

基于傅里叶系数实部的脉冲流信号欠Nyquist采样方法

云双星^① 徐红伟^② 付宁^{*①} 乔立岩^①

^①(哈尔滨工业大学电子与信息工程学院 哈尔滨 150080)

^②(哈尔滨工业大学网络空间安全学院 哈尔滨 150080)

摘要: 有限新息率(FRI)采样理论可以远低于信号Nyquist频率的采样速率实现对脉冲流信号的欠采样。经典的FRI重构算法大多基于傅里叶系数进行运算,其中存在大量的对复数矩阵的奇异值分解,降低了算法的执行效率。针对该问题,该文提出基于傅里叶系数实部的脉冲流信号FRI采样及重构方法。首先利用离散余弦变换从脉冲流信号的低速采样值中获取其傅里叶系数实部信息,并在重构算法中使用实部的Toeplitz矩阵以提高奇异值分解(SVD)的效率;其次,为了提升经典的零化滤波器算法的鲁棒性,该文从傅里叶系数实部协方差矩阵的旋转不变特性以及零空间特性出发,提出基于离散余弦变换的协方差矩阵分解算法以及基于离散余弦变换的零空间搜索算法来估计脉冲流信号的特征参数,并针对出现的共轭根问题,提出基于交替方向乘法子的去共轭算法。仿真结果表明:在信号新息率较高的情况下,使用傅里叶系数实部信息会极大提高算法的执行效率,同时保证参数估计的准确性。

关键词: 欠Nyquist采样; 有限新息率; 脉冲流信号; 离散余弦变换

中图分类号: TN911.71

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2023)06-2153-09

DOI: [10.11999/JEIT220558](https://doi.org/10.11999/JEIT220558)

Sub-Nyquist Sampling of Pulse Streams Based on the Real Part of Fourier Coefficients

YUN Shuangxing^① XU Hongwei^② FU Ning^① QIAO Liyan^①

^①(School of Electronics and Information Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

^②(School of Cyberspace Science, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: The Finite Rate of Innovation (FRI) theory can realize the sub-Nyquist sampling of pulse streams signal by a sampling rate much lower than its Nyquist frequency. Most classical FRI reconstruction algorithms operate on the basis of Fourier coefficients, and there is a lot of singular value decomposition of complex matrices, which reduces the efficiency of the algorithm. To solve this problem, an FRI sampling and reconstruction method based on the real part of Fourier coefficients is proposed in this paper. Firstly, the discrete cosine transform is used to obtain the real part of Fourier coefficients information from the low-speed sampling value of the pulse flow signal, and the Toeplitz matrix of the real part is used in the reconstruction algorithm to improve the efficiency of the Singular Value Decomposition (SVD). Secondly, in order to improve the robustness of the classical annihilating filter algorithm, a covariance matrix decomposition algorithm and a null space searching algorithm are proposed from the rotation invariant feature and the null space property of the real covariance matrix. The two methods are based on the discrete cosine transform to estimate characteristic parameters of the pulse stream signal. For the conjugate root problem, a new method of deconjugation based on the alternating direction multiplier is proposed in this paper. The simulation results show that using the real part information of Fourier coefficients can greatly improve the efficiency of the algorithm and ensure the accuracy of parameter estimation when the rate of innovation of the signal is high.

Key words: Sub-Nyquist sampling; Finite Rate of Innovation (FRI); Pulse streams signal; Discrete cosine transform

收稿日期: 2022-05-07; 改回日期: 2022-10-20; 网络出版: 2022-10-26

*通信作者: 付宁 funinghit@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(62071149, 61671177), 鸿鹄创新中心开放基金(HQ202103003), 中央高校基本科研业务费专项资金

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (62071149, 61671177), The Open Foundation of Hongque Innovation Center (HQ202103003), Fundamental Research Funds for the Central Universities

1 引言

经典香农采样定理在处理参数化大带宽信号时效率十分低下^[1,2]。这类大带宽信号广泛应用于雷达^[3]、频谱感知^[4]、超声成像^[5]、地球物理^[6]、心电信号监测^[7]以及辐射源定位^[8]等领域中,因而针对此类信号的欠采样问题的研究,具有重要的意义。

