基于二阶分圆类的高能量效率完备高斯整数序列设计

赵 伟 黄 雷 贾彦国* 沈秀敏
(燕山大学信息科学与工程学院河北省计算机虚拟技术与系统集成重点实验室 秦皇岛 066004)

摘 要：完备高斯整数序列(PGIS)因其良好的抗干扰性、高传输率和频谱利用率，如今已被广泛应用于码分复用(CDM)系统和正交频分复用(OFDM)系统。该文将高斯整数序列(GIS)分解成实部序列和虚部序列，再通过对实部序列和虚部序列2阶分圆构造出2阶和3阶的PGIS，并提出一种新的将奇数长PGIS扩展成偶数长PGIS的方法，该文构造出的多数PGIS能量效率高于95%，扩大了扩频通信系统的地址选择空间，对于工程实践具有重要意义。

关键词：完备高斯整数序列；分圆类；自相关函数；互相关函数；能量效率

中图分类号：TN911.23 **文献标识码**：A **文章编号**：1009-5896(2023)06-1952-07

DOI: 10.11999/JEIT220591

High Energy Efficient Perfect Gaussian Integer Sequence Design Based on Second Order Cyclotomic Classes

ZHAO Wei HUANG Lei JIA Yanguo SHEN Xiumin
(*School of Information Science and Engineering*, *The Key Laboratory for Computer Virtual Technology and System Integration of Hebei Province*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: Perfect Gaussian Integer Sequence (PGIS) has been widely used in Code Division Multiplexing (CDM) systems and Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) systems because of its good anti-interference, high transmission rate and high frequency spectrum utilization. In this paper, Gaussian Integer Sequence (GIS) is decomposed into real part sequence and imaginary part sequence, and then second-order and third-order PGIS are constructed by second-order cyclotomy of real part sequence and imaginary part sequence. A new method of extending odd length PGIS to even length PGIS is proposed. The energy efficiency of most PGIS constructed in this paper is higher than 95%, and expands the address selection space of spread spectrum communication system, which is of great significance to engineering practice.

Key words: Perfect Gaussian Integer Sequence(PGIS); Cyclotomic classes; Autocorrelation function; Cross correlation function; Energy efficiency

1 引言

高斯整数序列(Gaussian Integer Sequence, GIS)是一类元素为复数$a+\mathrm{j}b$，且a, b均为整数的序列，当GIS的主峰值不为0，副峰值都为0时，称为完备高斯整数序列(Perfect Gaussian Integer Sequence, PGIS)。如今，PGIS作为一种特殊的离散信号在码分复用(Code Division Multiplexing, CDM)系统[1,2]和正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统[3–5]中已被广泛应用，最近的研究表明，基于PGIS的CDM系统有更好的性能表现[6]，完备高斯整数序列的构造已然成为重要的研究主题[7]。

完备高斯整数序列的构造方法大致可以分为直接构造法和间接构造法，直接构造法基于代数理论[8]，例如本文使用的经典分圆就属于代数理论。在经典分圆理论的基础上，文献[9]分别利用2阶分圆和4阶分圆构造PGIS，首次提出了PGIS中各不同元素值与f应满足的条件，文献[10]用2阶分圆结合傅里叶变换分别构造了2阶和3阶PGIS，然后对长为奇素数p的2阶和3阶PGIS通过采样分别构造出mp长的3阶和4阶PGIS。文献[11]将GIS分离成实部

收稿日期：2022-05-10；改回日期：2022-06-22；网络出版：2022-06-25
*通信作者： 贾彦国 jyg@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61601401)，河北省自然科学基金(F2018203057, F2020203043)，河北省高等学校科学技术研究项目(QN2021144)，河北省创新能力提升计划项目(22567626H)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61601401), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2018203057, F2020203043), The Research Project for Science and Technology in Higher Education of Hebei (QN2021144), The Innovation Capability Improvement Plan Project of Hebei Province (22567626H)

