

基于二阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计

侯进* 盛尧宝 张波

(西南交通大学信息科学与技术学院智能感知智慧运维实验室 成都 611756)

摘要: 为了减小天线阵流形误差对波达方向(DOA)估计结果的影响, 以及克服基于传统盲源分离算法的DOA估计算法不能应用于少通道测向设备的不足, 提出一种基于二阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计算法。首先, 根据确定性最大似然(DML)估计算法谱函数的特征, 构造关于协方差矩阵的酉约束下的优化问题; 然后, 通过优化该问题获得各个单信号的实际方向向量; 最后, 将各个单信号的实际方向向量输入到空间谱算法中实现DOA估计。由于将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计, 因此在天线阵列流形存在误差时, 所提算法比传统的DOA方法具有更好的DOA估计性能。由于所提算法仅需使用协方差矩阵, 因此所提算法可应用于少通道测向设备。由仿真实验结果可知, 在阵列流形存在误差以及测向设备为少通道测向设备时, 与传统DOA方法相比, 所提算法的DOA估计的准确度、抗扰度以及分辨率更高。

关键词: DOA估计; 天线阵列流形误差; 盲源分离; 酉约束

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2024)02-0697-08

DOI: [10.11999/JEIT230172](https://doi.org/10.11999/JEIT230172)

DOA Estimation of Direction Vector Estimation Algorithm Based on Second-order Statistical Properties

HOU Jin SHENG Yaobao ZHANG Bo

(IPSOM Lab, School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 611756, China)

Abstract: In order to reduce the influence of errors of antenna array manifold on Direction of Arrival (DOA) estimation results, and to overcome the shortcoming of DOA estimation algorithm based on traditional blind source separation algorithm that can not be applied to direction-finding equipment with few channel receivers, a DOA estimation algorithm of direction vector estimation algorithm based on second-order statistical properties is proposed. Firstly, according to the characteristics of spectral function of Deterministic Maximum Likelihood (DML) estimation algorithm, an optimization problem with unitary constraints on covariance matrix is constructed. Then, the actual direction vector of each single signal is obtained by optimizing the problem. Finally, the actual direction vectors of each single signal are input into the spatial spectral algorithm to achieve DOA estimation. Because the DOA estimation of multiple signals is transformed into the DOA estimation of multiple single signals, the proposed algorithm has better DOA estimation performance than the traditional DOA method when the antenna array manifold has errors. Because the proposed algorithm only uses covariance matrix, the proposed algorithm can be applied to direction-finding equipment with few channel receivers. The simulation results show that the proposed algorithm has higher accuracy, immunity and resolution than the traditional DOA estimation algorithm when the array manifold has errors and the equipment is the direction-finding equipment with few channel receivers.

Key words: Direction of Arrival (DOA) estimation; Errors of antenna array manifold; Blind source separation; Unitary constraint

收稿日期: 2023-03-20; 改回日期: 2023-07-14; 网络出版: 2023-07-20

*通信作者: 侯进 jhou@swjtu.edu.cn

基金项目: 国家重点研发计划(2020YFB1711902)

Foundation Item: The National Key R&D Plan (2020YFB1711902)

1 引言

作为阵列信号处理领域的核心研究内容之一,波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计已被广泛应用到了各个领域^[1-3]。在DOA估计的实际应用场景中,由于天线阵列不可避免地存在内部干扰、阵元互耦等因素的影响,天线阵列对信号的幅值和相位的实际响应往往会偏离理论响应,即天线的实际阵列流形与理论阵列流形往往会存在差别^[4]。多信号分类算法(Multiple Signal Classification, MUSIC)^[5]、旋转不变子空间算法(Estimating Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques, ESPRIT)^[6]、确定性极大似然估计算法(Deterministic Maximum likelihood, DML)^[7]、正交匹配追踪算法(Orthogonal Matching Pursuit, OMP)^[8]等经典空间谱算法都需要用到天线的阵列流形。在阵列流形存在误差时,上述空间谱算法的谱峰的峰宽比较大,DOA估计结果容易出现较大的误差,尤其在两个信号之间的夹角较小时,两个信号的谱峰很容易相互影响造成DOA估计出错。因此,在阵列流形存在误差的应用背景下,如何提升DOA估计算法的性能是值得研究的问题。

针对这一问题,国内外很多学者采取的方法是互耦矫正,这类方法的研究热点是在线自校正方法^[9,10],这类方法将互耦系数、DOA等参数转化为多参数的联合估计问题,存在计算量庞大、不易工程实施等缺点。此外,另一种有效的方法是先采用盲源分离算法估计出各个单信号的实际方向向量,然后再以实际方向向量为基础使用空间谱算法估计各个单信号的DOA^[11,12]。传统盲源分离算法主要以分离后的信号的互信息最小、非高斯性最强等作为分离准则,常见的经典算法有快速不动点算法(Fast Fixed-point Algorithm, FastICA)^[13]和特征矩阵联合相似对角化算法(Joint Approximative Diagonalization of Eigenmatrix, JADE)^[14]。