有限新息率(Finite Rate of Innovation, FRI)采样理论可以远低于信号Nyquist频率的采样速率实现对这类单位时间内由有限参数决定的大带宽信号的欠Nyquist采样与重构^[8-11]。针对其参数重构过程, Vetterli等人^[11]提出了零化滤波器算法,但是算法抗噪声性能不足; Qiu等人^[12]提出了基于低秩矩阵分解的Cazdow去噪算法,但是迭代过程需要进行大量的奇异值分解; Simeoni等人^[13]提出了基于交替投影的迭代估计算法,但是算法对采样率具有严苛的要求,且算法同样采用大量的奇异值分解。经典的依赖于奇异值分解的谱估计算法如矩阵束算法^[14]、多重信号分类算法^[15]、旋转不变子空间算法^[16]等也广泛应用到FRI参数的估计过程中。因此,奇异值分解是FRI谱估计方法的核心,也是最为耗时的一步^[17-19]。

对于复数矩阵的奇异值分解过程的执行速度远远低于仅使用实部信息的相同规模的矩阵^[20]。因此,如果在谱估计算法中仅使用傅里叶系数实部信息,会极大地提高参数估计过程的执行效率。

文献^[21]提出了一种基于傅里叶系数实部的谱估计算法。该算法利用希尔伯特变换,从获取到的傅里叶系数实部中解析出完整的傅里叶系数信息。这样的方案面临两个主要问题:首先,离散希尔伯特变换的精度十分依赖于系统的采样率;其次,脉冲流信号的新息率会极大影响希尔伯特变换的效果。

为了能够从有限的傅里叶系数实部信息中实现准确的参数估计,文献^[22]改进了经典的零化滤波器算法,使其适用于基于傅里叶系数实部信息的参数估计。然而,在噪声环境下此零化滤波器算法的鲁棒性不足;而且,这种零化滤波器的使用会产生共轭根问题,即对同一个时延参数会求解出两个有效的估计值,这对信号的测量过程产生极大的干扰。

文献^[23]面向脉冲流信号提出了基于双通道调制的傅里叶系数实部的获取方法。然而,在参数估计环节,观测矩阵的RIP特性无法保证^[24,25],而且算法的执行效率非常低下。

现有的针对傅里叶系数实部的零化滤波器算法理论并不完善,因此本文首先证明了针对傅里叶系数实部的零化滤波器系数的存在性以及唯一性。对

于实际的测量过程,本文提出使用离散余弦变换从低速采样值中直接获取脉冲流信号的傅里叶系数实部信息,并充分利用傅里叶系数实部协方差矩阵的旋转不变特性以及傅里叶系数实部Toeplitz矩阵的零空间特性,提出基于离散余弦变换的协方差矩阵分解算法(Covariance matrix Decomposition based on Discrete cosine transform, CDoD)以及基于离散余弦变换的零空间搜索算法(Null Space searching based on Discrete cosine transform, NSoD),以此解决针对傅里叶系数实部的零化滤波器算法本身存在的抗噪声性能差、鲁棒性弱的问题。同时,本文提出基于交替方向乘子迭代框架的去共轭根算法,利用空间搜索与循环迭代的方式,解决参数估计过程的共轭根问题。仿真实验表明,本文所提算法不仅能保证良好的参数估计性能,且相较于经典的FRI谱估计算法,其运算速度得到大幅度的提升,十分有利于实际工程中的应用。

本文的安排如下:第2节介绍脉冲流的信号模型以及采样结构;第3节介绍针对傅里叶系数实部的零化滤波器算法及关键环节的证明,并展示本文所提CDoD以及NSoD算法及相应的证明过程;第4节安排本文的仿真验证实验;第5节进行总结。

2 信号模型及采样结构

脉冲流如式(1)所示

$$x(t) = \sum_{k=1}^K a_k h(t - t_k) \quad (1)$$

其中, $\{a_k, t_k\}_{k=1}^K$ 分别代表脉冲流的幅度参数以及时延参数,且 $t_k \in [0, \tau], a_k > 0$; τ 代表脉冲流函数的时间域支撑。 $h(t)$ 为脉冲流基函数,在经典FRI理论中通常假设 $h(t) = \delta(t)$ 为Dirac函数^[6]。根据FRI采样理论,信号的新息率为 $\gamma = 2K/\tau$ ^[11],信号的傅里叶系数实部可以根据泊松求和公式^[26]表示为

$$X[m] = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^K a_k \cos\left(\frac{2\pi m t_k}{\tau}\right) \quad (2)$$