序列a和虚部序列b，基于PGIS的实部序列和虚部序列应满足的充分必要条件，对a, b序列2阶分圆构造出实部序列为恒值(1值)，虚部序列最多为3值的2阶和3阶PGIS，然后提出一种方法，将长度为奇素数v的PGIS扩展成长度为偶数$2v$的PGIS，其构造方法参数设置简单方便，能够很好的借助计算机得到大量完备高斯整数序列。

文献[11]定理1约束条件尚不完整，因此本文在文献[11]的基础上进一步研究，并提出了实部序列和虚部序列都可为3值的构造方法，将此方法实部序列设为非0元1值可以得到文献[11]中约束完整的结论；还提出一种新的扩展方法，将v长PGIS扩展成$2v$长PGIS，其中v为奇素数，该扩展方法可以获得跟基序列能量效率相同的PGIS。工程实践中，利用本文定理1参数设置简单灵活的特性，可以很方便地通过计算机搜索的方式获得大量能量效率高于95%的PGIS，再结合本文定理2对其扩展补充，对工程实践具有重要意义。

2　基础知识

定义1[11]　设$v = ef + 1$为奇素数，序列a, b为v长整数序列，$a = \{a(t)|0 \le t \le v-1\}$, $b = \{b(t)|0 \le t \le v-1\}$，序列$s$为$v$长高斯整数序列(GIS)，$s = \{s(t) = a(t) + \mathrm{j}b(t)|0 \le t \le v-1\}$, $\mathrm{j} = \sqrt{-1}$，则序列a的自相关函数为

$$R_a(\tau) = \sum_{t=0}^{v-1} a(t) \cdot a(t+\tau) \tag{1}$$

序列a, b的互相关函数为

$$R_{ab}(\tau) = \sum_{t=0}^{v-1} a(t) \cdot b(t+\tau) \tag{2}$$

那么，序列s的自相关函数可以表示为

$$\begin{aligned} R_s(\tau) &= \sum_{t=0}^{v-1} s(t)\, s^*(t+\tau) \\ &= \sum_{t=0}^{v-1} [a(t) + \mathrm{j}b(t)]\,[a(t+\tau) + \mathrm{j}b(t+\tau)]^* \\ &= R_a(\tau) + R_b(\tau) - \mathrm{j}\,[R_{ab}(\tau) - R_{ba}(\tau)] \end{aligned} \tag{3}$$

其中，符号$s^*(t+\tau)$表示$s(t+\tau)$的共轭复数，$0 \le \tau \le v-1$。若满足

$$R_s(\tau) = \begin{cases} R, & \tau = 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{4}$$

则序列s是完备高斯序列(PGIS)，其中R为正整数。

定义2[12]　设$v = ef + 1$为奇素数，θ是v阶有限域GF(v)的本原元，令$H_i^{(e,v)} = \{\theta^{i+et}, t = 0, 1, \cdots, f-1\}, 0 \le i \le e-1$，则称这些$H_i^{(e,v)}$为GF$(v)$上的$e$阶分圆类，可简记为$H_i^e$。

定义3[12]　设$v = ef + 1$为奇素数，对于$0 \le m, n \le e-1$，则称

$$\begin{aligned} (m,n)_e &= |(x,y)|x \in H_m^e, y \in H_n^e, x+1 = y| \\ &= |(H_m^e + 1) \cap H_n^e| \end{aligned} \tag{5}$$

为e阶分圆数，且当$\tau \in H_k^e$时，$x + \tau = y$的解的个数为$(m-k, n-k)_e$。

定义4[13]　设序列$s = \{s(t)|0 \le t \le v-1\}$，则$s$的能量效率$\eta$为

$$\eta \equiv \frac{\dfrac{1}{v}\displaystyle\sum_{t=0}^{v-1} |s(t)|^2}{\displaystyle\max_{0 \le t \le v-1} |s(t)|^2} \tag{6}$$

在工程实践中，通常期望序列具有较高的能量效率。

定义5[14]　完备高斯整数序列中，若不同非零元的个数为n，则称n为该PGIS的电平数(degree)或阶数。

引理1[15]　设$v = 2f + 1$为奇素数，则

(1)若f为偶数，则2阶分圆数满足

$$(0,0)_2 = \frac{f-2}{2},\quad (0,1)_2 = (1,1)_2 = (1,0)_2 = \frac{f}{2} \tag{7}$$