在DOA估计的实际应用场景中,由于通道接收机体积庞大和价格昂贵等原因,测向设备一般为少通道测向设备,即测向设备的通道接收机数小于天线阵列阵元数的测向设备^[15],例如单通道九阵元圆阵测向设备、三通道九阵元圆阵测向设备。当测向设备为少通道测向设备时,通道接收机会以时间片轮转的方式在不同的阵元处接收信号数据,由于传统盲源分离算法需要使用信号的高阶统计信息,因此传统盲源分离算法仅能获得同一个时间片中的某几个阵元的实际方向矩阵,而不能获得阵列中所有阵元实际方向矩阵,因此基于传统盲源分离算法的DOA估计算法不能应用于少通道测向设备。因

此,探索一种适用于少通道测向设备的基于方向向量估计算法的DOA估计算法有重要意义。

针对以上问题,本文提出了一种基于2阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计算法。首先,根据DML估计算法谱函数的特征,构造关于协方差矩阵的西约束下的优化问题;然后,采用西约束下的粒子群算法和西约束下的梯度下降算法对问题进行优化,求得所需西矩阵;随后,使用所求西矩阵求得各个单信号的实际方向向量;最后,将各个单信号的实际方向向量输入到空间谱算法中实现DOA估计。由于将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计,因此在阵列流形存在误差时,该算法比传统的DOA方法具有更好的DOA估计性能。由于所提算法仅需使用协方差矩阵,因此所提算法可应用于少通道测向设备。由仿真实验结果可知,在阵列流形存在误差以及测向设备为少通道测向设备时,与传统DOA方法相比,所提算法的DOA估计的准确度、抗扰度以及分辨率更高。

2 系统模型

2.1 天线阵列模型

假设空间中均匀圆阵天线阵列(Uniform Circular Array, UCA)的阵元数为 M ,通道接收机数为 m 。假设存在多个信号在空间传播,它们均为窄带远场信号,且与天线阵列处于同一平面。均匀圆阵示意图如图1所示。

当天线阵列对信号幅值和相位的响应不偏离理论值时,若从远场发射而来的独立信源数为 N ,在 t 时刻,阵列接收数据可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中, $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T$ 为未知源信号, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$ 为阵列接收数据, M 为天线阵列阵元数, $\mathbf{n}(t)$ 为功率为 σ^2 的加性高斯白噪声, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_N)]^T$ 为天线阵列的理论方向矩阵,第 n 个信源的理论方向向量 $\mathbf{a}(\theta_n)$ 定义为

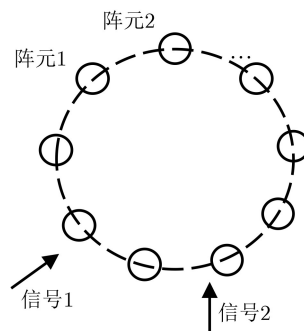


图1 均匀圆阵示意图

$$\mathbf{a}(\theta_n) = \left[\exp \left(-j \frac{2\pi r}{\lambda} \cos(\theta_n - (k-1) \frac{2s}{M}) \right) \right]^H \quad (2)$$

其中, $k = 1, 2, \dots, M$, k 为阵元号, θ_n 表示第 n 个独立信源的波达方向角, λ 是信号的波长, r 为圆阵的半径。

信号的DOA相对于整个估计空间来说是符合空域稀疏的, 因此可对DOA估计空间进行网格划分。在实际应用中, 可以以 1° 为间隔进行网格划分。改变方向角 θ , 让方向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 在2维空间按方向角从小到大进行扫描, 所有网格间隔方向的方向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 构成的集合 \mathbf{D} 为理论阵列流形。

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{a}(\theta) | \theta \in \Theta\} \quad (3)$$

其中, $\Theta = \{1^\circ, 2^\circ, \dots, 360^\circ\}$ 为方向角的参数空间。

当天线阵列对信号幅值和相位的响应偏离理论值时, 阵列接收数据 $\mathbf{x}(t)$ 可表示为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{W}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

其中, $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]$ 为实际方向矩阵, \mathbf{w}_n 为第 n 个信源的实际方向向量。阵列接收数据的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)\} \\ &= \sum_{n=1}^N \mathbf{w}_n \mathbf{w}_n^H E\{s_n(t)s_n^*(t)\} + \sigma^2 \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5)$$

在实际应用中, 常用样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 来代替协方差矩阵。当 $M=m$ 时, 样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 为

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t) \quad (6)$$

其中, L 为阵列接收数据的快拍数。

当 $M > m$ 时, 即测向设备为少通道测向设备时, 阵列响应输出是 m 个通道接收机以时间片轮转的方式, 按照某一特定的顺序在不同的阵元处接收信号数据, 此时整个阵列的样本协方差矩阵不能直接由式(6)得到。在空间信号是平稳过程的情况下, 可以用矩阵拼凑的方法获取整个阵列的样本协方差矩阵。矩阵拼凑的方法是: 在某一轮次的通道轮转中, 若有两个通道接收机在阵元 i 和阵元 j 处同时接收到了信号数据, 则可计算获得样本协方差 r_{ij} , 然后将 r_{ij} 填在 M 行 M 列的矩阵的第 i 行、第 j 列, 经过多次时间片轮转, 可将1个 M 行 M 列的矩阵填满, 填满后的矩阵即为整个阵列的样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 。

2.2 DML伪谱

引理1 在上述数据模型中, 假设噪声为平稳高斯零均值随机白噪声, 且是循环对称的, 其实部和虚部为同一分布, 并且有1个反对称的互协方

差。在上述统计假设下, 信号波达方向角的最大似然估计是下列最大化问题的解^[7]

$$\hat{\theta}_{\text{DML}} = \arg\{\max_{\theta} \text{tr}[\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \hat{\mathbf{R}}]\} \quad (7)$$