其中, $m \in \mathbb{Z}$ 。为了实现脉冲流信号的欠Nyquist采样,本文提出如图1所示的采样结构。图1中原始信号 $x(t)$ 首先经过带宽为 B 的理想低通滤波器 $g(t)$ ^[20],然后以 $f_s = 1/T_s$ 的采样速率进行低速采样,其中 T_s 为滤波信号的采样时间,采样值为 $c[n], n = 0, 1, \dots, N-1, N$ 为采样的点数,并且 $T_s = \tau/N$ 。

3 基于傅里叶系数实部的谱估计算法

3.1 基于傅里叶系数实部的零化滤波器算法

对于实际测量过程,一般对采样值进行傅里叶

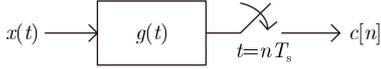


图1 基于sinc采样核的Dirac脉冲流采样结构

变换之后，再分离傅里叶系数实部信息，但此过程十分冗余。为了提高信息的获取效率，本节首先提出基于离散余弦变换直接获取傅里叶系数实部的方法。针对傅里叶系数实部的零化滤波器的具体形式已经在文献[22]中提出，但是缺少对零化滤波器系数存在性及唯一性的有效证明。本节将从矩阵线性空间的角度，补充完成零化滤波器系数的存在性及唯一性证明。

采样值 $c[n]$ 的离散余弦变换 (Discrete Cosine Transform, DCT)可以表示为

$$X^{\text{DCT}}[l] = \sqrt{\frac{2}{N}} \beta[l] \sum_{n=0}^{N-1} c[n] \cos\left(\frac{\pi l(2n+1)}{2N}\right) \quad (3)$$

其中， $0 \leq l \leq N-1$ ；当 $l=0$ 时， $\beta[l]=1/\sqrt{2}$ ，当 $l \geq 1$ 时， $\beta[l]=1$ 。

如果对采样值 $c[n]$ 进行 N 点补0操作，则得到新的序列 $\tilde{c}[r]$ 。该序列满足当 $0 \leq r \leq N-1$ 时， $\tilde{c}[r] = c[r]$ ，当 $N \leq r \leq 2N-1$ 时， $\tilde{c}[r] = 0$ 。序列 $\tilde{c}[r]$ 的 $2N$ 点离散傅里叶变换可以表示为

$$C[k] = \sum_{r=0}^{2N-1} \tilde{c}[r] e^{-j\frac{2\pi kr}{2N}}, 0 \leq k \leq 2N-1 \quad (4)$$

如果定义 $\text{Re}\{\cdot\}$ 表示序列的傅里叶系数实部，那么

$$\text{Re}\left\{C[k]e^{-j\frac{2\pi kN}{2N}}\right\} = \sum_{n=0}^{N-1} c[n] \cos\left(\frac{\pi k(2n+1)}{2N}\right) \quad (5)$$

由于序列 $c[n]$ 的补0操作，在式(5)中有效的系数为

$$D[m] = \text{Re}\left\{C[2m]e^{-j\frac{\pi m}{N}}\right\} \quad (6)$$

其中， $m=0,1,\dots,N-1$ 。不失一般性，文中假设 N 为奇数，并重新定义序列 F 为

$$F = \begin{bmatrix} D\left[\frac{N+1}{2}\right], \dots, D[N-1], D[0], \\ D[1], \dots, D\left[\frac{N-1}{2}\right] \end{bmatrix} \quad (7)$$

那么序列 F 可以被重新表示为

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 0) & \cdots & \cos(\omega_K 0) & \sin(\omega_1 0) & \cdots & \sin(\omega_K 0) \\ \cos(\omega_1 1) & \cdots & \cos(\omega_K 1) & \sin(\omega_1 1) & \cdots & \sin(\omega_K 1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\omega_1 2K) & \cdots & \cos(\omega_K 2K) & \sin(\omega_1 2K) & \cdots & \sin(\omega_K 2K) \end{bmatrix} \quad (13)$$

如果特征频点 $\{\omega_k\}_{k=1}^K$ 满足

$$\omega_i + \omega_j \neq 2r\pi, \forall 1 \leq i, j \leq K \quad (14)$$

那么矩阵 \mathbf{V} 的秩为 $2K$ 。如果定义矩阵 $\mathbf{D} = \text{diag}$

$$F\left[l + \frac{N+1}{2}\right] = C[l] = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^K a_k \cos\left(\frac{2\pi l}{\tau}\left(t_k + \frac{\tau}{2N}\right)\right) \quad (8)$$