(2)若f为奇数，则2阶分圆数满足

$$(0,1)_2 = \frac{f+1}{2},\quad (0,0)_2 = (1,1)_2 = (1,0)_2 = \frac{f-1}{2} \tag{8}$$

引理2[9]　设$v = 2f + 1$为奇素数，2次分圆类为H_i^2，$0 \le i \le 1$，则

(1)若f为偶数，$g \in H_i^2$，则$v - g \in H_i^2$；

(2)若f为奇数，$g \in H_i^2$，则$v - g \in H_{i+1}^2$。

引理3[11]　设a,b为v长整数序列，$a = \{a(t)|0 \le t \le v-1\}$，$b = \{b(t)|0 \le t \le v-1\}$，则序列$s = \{s(t) = a(t) + \mathrm{j}b(t)|0 \le t \le v-1\}$是PGIS的充要条件为$R_a(\tau) + R_b(\tau) = \begin{cases} R, \tau = 0 \\ 0, \text{其他} \end{cases}$且$R_{ab} = R_{ba}(\tau)$，$0 \le \tau \le v-1$，$R$为正整数。

3　PGIS构造方法

3.1　长度为奇素数v的PGIS构造

设$v = 2f + 1$为奇素数，序列s是长度为v的GIS，序列a, b分别为高斯整数序列s的实部序列和虚部序列，2阶分圆类为H_i^2，$0 \le i \le 1$，其中$s = \{s(t) = a(t) + \mathrm{j}b(t)|0 \le t \le v-1\}$，$a = \{a(t)|0 \le t \le v-1\}$，$b = \{b(t)|0 \le t \le v-1\}$，令

$$a(t) = \begin{cases} A, t = 0 \\ B, t \in H_0^2 \\ C, t \in H_1^2 \end{cases},\quad b(t) = \begin{cases} D, t = 0 \\ E, t \in H_0^2 \\ F, t \in H_1^2 \end{cases} \tag{9}$$

A,B,C不同时为0，D,E,F不同时为0，且全为整数。

定理1 上述高斯整数序列s为PGIS的充分必要条件是

(1)f为奇数时，满足

$$\left.\begin{aligned}&A(E-F)+D(C-B)+BF-CE=0\\&\left(B^2+C^2+E^2+F^2\right)\frac{f-1}{2}+(BC+EF)f\\&\quad+A(B+C)+D(E+F)=0\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

(2)f为偶数时，满足

$$\left.\begin{aligned}&2(AB+DE)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}\\&\quad-(B^2+E^2)=0\\&2(AC+DF)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}\\&\quad-(C^2+F^2)=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

证明 由引理3可知，按上述方法设计的高斯整数序列s是完备高斯整数序列需要同时满足以下两种情况。

情况1 $R_a(\tau)+R_b(\tau)=\begin{cases}R,\tau=0\\0,其他\end{cases}$，其中$R$为正整数。

当$\tau=0$时，$R=R_a(\tau)+R_b(\tau)=A^2+fB^2+fC^2+D^2+fE^2+fF^2$，而$A,B,C$不同时为0，$D,E,F$不同时为0，所以$R$为正整数恒成立。

当$\tau\neq0$时，由定义1和定义2有

$$\begin{aligned}R_a(\tau)=&Aa(\tau)+Aa(v-\tau)+B^2|(H_0+\tau)\cap H_0|\\&+BC|(H_0+\tau)\cap H_1|+BC|(H_1+\tau)\cap H_0|\\&+C^2|(H_1+\tau)\cap H_1|\end{aligned}\tag{12}$$

$$\begin{aligned}R_b(\tau)=&Db(\tau)+Db(v-\tau)+E^2|(H_0+\tau)\cap H_0|\\&+EF|(H_0+\tau)\cap H_1|+EF|(H_1+\tau)\cap H_0|\\&+F^2|(H_1+\tau)\cap H_1|\end{aligned}\tag{13}$$