其中, tr 为求矩阵的迹, $\hat{\mathbf{R}}$ 为阵列接收数据的样本协方差矩阵, $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^H \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^H$ 。

定理2 当只有1个信号入射到阵列, 其波达方向角的最大似然估计的解等价于下列最大化问题的解

$$\hat{\theta}_{\text{DML}} = \arg\{\max_{\theta} [(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \hat{\mathbf{R}} \mathbf{a}(\theta)]\} \quad (8)$$

其中, $\mathbf{a}(\theta)$ 为理论方向向量, 且 $\mathbf{a}(\theta) \in \mathbf{D}$ 。

证明 当只有1个信号入射到阵列时, 对式(7)的优化等价于优化 $\max_{\theta} \text{tr}[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^+(\theta)\hat{\mathbf{R}}]$ 。根据矩阵和矩阵迹的性质, 有

$$\begin{aligned} &\text{tr}[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^+(\theta)\hat{\mathbf{R}}] \\ &= \text{tr}[\mathbf{a}(\theta)(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}] \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \text{tr}[\mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta)] \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta) \end{aligned} \quad (9)$$

因此, 当只有1个信号入射到阵列时, 信号波达方向角最大似然估计的解等价于式(8)的解。证毕

定理3 当只有1个信号入射到阵列, 其实际方向向量为 \mathbf{w} 时, 定义DML伪谱的谱函数为

$$P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{w}) = (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) \quad (10)$$

证明 根据定理2, 单个信号的DML谱峰搜索函数为 $P_{\text{DML}}(\theta) = (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta)$, 根据式(5), 可得

$$\begin{aligned} &P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{w}) \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\hat{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta) \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)(\mathbf{w}\mathbf{w}^H E\{s(t)s^*(t)\} + \sigma^2 \mathbf{I})\mathbf{a}(\theta) \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}\mathbf{w}^H E\{s(t)s^*(t)\}\mathbf{a}(\theta) \\ &\quad + (\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\sigma^2 \mathbf{I}\mathbf{a}(\theta) \\ &= E\{s(t)s^*(t)\}(\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta) + \sigma^2 \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $E\{s(t)s^*(t)\}$ 的大小仅与源信号本身幅值大小有关, 而与 θ 和 \mathbf{w} 无关, σ^2 为噪声功率, 也与 θ 和 \mathbf{w} 无关。所以在实际应用中, 可忽略 $E\{s(t)s^*(t)\}$ 和 σ^2 , 得到式(10)。证毕

DML伪谱的谱函数是由DML算法所推导得到的, 其反映的是信号实际方向向量与理论方向向量的相关关系。当只有1个信号入射到阵列时, 该信号的实际方向向量与其波达方向所对应的理论方向向量的相关性最大, 而与其他方向所对应的理论方向向量相关性较小, 因此DML伪谱只在信号的波达方向处有1个大的峰值。

3 基于2阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计

3.1 理论推导

假设有 N 个不同方向的独立未知源信号入射到天线阵列。阵列接收数据的样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$ 的特征值分解公式为

$$\hat{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^M \xi_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^H \quad (12)$$

其中, ξ_i 表示 $\hat{\mathbf{R}}$ 的第 i 大的特征值, \mathbf{v}_i 为其对应的特征向量。选取前 N 个大特征值所对应的特征向量构成信号子空间。结合式(5)可知, 实际方向向量张成的子空间与信号子空间是同一个子空间, 所以可以用 N 个大特征值对应的特征向量来初始化实际方向向量。在实际应用中, 可使用改进的最小长度算法(MMDL, Modified Minimum Description Length)^[16], 实现对独立信源数 N 的有效估计。

令实际方向矩阵 \mathbf{W} 的初始化为 \mathbf{W}_0 , $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N]$ 。 \mathbf{W}_0 的列向量张成的子空间与 \mathbf{W} 的列向量张成的子空间是同一个子空间, 故 \mathbf{W}_0 到 \mathbf{W} 的过渡矩阵是1个酉矩阵 \mathbf{U} , 即 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \mathbf{U}$ 。此时, 求实际方向矩阵 \mathbf{W} 的问题转化为求合适的酉矩阵 \mathbf{U} 的问题。

从DML的性质可知, 当只有1个信号入射到阵列时, DML伪谱只在信号的波达方向处有1个较大的峰值。所以当有多个不同方向的信号入射到阵列时, 求酉矩阵 \mathbf{U} , 使得 \mathbf{W} 的每个列向量代入式(10)后所得到的每个DML伪谱都只有1个较大的峰值时, 所求酉矩阵 \mathbf{U} 满足要求。

定理4 若 $\sum_i^N \alpha_i = \beta$, α_i 为大于0的变量, β 为常数。当只有1个变量趋向于 β , 其余 $N-1$ 个变量趋向于0时, $\sum_i^N \alpha_i^2$ 取得最大值。

