.1631/FITEE.1900463).
- [12] CADZOW J A. A high resolution direction-of-arrival algorithm for narrow-band coherent and incoherent sources[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(7): 965–979. doi: [10.1109/29.1618](https://doi.org/10.1109/29.1618).
- [13] SWINDLEHURST A. Alternative algorithm for maximum likelihood DOA estimation and detection[J]. *IEE Proceedings - Radar, Sonar and Navigation*, 1994, 141(6): 411–416.

- 293–299. doi: [10.1049/ip-rsn:19941366](https://doi.org/10.1049/ip-rsn:19941366).
- [14] VIBERG M, OTTERSTEN B, and KAILATH T. Detection and estimation in sensor arrays using weighted subspace fitting[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1991, 39(11): 2436–2449. doi: [10.1109/78.97999](https://doi.org/10.1109/78.97999).
- [15] ZISKIND I and WAX M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1988, 36(10): 1553–1560. doi: [10.1109/29.7543](https://doi.org/10.1109/29.7543).
- [16] FU Haosheng, DAI Fengzhou, and HONG Ling. Off-grid error calibration for DOA estimation based on sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2023, 72(12): 16293–16307. doi: [10.1109/TVT.2023.3298965](https://doi.org/10.1109/TVT.2023.3298965).
- [17] GUO Qijia, XIN Zhinan, ZHOU Tian, *et al.* Off-grid space alternating sparse Bayesian learning[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2023, 72: 1002310. doi: [10.1109/TIM.2023.3243677](https://doi.org/10.1109/TIM.2023.3243677).
- [18] YANG Zai, XIE Lihua, and ZHANG Cishen. Off-grid direction of arrival estimation using sparse Bayesian inference[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(1): 38–43. doi: [10.1109/TSP.2012.2222378](https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2222378).
- [19] MA Yanan, CAO Xianbin, and WANG Xiangrong. Efficient off-grid DOA estimation based on modified MUSIC for arbitrary linear arrays[C]. Proceedings of 2019 IEEE International Conference on Signal, Information and Data Processing (ICSIDP), Chongqing, China, 2019: 1–5. doi: [10.1109/ICSIDP47821.2019.9173323](https://doi.org/10.1109/ICSIDP47821.2019.9173323).
- [20] 曾富红, 彭占立, 司伟建, 等. 基于双平行互质极化敏感阵列的二维非网格DOA及极化参数估计[J]. *航空兵器*, 2023, 30(3): 129–135. doi: [10.12132/ISSN.1673-5048.2022.0191](https://doi.org/10.12132/ISSN.1673-5048.2022.0191).
- ZENG Fuhong, PENG Zhanli, SI Weijian, *et al.* Two-dimensional off-grid DOA and polarization parameter estimation for parallel coprime polarization sensitive array[J]. *Aero Weaponry*, 2023, 30(3): 129–135. doi: [10.12132/ISSN.1673-5048.2022.0191](https://doi.org/10.12132/ISSN.1673-5048.2022.0191).
- [21] 揭允康, 张雯, 李想, 等. 一种基于迭代自适应的离网格DOA估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2023, 45(10): 3805–3811. doi: [10.11999/JEIT221061](https://doi.org/10.11999/JEIT221061).
- JIE Yunkang, ZHANG Wen, LI Xiang, *et al.* An off-grid DOA estimation based on iterative adaptive approach[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2023, 45(10): 3805–3811. doi: [10.11999/JEIT221061](https://doi.org/10.11999/JEIT221061).
- [22] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2013: 50.
- ZHANG Xianda. Matrix Analysis and Applications[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 50.
- 刘 帅: 男, 博士, 教授, 研究方向为阵列信号处理、空时极化自适应信号处理、雷达电子对抗.
- 许媛媛: 女, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理.
- 闫锋刚: 男, 博士, 教授, 研究方向为反辐射导引头技术、干扰与抗干扰技术、分布式探测与感知、超分辨测量与识别、域特征获取与处理.
- 金 铭: 男, 博士, 教授, 研究方向为雷达对抗、空间谱估计、极化阵列信号处理.

责任编辑：马秀强