由引理1、引理2可知，式(12)和式(13)的取值与f的奇偶和τ所属分圆类有关，所以分别讨论：

(1)若f为奇数，当$\tau\in H_0$时，由定义3、引理1有

$$\begin{aligned}R_a(\tau)=&A(B+C)+B^2(0,0)+BC(0,1)\\&+BC(1,0)+C^2(1,1)\\=&A(B+C)+BC\frac{f+1}{2}\\&+(B^2+C^2+BC)\frac{f-1}{2}\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}R_b(\tau)=&D(E+F)+EF\frac{f+1}{2}\\&+(E^2+F^2+EF)\frac{f-1}{2}\end{aligned}\tag{15}$$

令$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$得

$$\begin{aligned}&\left(B^2+C^2+E^2+F^2\right)\frac{f-1}{2}+(BC+EF)f\\&\quad+A(B+C)+D(E+F)=0\end{aligned}\tag{16}$$

当$\tau\in H_1$时，同理有

$$\begin{aligned}&\left(B^2+C^2+E^2+F^2\right)\frac{f-1}{2}+(BC+EF)f\\&\quad+A(B+C)+D(E+F)=0\end{aligned}\tag{17}$$

即当f为奇数时，$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$成立的充分必要条件为式(16)成立。

(2)若f为偶数，当$\tau\in H_0$时，由定义3、引理1有

$$\left.\begin{aligned}R_a(\tau)=2AB+B^2\frac{f-2}{2}+(2BC+C^2)\frac{f}{2}\\R_b(\tau)=2DE+E^2\frac{f-2}{2}+(2EF+F^2)\frac{f}{2}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

令$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$得

$$2(AB+DE)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}-(B^2+E^2)=0\tag{19}$$

当$\tau\in H_1$时，同理有

$$2(AC+DF)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}-(C^2+F^2)=0\tag{20}$$

即当f为偶数时，$R_a(\tau)+R_b(\tau)=0$成立的充要条件为式(19)、式(20)同时成立。

情况2 $R_{ab}(\tau)=R_{ba}(\tau)$，$0\le\tau\le v-1$，$R$为正整数。

由定义1、定义2有

$$\left.\begin{aligned}R_{ab}(\tau)=&Ab(\tau)+Da(v-\tau)+BE|(H_0+\tau)\cap H_0|\\&+BF|(H_0+\tau)\cap H_1|+CE|(H_1+\tau)\cap H_0|\\&+CF|(H_1+\tau)\cap H_1|\\R_{ba}(\tau)=&Ab(v-\tau)+Da(\tau)+BE|(H_0+\tau)\cap H_0|\\&+CE|(H_0+\tau)\cap H_1|+BF|(H_1+\tau)\cap H_0|\\&+CF|(H_1+\tau)\cap H_1|\end{aligned}\right\}\tag{21}$$

由引理1、引理2可知，上式的取值与f的奇偶有关，所以分别讨论：

(1)若f为奇数，当$\tau\in H_0$时，令$R_{ab}=R_{ba}(\tau)$，由定义3、引理1有

$$A(E-F)+D(C-B)+BF-CE=0\tag{22}$$

当$\tau\in H_1$时，令$R_{ab}=R_{ba}(\tau)$，同理有

$$A(E-F)+D(C-B)+BF-CE=0\tag{23}$$

即当f为奇数时，$R_{ab}(\tau)=R_{ba}(\tau)$成立的充分必要条件为满足式(22)。

(2)若f为偶数，当$\tau\in H_0$时，有$R_{ab}(\tau)$恒等于$R_{ba}(\tau)$，当$\tau\in H_1$时，亦有$R_{ab}(\tau)$恒等于$R_{ba}(\tau)$。即$R_{ab}(\tau)=R_{ba}(\tau)$的充要条件为满足式(22)。

综上所述，按上述条件构造的高斯整数序列s是PGIS的充要条件是

(1)f为奇数时，满足

$$\left.\begin{aligned}&A(E-F)+D(C-B)+BF-CE=0\\&\left(B^2+C^2+E^2+F^2\right)\frac{f-1}{2}+(BC+EF)\,f\\&\quad+A\,(B+C)+D\,(E+F)=0\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