证明 假设 α_i 的取值范围为非负实数, 由于 $\beta^2 = \left(\sum_i^N \alpha_i\right)^2 \geq \sum_i^N \alpha_i^2$, 故 α_i 中只有1个取值为 β , 其余 $N-1$ 个取值为0时, 等号成立, 即 $\sum_i^N \alpha_i^2$ 的值最大。同理, 当 α_i 的取值范围为正实数时, α_i 中只有1个趋向于 β , 其余 $N-1$ 个趋向于0时, $\sum_i^N \alpha_i^2$ 取得最大值。证毕

定理5 当有 N 个独立未知源信号入射到天线阵列时, 令待求酉矩阵 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$, 则 \mathbf{W} 的列向量 \mathbf{w}_n 满足 $\mathbf{w}_n = \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n$ 。定义关于酉矩阵 \mathbf{U} 的损失函数为

$$J(\mathbf{U}) = - \sum_{\theta=1^\circ}^{360} \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)^2 \quad (13)$$

当 $J(\mathbf{U})$ 取得最小值时, \mathbf{W} 的每个列向量 \mathbf{w}_n 代入式(10)后所得到的每个DML伪谱都只有1个较大的峰值, 即此时酉矩阵 \mathbf{U} 满足要求。

证明 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^H \mathbf{W}_0^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{U} \mathbf{U}^H \mathbf{W}_0^H \mathbf{a}(\theta) \\ &= (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{W}_0^H \mathbf{a}(\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

由公式(14)可得到两个常数约束, 第1个是 $\sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)$ 为与 \mathbf{U} 无关的常数, 第2个是 $\sum_{\theta=1^\circ}^{360} \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)$ 也为与 \mathbf{U} 无关的常数。由定理4可知, 当 $\sum_i^N \alpha_i^2$ 取最大值时, 只有1个变量趋向于 β , 其余 $N-1$ 个变量趋向于0, 也就是说, 当使 $\sum_i^N \alpha_i^2$ 取最大值时, 会使其中1个变量尽可能大, 其他变量尽可能小。故当 $\sum_{\theta=1^\circ}^{360} \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)^2$ 取最大值时, 由于第1个常数的约束, 会使得在同一个 θ 处, 在所有的DML伪谱之间, 其中1个DML伪谱值大, 其余DML伪谱值小。由于第2个常数约束, 会使得在同一个的DML伪谱中, 某一 θ 处的DML伪谱值大, 其余 θ 处的DML伪谱值小。综合来看, 当 $\sum_{\theta=1^\circ}^{360} \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)^2$ 取最大值时, 会使每个信号的DML伪谱都只有1个较大的峰值。对 $\sum_{\theta=1^\circ}^{360} \sum_{n=1}^N P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n)^2$ 取负号, 转换为求损失函数最小化的问题, 即可得到损失函数式(13)。

证毕

3.2 酉约束下的粒子群算法

粒子群算法是种群中的粒子以某一速度从当前位置进行迭代寻优的一种全局优化算法^[17]。需要注意的是: 在粒子迭代寻优的过程中, 当粒子的位置不为酉矩阵时, 需要将其修正为酉矩阵。式(13)中的待求酉矩阵属于复数Stiefel流形矩阵, 将矩阵映射到距离其欧几里得距离最小的复数Stiefel流形矩阵的方法是 π 变换^[18]。对粒子的位置 \mathbf{X} 做变换 π 的公式为

$$\pi(\mathbf{X}) = \mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2 \quad (15)$$

其中, \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 为对 \mathbf{X} 做奇异值分解后所得到的酉矩阵, 即 $\mathbf{V}_1 \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}_2 = \text{svd}(\mathbf{X})$ 。

3.3 酉约束下的梯度下降算法

待求酉矩阵 \mathbf{U} 可以看作损失函数 $J(\mathbf{U})$ 的最佳权系数, 可采用梯度下降算法来求解最佳酉矩阵^[18-20]。梯度下降算法的基本迭代步骤是权系数 $\mathbf{U}(t+1)$ 等于权系数 $\mathbf{U}(t)$ 加上负梯度 $\mathbf{Z}(t)$ 的比例项, 即

算法1 酉约束下的粒子群算法

- (1) 设置粒子群算法迭代次数上限, 初始化粒子群;
- (2) 根据使式(13)最小的原则, 对粒子的速度和位置进行更新, 每次更新后用 π 变换将粒子的位置修正为酉矩阵;
- (3) 若达到迭代次数上限或种群中所有粒子的位置都接近粒子群的历史最佳位置, 则转至步骤4, 否则, 转至步骤2;
- (4) 粒子群的历史最佳位置即为所需酉矩阵 \mathbf{U} 。

$$\mathbf{U}(t+1) = \mathbf{U}(t) + \gamma \mathbf{Z}(t) \quad (16)$$

其中, γ 为收敛步长, 用来控制算法的收敛速度与稳定性。在迭代过程中, 当权系数不为复数Stiefel流形矩阵时, 可用 π 变换将其修正^[18], 故上式变换为

$$\mathbf{U}(t+1) = \pi(\mathbf{U}(t) + \gamma \mathbf{Z}(t)) \quad (17)$$

在待求酉矩阵属于复数Stiefel流形矩阵的约束条件下, 损失函数式(13)的负梯度 \mathbf{Z} 的计算公式为

$$\mathbf{Z} = \mathbf{U} \mathbf{D}_x \mathbf{U} - \mathbf{D}_x \quad (18)$$

其中, \mathbf{D}_x 为损失函数式(13)对 \mathbf{U} 求1阶导后所得的矩阵。令 $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]$, 则求 \mathbf{D}_x 的公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_n}(\theta) = & -4P_{\text{DML}}(\theta, \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n) \\ & \times (\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{a}(\theta))^{-1} \mathbf{W}_0^H \mathbf{a}(\theta) \mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{W}_0 \mathbf{u}_n \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_n} = \sum_{\theta=1^\circ}^{360^\circ} \frac{\partial J}{\partial u_n}(\theta) \quad (20)$$

$$\mathbf{D}_x = \left(\frac{\partial J}{\partial u_1}, \frac{\partial J}{\partial u_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial u_N} \right) \quad (21)$$

计算出负梯度 \mathbf{Z} 后, 需要选择1个正的步长 γ 。根据Armijo步长选择准则, 步长 γ 应该满足下列不等式

$$J(\mathbf{U}) - J(\pi(\mathbf{U} + \gamma \mathbf{Z})) \geq \frac{1}{2} \gamma \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \quad (22)$$

$$J(\mathbf{U}) - J(\pi(\mathbf{U} + 2\gamma \mathbf{Z})) < \gamma \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle \quad (23)$$

其中, $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$ 表示负梯度 \mathbf{Z} 与其本身的内积, 计算公式为

$$\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle = \text{tr} \left[\mathbf{Z}^H \left(\mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{U} \mathbf{U}^H \right) \mathbf{Z} \right] \quad (24)$$

其中, \mathbf{I} 为单位阵。求合适 γ 的一种简单的方法是对 γ 连续加倍直到不等式(23)不成立, 然后对 γ 连续减半直到不等式(22)成立。

3.4 基于2阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计算法

求出酉矩阵 \mathbf{U} 后, 令 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \mathbf{U}$, 即可得到实际方向矩阵 \mathbf{W} 。实际方向矩阵 \mathbf{W} 的每一列 w_n 为单个信号的实际方向向量, 将其输入到式(10)中可得到的DML伪谱, 通过寻找峰值即可得到波达方向的估计值。

算法2 酉约束下的梯度下降算法

- (1) 设置梯度下降算法迭代次数上限, 随机初始化酉矩阵 \mathbf{U} , 初始化步长 $\gamma = 1$;
- (2) 计算损失函数 $J(\mathbf{U})$ 的1阶导矩阵 \mathbf{D}_x ;
- (3) 计算负梯度 \mathbf{Z} ;
- (4) 计算 $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$, 当 $\langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$ 足够小或达到迭代次数上限时, 转到步骤8;
- (5) $J(\mathbf{U}) - J(\pi(\mathbf{U} + 2\gamma \mathbf{Z})) \geq \gamma \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$, 则 $\gamma := 2\gamma$, 重复步骤5, 否则, 执行步骤6;
- (6) $J(\mathbf{U}) - J(\pi(\mathbf{U} + \gamma \mathbf{Z})) < (1/2)\gamma \langle \mathbf{Z}, \mathbf{Z} \rangle$, 则 $\gamma = (1/2)\gamma$, 重复步骤6, 否则, 执行步骤7;
- (7) 更新 \mathbf{U} , 令 $\mathbf{U} = \pi(\mathbf{U} + \gamma \mathbf{Z})$, 转到步骤2;
- (8) 当前状态酉矩阵 \mathbf{U} 即为所需。

算法3 基于2阶统计特性盲源分离的DOA估计算法

- (1) 求样本协方差矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$;
- (2) 使用MMDL算法计算独立信源个数 N ;
- (3) 初始化矩阵 \mathbf{W}_0 。对 $\hat{\mathbf{R}}$ 进行特征值分解, 选取 N 个大特征值所对应的特征向量构成 \mathbf{W}_0 ;
- (4) 使用算法1或算法2求得所需酉矩阵 \mathbf{U} ;
- (5) 令 $\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 \mathbf{U}$, 得到实际方向矩阵 \mathbf{W} ;
- (6) 将 \mathbf{W} 的每一列 w_n 输入到式(10)中得到DML伪谱, 寻找峰值得到波达方向的估计值。

4 仿真分析

仿真1 酉约束下的粒子群算法以及酉约束下的梯度下降算法收敛速度测试。设置均匀圆阵的阵元数 $M = 9$, 独立信源数 $N = 3$, 快拍数 $L = 1024$, 粒子群算法粒子个数设置为50, 两个算法的最大迭代次数都设置为200次。同一台计算机、同一软件平台下运行两个算法, 蒙特卡罗实验200次。

在上述实验中, 粒子群算法平均收敛次数较少, 平均收敛时间却较长, 梯度下降算法平均收敛次数较多, 平均收敛时间却较短, 这是因为粒子群算法的每一次优化中需要优化全部粒子的位置和速度。粒子群算法和梯度下降算法都可以得到正确的实验结果, 粒子群算法原理较简单, 但验证了算法的正确性, 而梯度下降算法则提升了算法的运行速度, 两种算法收敛速度对比如表1。