(2)f为偶数时，满足

$$\left.\begin{aligned}&2(AB+DE)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}\\&\quad-(B^2+E^2)=0\\&2(AC+DF)+[(B+C)^2+(E+F)^2]\frac{f}{2}\\&\quad-(C^2+F^2)=0\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

证明

3.2 长度为奇素数v的PGIS扩展成$2v$的PGIS构造方法

推论1　设序列$s=\{s(t)=a(t)+\mathrm{j}b(t)|0\le t\le v-1\}$为PGIS，则对$a$取反，或仅对$b$取反，或同时对$a$, b取反，或对序列s移位，得到的序列s'为PGIS。

证明　以下仅对a取反的情况做出证明，其他情况同理。

设序列s为PGIS，对其实部序列a取反后得到序列s'，其实部序列和虚部序列分别为$-a$, b。根据定义1，显然有$R_a(\tau)=R_{-a}(\tau)$, $R_{(-a)b}(\tau)=-R_{ab}(\tau)$, $R_{b(-a)}(\tau)=-R_{ba}(\tau)$；又由引理3可知，$R_a(\tau)$, $R_b(\tau)$, $R_{ab}(\tau)$, $R_{ba}(\tau)$满足充分必要条件关系式，结合定义1 可知，$R_{-a}(\tau)$, $R_b(\tau)$, $R_{(-a)b}(\tau)$, $R_{b(-a)}(\tau)$亦满足这两个充要条件关系式，即s'亦为PGIS。　证毕

设序列s是长度为奇素数v的PGIS，对序列s进行推论1中的任意组合种变换得到s'，然后对s'依次移位得到矩阵

$$\boldsymbol{M}_{v\times v}=\begin{pmatrix}s'(0)&s'(1)&\cdots&s'(v-2)&s'(v-1)\\s'(1)&s'(2)&\cdots&s'(v-1)&s'(0)\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\s'(v-1)&s'(0)&\cdots&s'(v-3)&s'(v-2)\end{pmatrix}\tag{26}$$

令序列s_p, s_q分别为矩阵$\boldsymbol{M}_{v\times v}$中第$p$行、第$q$行构成的序列，$T=|p-q|$，其中$0\le p,q\le v-1$。构造交织序列

$$\begin{aligned}u'=&I(s_p,s_q)\\=&\{s(p),s(p+T)_{\bmod v},s(p+1)_{\bmod v},\\&s(p+1+T)_{\bmod v},\cdots,s(p+v-2)_{\bmod v},\\&s(p+v-2+T)_{\bmod v},s(p+v-1)_{\bmod v},\\&s(p+v-1+T)_{\bmod v}\}\end{aligned}\tag{27}$$

I表示交织操作。设系数序列$k=(k_0,k_1)$是长度为2的PGIS，构造系数矩阵

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}a\pm\mathrm{j}a&-a\pm\mathrm{j}a&a\pm\mathrm{j}b&-a\pm\mathrm{j}b\\b\mp\mathrm{j}b&-b\mp\mathrm{j}b&b\mp\mathrm{j}a&-b\mp\mathrm{j}a\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{28}$$

其中，a,b是不全为0的整数。令系数序列k为系数矩阵$\boldsymbol{K}$任意一行，定义长度为偶数$2v$的序列$u=\{u(t)=u'(t)\bullet k_{t\bmod 2}|0\le t\le 2v-1\}$。

定理2　当$T=|p-q|=\dfrac{v+1}{2}$时，上述序列u是长度为偶数$2v$的PGIS。

证明　设推论1中的变换为对s的实部序列a取反，得到序列s'。由定义1可知系数序列k的自相关函数为

$$R_k(\tau)=\begin{cases}2(a^2+b^2),\tau=0\\0,\qquad\qquad 其他\end{cases}\tag{29}$$

令$\tau=2\tau_1+\tau_2$, $0\le\tau_1\le v-1$, $0\le\tau_2\le 1$，分以下3种情况讨论$R_s(\tau)=\begin{cases}R,\tau=0\\0,\ 其他\end{cases}$