仿真2 在阵列流形存在误差以及测向设备为少通道测向设备时, 不同算法的空间谱测试。设置均匀圆阵的阵元数 $M = 9$, 通道接收机数 $m = 3$,

表1 两种优化算法收敛速度对比

算法	平均收敛次数(次)	平均收敛时间(s)
酉约束下的粒子群算法	24	2.7238
酉约束下的梯度下降算法	52	1.0495

半径0.58 m, 信号载波频率500 MHz, 独立信源数 $N = 3$, 正确的DOA分别为 $[120^\circ]$ 、 $[140^\circ]$ 、 $[160^\circ]$, 快拍数 $L = 1024$, 向天线的理论阵列流形加20 dB的高斯白噪声模拟构造天线的实际阵列流形。

在上述实验条件下, 对比测试MUSIC^[5]算法、OMP^[8]算法以及本文算法的空间谱。3种算法的空间谱图如图2、图3、图4所示。

3种算法的DOA估计结果如表2所示。

如图2、图3、图4以及表2所示, 在上述实验条件下, 本文算法基本上能完成3个信号的分辨, 而MUSIC算法和OMP算法的分辨结果出错较大。MUSIC算法和OMP算法等传统空间谱算法, 需要使用天线的阵列流形。在阵列流形存在误差时, 传统空间谱算法的谱峰的峰宽会比较大, 尤其在两个

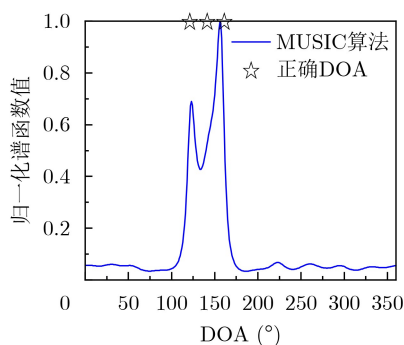


图2 MUSIC算法空间谱

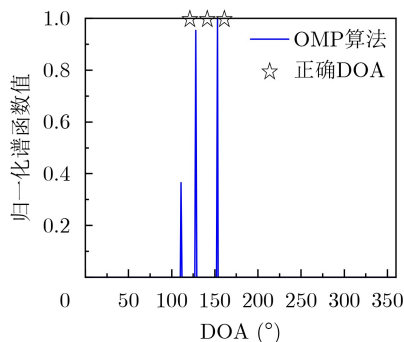


图3 OMP算法空间谱

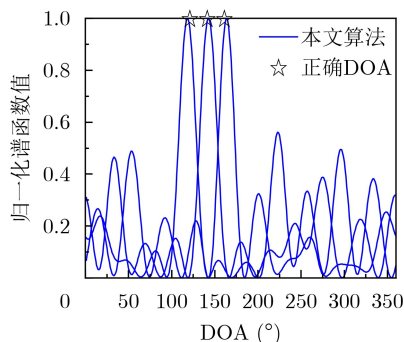


图4 本文算法空间谱

信号之间的夹角较小时, 两个信号的谱峰很容易相互影响造成DOA估计出错。本文算法采用了将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计的方法, 故本文算法避免了信号间谱峰相互影响的问题, 故在当前实验条件下, 与MUSIC算法和OMP算法相比, 本文算法的分辨性能更优。

此外, 当前的实验条件为三通道九阵元的均匀圆阵, 如图4以及表2所示, 本文算法能正确完成DOA估计任务。当测向设备为少通道设备时, 通道接收机会以时间片轮转的方式在不同的阵元处接收信号数据, 由于传统盲源分离算法^[13,14]需要使用信号的高阶统计信息, 因此传统盲源分离算法仅能获得同一个时间片中的某几个阵元的实际方向矩阵, 而不能获得阵列中所有阵元实际方向矩阵, 故传统盲源分离算法不能完成此实验条件下的DOA估计任务。相比基于传统盲源分离算法的DOA估计算法, 本文算法能应用于少通道测向设备, 这是本文算法的一大优势。

仿真3 测试信噪比对DOA估计准确度的影响, 如图5所示。均匀圆阵的阵元数 $M = 9$, 通道接收机数 $m = 3$, 半径0.58 m, 信号载波频率500 MHz, 独立信源数 $N = 2$, 正确的DOA分别为 $[113^\circ]$ 、 $[130^\circ]$, 快拍数 $L = 1024$, 蒙特卡罗实验200次。在上述实验条件下, 测试MUSIC算法、OMP算法、DML^[7]算法以及本文算法的DOA估计均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE), 其定义为

$$\text{RMSE} = \left(\frac{1}{KN} \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^N (\hat{\theta}_n(k) - \theta_n)^2 \right)^{1/2} \quad (25)$$

其中, K 为蒙特卡罗次数, N 为信号源个数, $\hat{\theta}_n(k)$ 为第 k 次蒙特卡罗实验中算法对第 n 个信号源DOA估计结果, θ_n 为第 n 个信号源的真实方位角。

在对多个信号进行DOA估计时, 本文算法采用了将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计的方法, 这种将多信号分离成单信号再进行DOA估计的方法会提升DOA估计算法的抗扰度。所以在上述实验条件下, 在信噪比较小时, 本文算法的DOA估计RMSE低于MUSIC算法、OMP算法和DML算法的DOA估计RMSE。而在信噪比大于-5 dB时, 本文算法的DOA估计RMSE比MUSIC算

表2 3种算法DOA估计结果

DOA算法	DOA估计结果	最大误差
正确DOA	$[120^\circ]$, $[140^\circ]$, $[160^\circ]$	-
MUSIC算法	$[123^\circ]$, $[156^\circ]$, $[223^\circ]$	63
OMP算法	$[111^\circ]$, $[128^\circ]$, $[153^\circ]$	12
本文算法	$[118^\circ]$, $[143^\circ]$, $[164^\circ]$	4