(1)当$\tau=0$时

$$\begin{aligned}R_u(0)=&\sum_{i=0}^{2v-1}u(i)\cdot u^*(i)\\=&\sum_{i=0}^{2v-1}u'(i)\cdot k_{(i\bmod 2)}\cdot[u'(i)\cdot k_{(i\bmod 2)}]^*\\=&\sum_{i=0}^{v-1}s(p+i)_{(\bmod v)}\cdot k_0\cdot[s(p+i)_{(\bmod v)}\cdot k_0]^*\\&+\sum_{i=0}^{v-1}s(p+i+T)_{(\bmod v)}\\&\cdot k_1\cdot[s(p+i+T)_{(\bmod v)}\cdot k_1]^*\\=&R_k(0)\cdot R_s(0)\\=&2(a^2+b^2)\cdot R_s(0)\end{aligned}\tag{30}$$

(2)当$\tau\ne 0$，且$\tau_2=0$时，必有$\tau_1\ne 0$，此时

$$\begin{aligned}R_u(\tau)=&\sum_{i=0}^{v-1}s(p+i)_{(\bmod v)}\cdot k_0\\&\cdot[s(p+i+\tau_1)_{(\bmod v)}\cdot k_0]^*\\&+\sum_{i=0}^{v-1}s(p+i+T)_{(\bmod v)}\\&\cdot k_1\cdot[s(p+i+T+\tau_1)_{(\bmod v)}\cdot k_1]^*\\=&R_k(0)\cdot R_s(\tau_1)\\=&0\end{aligned}\tag{31}$$

(3)当$\tau\ne 0$，且$\tau_2=1$时，由$T=\dfrac{v+1}{2}$有

$$
\begin{aligned}
R_u(\tau) &= \sum_{i=0}^{2v-1} u(i)\cdot u^*(i+\tau) \\
&= \sum_{i=0}^{2v-1} u'(i)\cdot k_{i\bmod 2}\cdot u'^*(i+2\tau_1+1) \\
&\quad \cdot k^*_{(i+2\tau_1+1)\bmod 2} \\
&= \sum_{i=0}^{v-1} s(p+i)_{\bmod v}\cdot k_0\cdot s^*(p+i+T+\tau_1)_{\bmod v} \\
&\quad \cdot k_1^* + \sum_{i=0}^{v-1} s(p+i+T)_{\bmod v} \\
&\quad \cdot k_1\cdot s^*(p+i+1+\tau_1)_{\bmod v}\cdot k_0^* \\
&= k_0k_1^*\cdot R_s(T+\tau_1) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{v-1} s\left(p+i+T+\frac{v+1}{2}\right)_{\bmod v}\cdot k_1 \\
&\quad \cdot s^*\left(p+i+1+\tau_1+\frac{v+1}{2}\right)_{\bmod v}\cdot k_0^* \\
&= R_k(1)\cdot R_s(T+\tau_1) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{32}
$$

综上所述，定理2成立。 证毕

推论2 设序列s为PGIS，当上述扩展方法的系数矩阵K中$|a|=|b|$时，扩展后得到的序列u能量效率不发生改变。

证明 根据复数的乘法公式$(m+\mathrm{j}n)\cdot(a+\mathrm{j}b)=(ma-nb)+\mathrm{j}(mb+na)$可知，$a=b$与$a=-b$的实部虚部平方和相等：$[a(m-n)]^2+[a(m+n)]^2=[a(m+n)]^2+[-a(m-n)]^2=2a^2(m^2+n^2)$。

扩展后的序列$u=\{u(t)=u'(t)\cdot k_{t\bmod 2}|0\le t\le 2v-1\}=I(s_p\cdot k_0, s_q\cdot k_1)$，$s_p$,$s_q$为序列$s$的移位序列，根据定义4可知序列$s$的能量效率

$$
\begin{aligned}
s &= s_p = s_q \\
&= \frac{A^2+D^2+(B^2+E^2)\cdot f+(C^2+F^2)\cdot f}{v\cdot\max\{A^2+D^2, B^2+E^2, C^2+F^2\}}
\end{aligned} \tag{33}
$$