法的DOA估计RMSE高 1° 至 2° 。这是由于上述实验未对天线阵列流形添加误差，在天线的实际阵列流形与理论阵列流形不存在差别且噪声干扰较小时，MUSIC算法可以直接使用理论阵列流形以实现较高精度的分辨，而本文算法中估计实际方向向量的优势将得不到体现。

仿真4 在阵列流形存在误差时，测试两个信号间夹角大小对DOA估计准确度的影响。设置均匀圆阵的阵元数 $M = 9$ ，通道接收机数 $m = 3$ ，半径 0.58 m ，信号载波频率 500 MHz ，独立信源数 $N = 2$ ，正确的DOA分别为 $[120^\circ]$ 、 $[120^\circ + \Delta\theta (\Delta\theta = 3^\circ, 6^\circ, \dots, 30^\circ)]$ ，快拍数 $L = 1024$ ，向天线的理论阵列流形加 20 dB 的高斯白噪声模拟构造天线的实际阵列流形，蒙特卡罗实验 200 次。在上述实验条件下，测试MUSIC算法、OMP算法、DML算法以及本文算法的RMSE。

如图6所示，随着两个信号间夹角的变小，本文算法的DOA估计RMSE低于MUSIC算法、OMP算法和DML算法的DOA估计RMSE。在阵列流形存在误差时且两个信号间夹角较小时，本文算法中将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计的方法优势得到体现，本文算法DOA估计准确度高于MUSIC算法、OMP算法和DML算法，也就是说本文算法的DOA估计分辨率更高。

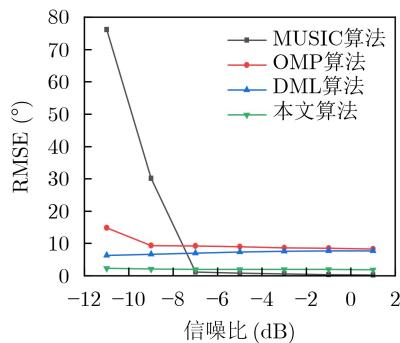


图5 不同信噪比下，DOA估计准确度测试

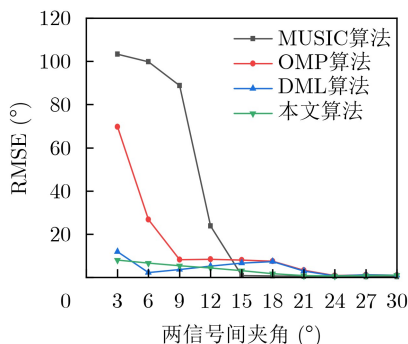


图6 不同夹角下，DOA估计准确度测试

5 结束语

在DOA估计的实际应用场景中，阵列流形往往会存在误差以及测向设备常常为少通道测向设备，对此，本文提出了一种基于2阶统计特性的方向向量估计算法的DOA估计算法。由于将多信号的DOA估计转化为多个单信号的DOA估计，因此在阵列流形存在误差时，该算法比传统的DOA方法具有更好的DOA估计性能。此外，由于仅需使用阵列接收数据的协方差矩阵，因此所提算法克服了基于传统盲源分离算法的DOA估计算法不能应用于少通道测向设备的不足。由仿真实验可知，在阵列流形存在误差以及测向设备为少通道测向设备时，与传统DOA方法相比，所提算法的DOA估计准确度、抗扰度以及分辨率更高。

参考文献

- [1] FUCHS J, KASPER A, LÜBKE M, *et al.* High-resolution direction-of-arrival estimation using distributed radar sensors[C]. 2022 IEEE Radio and Wireless Symposium (RWS), Las Vegas, USA, 2022: 53–56. doi: [10.1109/RWS53089.2022.9719971](https://doi.org/10.1109/RWS53089.2022.9719971).
- [2] 王洪雁, 于若男, 潘勉, 等. 基于协方差矩阵重构的离网格DOA估计方法[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(10): 2863–2870. doi: [10.11999/JEIT200697](https://doi.org/10.11999/JEIT200697).
WANG Hongyan, YU Ruonan, PAN Mian, *et al.* Off-grid DOA estimation method based on covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2021, 43(10): 2863–2870. doi: [10.11999/JEIT200697](https://doi.org/10.11999/JEIT200697).
- [3] WANG Lei, REN Chunhui, LIU Renting, *et al.* Direction-of-arrival estimation for nested array using mixed-resolution ADCs[J]. *IEEE Communications Letters*, 2022, 26(8): 1868–1872. doi: [10.1109/LCOMM.2022.3178617](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2022.3178617).
- [4] ZHAO Luming, LIU Hongqing, LI Yong, *et al.* DOA estimation under sensor gain and phase uncertainties[C]. 2015 International Conference on Estimation, Detection and Information Fusion (ICEDIF), Harbin, China, 2015: 209–213. doi: [10.1109/ICEDIF.2015.7280192](https://doi.org/10.1109/ICEDIF.2015.7280192).
- [5] SCHENCK D, MESTRE X, and PESAVENTO M. Probability of resolution of MUSIC and g-MUSIC: An asymptotic approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 3566–3581. doi: [10.1109/TSP.2022.3178820](https://doi.org/10.1109/TSP.2022.3178820).
- [6] YANG Zai. Nonasymptotic performance analysis of ESPRIT and spatial-smoothing ESPRIT[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2023, 69(1): 666–681. doi: [10.1109/TIT.2022.3199405](https://doi.org/10.1109/TIT.2022.3199405).
- [7] GONG Mingyan and LYU Bin. Alternating maximization