根据定义4及上述复数乘法公式可知序列u的能量效率为

$$
\begin{aligned}
\eta_u &= \frac{2[2a^2(A^2+D^2)+2a^2(B^2+E^2)\cdot f+2a^2(C^2+F^2)\cdot f]}{2a^2\cdot 2v\cdot\max\{A^2+D^2, B^2+E^2, C^2+F^2\}} \\
&= \frac{A^2+D^2+(B^2+E^2)\cdot f+(C^2+F^2)\cdot f}{v\cdot\max\{A^2+D^2, B^2+E^2, C^2+F^2\}}
\end{aligned} \tag{34}
$$

即当系数矩阵$\boldsymbol{K}$中$|a|=|b|$时扩展前后能量效率不发生变化。 证毕

4 能量效率分析

根据定义4，可知定理1构造出的PGIS能量效率为

$$
\eta = \frac{A^2+D^2+(B^2+E^2)\cdot f+(C^2+F^2)\cdot f}{v\cdot\max\{A^2+D^2, B^2+E^2, C^2+F^2\}} \tag{35}
$$

本文基于定理1，同时结合计算机搜索的方法，得到大量高能量效率PGIS。利用本文定理1所构造的PGIS与其他基于2阶分圆类构造的PGIS进行能量效率比较，结果如表1所示，本文所构造的PGIS能量效率显著提高。

基于定理2和推论2的扩展方法，可以将定理1构造的高能量效率PGIS扩展成多条相同能量效率的PGIS，结果如表2所示，扩展后的PGIS能量效率不变。

表 1 PGIS的能量效率比较

文献	定理	长度	电平数	能量效率(%)	构造实例
文献[6]	定理1	13	3	50.3	例2
	定理1	19	3	70.8	例1
文献[7]	定理4	19	3	70.8	例1
	定理5	19	2	68.4	例3
文献[11]	定理1	19	2	91.3	表1(行6)
		19	3	80.4	表1(行7)
		19	3	90.0	表1(行8)
本文	定理1	13	3	98.3	(19, −8−j20, −8+j20, −8−j20, −8−j20, −8+j20, −8+j20, −8+j20, −8+j20, −8−j20, −8−j20, −8+j20, −8−j20)
		19	2	99.2	(9+j11, 9+j11, −13−j6, −13−j6, 9+j11, 9+j11, 9+j11, 9+j11, −13−j6, 9+j11, −13−j6, 9+j11, −13−j6, −13−j6, −13−j6, −13−j6, 9+j11, 9+j11, −13−j6)
		19	2	99.2	(−20−j2, 19−j7, −20−j2, −20−j2, 19−j7, 19−j7, 19−j7, 19−j7, −20−j2, 19−j7, −20−j2, 19−j7, −20−j2, −20−j2, −20−j2, −20−j2, 19−j7, 19−j7, −20−j2)
		19	2	99.6	(−18−j2, −18−j2, 17−j6, 17−j6, −18−j2, −18−j2, −18−j2, −18−j2, 17−j6, −18−j2, 17−j6, −18−j2, 17−j6, 17−j6, 17−j6, 17−j6, −18−j2, −18−j2, 17−j6)

表 2 PGIS扩展前后的能量效率比较

	长度	能量效率(%)	实例
原序列	3	99.9	$(4-\mathrm{j}15, 11+\mathrm{j}11, 11+\mathrm{j}11)$
$a=1, b=-1$	6	99.9	$(-19-\mathrm{j}11, 22, \mathrm{j}22, -11+\mathrm{j}19, \mathrm{j}22, 22)$
$a=2, b=2$	6	99.9	$(38+\mathrm{j}22, 44, -\mathrm{j}44\mathrm{j}, -22+\mathrm{j}38, -\mathrm{j}44, 44)$

5 结束语

本文定理1参数设置简单方便可以很好结合计算机搜索PGIS，利用该特点，将序列长度设为区间[3,50]内的奇素数，元素取值为区间[–20,20]内的整数，通过计算机搜索的方法，获得9 656条能量效率高于90%的PGIS，其中3 400条能量效率高于95%。

此外，本文还提出了一种新的扩展方法，将奇数长PGIS扩展成偶数长PGIS，在PGIS的数量和长度上为工程应用提供了更多的优质信号选择空间。当限定系数矩阵K中$|a|=|b|$时，扩展后序列的能量效率不变，将定理1中构造出的高能量效率PGIS通过该方法扩展，还可以另外得到大量偶数长的高能量效率PGIS，能很好地应用于工程实践。

参 考 文 献

[1] PEI S C and CHANG Kuowei. Arbitrary length reducible and irreducible perfect Gaussian integer sequences with a pre-given Gaussian integer[C]. 2020 28th European Signal Processing Conference, Amsterdam, Netherlands, 2020: 2274–2278. doi: 10.23919/Eusipco47968.2020.9287751.