- and the EM algorithm in maximum-likelihood direction finding[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(10): 9634–9645. doi: [10.1109/TVT.2021.3106794](https://doi.org/10.1109/TVT.2021.3106794).
- [8] WANG Wenyi and WU Renbiao. High resolution direction of arrival (DOA) estimation based on improved orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm by iterative local searching[J]. *Sensors*, 2013, 13(9): 11167–11183. doi: [10.3390/s130911167](https://doi.org/10.3390/s130911167).
- [9] WANG Qing, DOU Tongdong, CHEN Hua, *et al.* Effective block sparse representation algorithm for DOA estimation with unknown mutual coupling[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(12): 2622–2625. doi: [10.1109/LCOMM.2017.2747547](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2017.2747547).
- [10] TIAN Ye, WANG Ran, CHEN Hua, *et al.* Real-valued DOA estimation utilizing enhanced covariance matrix with unknown mutual coupling[J]. *IEEE Communications Letters*, 2022, 26(4): 912–916. doi: [10.1109/LCOMM.2022.3148260](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2022.3148260).
- [11] LIU Jianfei, WU Xiongbin, EMERY W J, *et al.* Direction-of-arrival estimation and sensor array error calibration based on blind signal separation[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(1): 7–11. doi: [10.1109/LSP.2016.2632750](https://doi.org/10.1109/LSP.2016.2632750).
- [12] 侯进, 李昀喆, 李天宇. 基于去噪复数FastICA和稀疏重构的相干信号欠定DOA估计[J]. *通信学报*, 2021, 42(11): 172–181. doi: [10.11959/j.issn.1000-436x.2021219](https://doi.org/10.11959/j.issn.1000-436x.2021219).
HOU Jin, LI Yunzhe, and LI Tianyu. Underdetermined DOA estimation of coherent signals based on denoising complex FastICA and sparse reconstruction[J]. *Journal on Communications*, 2021, 42(11): 172–181. doi: [10.11959/j.issn.1000-436x.2021219](https://doi.org/10.11959/j.issn.1000-436x.2021219).
- [13] BINGHAM E and HYVÄRINEN A. A fast fixed-point algorithm for independent component analysis of complex valued signals[J]. *International Journal of Neural Systems*, 2000, 10(1): 1–8. doi: [10.1142/S0129065700000028](https://doi.org/10.1142/S0129065700000028).
- [14] HU Jing and FAN Lehao. Application of JADE to separate complex-valued sources[C]. 2011 International Conference on Computer Science and Service System (CSSS), Nanjing, China, 2011: 1127–1129. doi: [10.1109/CSSS.2011.5972049](https://doi.org/10.1109/CSSS.2011.5972049).
- [15] 赵自强, 曹岸杰, 杨勇, 等. 基于时间调制的单通道多基线相位干涉仪测向[J]. *电波科学学报*, 2023, 38(1): 96–102,129. doi: [10.12265/j.cjors.2022096](https://doi.org/10.12265/j.cjors.2022096).
ZHAO Ziqiang, CAO Anjie, YANG Yong, *et al.* Single-channel multiple baseline interferometer DF with time modulation[J]. *Chinese Journal of Radio Science*, 2023, 38(1): 96–102,129. doi: [10.12265/j.cjors.2022096](https://doi.org/10.12265/j.cjors.2022096).
- [16] BAZZI A, SLOCK D T M, and MEILHAC L. Detection of the number of superimposed signals using modified MDL criterion: A random matrix approach[C]. Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Shanghai, China, 2016: 4593–4597. doi: [10.1109/ICASSP.2016.7472547](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472547).
- [17] JIANG Jiajia, WEI Wenxue, SHAO Wanlu, *et al.* Research on large-scale Bi-level particle swarm optimization algorithm[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 56364–56375. doi: [10.1109/ACCESS.2021.3072199](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3072199).
- [18] MANTON J H. Optimization algorithms exploiting unitary constraints[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(3): 635–650. doi: [10.1109/78.984753](https://doi.org/10.1109/78.984753).
- [19] ABRUDAN T E, ERIKSSON J, and KOIVUNEN V. Steepest descent algorithms for optimization under unitary matrix constraint[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(3): 1134–1147. doi: [10.1109/TSP.2007.908999](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.908999).
- [20] BIRTEA P, CAȘU I, and COMĂNESCU D. Constraint optimization and SU(N) quantum control landscapes[J]. *Journal of Physics A:Mathematical and Theoretical*, 2022, 55(11): 115301. doi: [10.1088/1751-8121/ac5189](https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac5189).
- 侯进: 女, 副教授, 研究方向为无线电通信、阵列信号处理、深度学习、图像处理。
盛尧宝: 男, 硕士生, 研究方向为阵列信号处理、DOA估计。
张波: 男, 硕士生, 研究方向为光纤信号处理、深度学习。

责任编辑: 马秀强