[2] LIU Kai and NI Jia. Construction of Gaussian integer periodic complementary sequence set with zero correlation zone[J]. *Journal of Physics:Conference Series*, 2020, 1828: 012177. doi: 10.1088/1742-6596/1828/1/012177.

[3] 刘凯, 倪佳. 基于循环差集的最佳高斯整数序列构造[J]. 电子学报, 2021, 49(8): 1474–1479. doi: 10.12263/DZXB.20200239.

LIU Kai and NI Jia. Construction of perfect Gaussian integer sequences based on cyclic difference sets[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2021, 49(8): 1474–1479. doi: 10.12263/DZXB.20200239.

[4] CHANG C Y, LI Ying, and HIRATA J. New 64-QAM Golay complementary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(5): 2479–2485. doi: 10.1109/TIT.2010.2043871.

[5] LI C P, WANG S H, and WANG C L. Novel low-complexity SLM schemes for PAPR reduction in OFDM systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(5): 2916–2921. doi: 10.1109/TSP.2010.2043142.

[6] LEE C D and CHEN Y H. Fast generation of perfect Gaussian integer sequences of primitive length[C]. 2019 IEEE 4th International Conference on Signal and Image Processing, Wuxi, China, 2019: 588–591. doi: 10.1109/SIPROCESS.2019.8868906.

[7] HSIA C H, LOU S J, CHANG H H, *et al*. Novel hybrid public/private key cryptography based on perfect Gaussian integer sequences[J]. *IEEE Access*, 2021, 9: 145045–145059. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3121252.

[8] LIU Kai, LIU Yuandong, and CHANG Zebin. Construction of perfect gaussian integer sequences with high energy efficiency based on difference sets[C]. The 7th International Conference on Computer and Communications, Chengdu, China, 2021: 1475–1479. doi: 10.1109/ICCC54389.2021.9674364.

[9] YANG Yang, TANG Xiaohu, and ZHOU Zhengchun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(10): 615–618. doi: 10.1109/LSP.2012.2209642.

[10] CHANG H S, LI C P, LEE C D, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 4107–4115. doi: 10.1109/TIT.2015.2438828.

[11] 刘凯, 马国斌, 陈盼盼. 基于分圆类的完备高斯整数序列构造[J]. 电子学报, 2019, 47(4): 806–811. doi: 10.3969/J.ISSN.0372-2112.2019.04.006.

LIU Kai, MA Guobin, and CHEN Panpan. Construction of perfect gaussian integer sequences based on cyclotomic classes[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(4): 806–811. doi: 10.3969/J.ISSN.0372-2112.2019.04.006.

[12] 沈灏. 组合设计理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1996: 127–159.

SHEN Hao. Theory of Combination Designs[M]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1996: 127–159.

[13] HU Weiwen, WANG S H, and LI C P. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6074–6079. doi: 10.1109/TSP.2012.2210550.

[14] ZENG Fanxin, HE Xiping, XUAN Guixin, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences embedding pre-given Gaussian integers[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(8): 1122–1126. doi: 10.1109/LSP.2019.2921228.

[15] STORER T. Cyclotomy and Difference Sets[M]. Chicago: Markham Publishes Company, 1967: 25–83.

赵 伟：男，博士生，研究方向为差集偶、二进制序列偶.

黄 雷：男，硕士生，研究方向为编码理论、密码学.

贾彦国：男，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、智能补货、量子计算.

沈秀敏：女，讲师，硕士生导师，研究方向为编码理论、序列设计.

责任编辑：余 蓉