其中， $l = -(N-1)/2, -(N-3)/2, \dots, (N-1)/2$ ，并且 $F[1]$ 代表序列 F 的第1个元素。

定义序列 Z 为

$$Z = \left[\sqrt{\frac{N}{2}}, \sqrt{\frac{N}{2}}, \dots, \sqrt{\frac{N}{2}}, \sqrt{N}, \sqrt{\frac{N}{2}}, \dots, \sqrt{\frac{N}{2}} \right] \quad (9)$$

则采样值序列 $c[n]$ 的DCT变换 $X^{\text{DCT}}[l]$ 与傅里叶系数实部序列 $C[l]$ 之间的关系为

$$C[l] = X^{\text{DCT}}[l] \cdot Z[l] \quad (10)$$

因此序列 $C[l]$ 可以从低通滤波之后的低速采样值 $c[n]$ 中，由DCT变换求得。

在此，定义零化滤波器满足

$$A[z] = \prod_{k=1}^K (1 - u_k z^{-1})(1 - u_k^* z^{-1}) = \sum_{l=0}^{2K} A[l] z^{-l} \quad (11)$$

其中， $(\cdot)^*$ 表示共轭， $A[l] = A[2K-l]$ ，则存在卷积关系为 $(C * A)[l] = 0$ [22]。零化滤波器的根由其系数唯一决定，为了求解零化滤波器的系数 $A[l]$ ，本文首先证明其根的存在性及唯一性，并给出如下引理1。

引理1 针对如式(1)所示的脉冲流信号产生的采样值 $c[n]$ ， $n=0,1,\dots,N-1$ ，通过离散余弦变换获取其 $4K+1$ 个连续的傅里叶系数实部 $C[l]$ ， $l=-2K, -2K+1, \dots, 2K$ ，并将其排列成Toeplitz矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2K+1)}$ 的形式。如果假定特征参数满足 $\omega_i + \omega_j \neq 2r\pi, \forall 1 \leq i, j \leq K$ 且 $r \in \mathbb{Z}$ ，那么矩阵 \mathbf{C} 的秩为 $2K$ ，且其零空间的维度为1。这里 $\omega_k = 2\pi/\tau \cdot (t_k + \tau/2N)$ ， $N = 4K + 1$ ，且矩阵 \mathbf{C} 表示为

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C[0] & C[-1] & \cdots & C[-2K] \\ C[1] & C[0] & \cdots & C[-2K+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C[2K] & C[2K-1] & \cdots & C[0] \end{bmatrix} \quad (12)$$

证明 定义新的矩阵 $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times 2K}$ 为

$\{[a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k]\} \in \mathbb{R}^{2K \times 2K}$ ，其中 $\text{diag}\{\cdot\}$ 代表向量的对角化矩阵，那么矩阵 \mathbf{C} 可以表示为

$$\mathbf{C} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T \quad (15)$$

因此, 矩阵 C 的秩决定于矩阵 D 。由于矩阵 C 的列空间维度等于其秩为 $2K$, 所以其零空间的维度为 $2K + 1 - 2K = 1$ 。证毕

将式(11)中零化滤波器的系数矩阵写为 $A \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times 1}$, 则卷积运算 $(C * A)[l] = 0$ 的矩阵形式表示为 $C \cdot A = \mathbf{0}$ 。通过引理1可以得知, A 位于Toeplitz矩阵 C 的零空间内且是唯一的。假设由系数矩阵 A 求得的零化滤波器的根为 $\{\tilde{u}_l\}_{l=1}^{2K}$, 则原始信号的时间延时参数及其共轭时间参数可以表示为

$$\tilde{t}_l = -\frac{\tau}{2\pi} \left(\ln(\tilde{u}_l) + \frac{\tau}{N} \right) \quad (16)$$

很明显, $\{\tilde{t}_l\}_{l=1}^{2K} = \{t_k\}_{k=1}^K \cup \{\tau - t_k\}_{k=1}^K$, 此处将 $\tau - t_k$ 称为参数 t_k 的共轭参数。

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(0T_s - \tilde{t}_1) & \varphi(0T_s - \tilde{t}_2) & \cdots & \varphi(0T_s - \tilde{t}_{2K}) \\ \varphi(1T_s - \tilde{t}_1) & \varphi(1T_s - \tilde{t}_2) & \cdots & \varphi(1T_s - \tilde{t}_{2K}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi((N-1)T_s - \tilde{t}_1) & \varphi((N-1)T_s - \tilde{t}_2) & \cdots & \varphi((N-1)T_s - \tilde{t}_{2K}) \end{bmatrix} \quad (18)$$

因此对于观测值向量 $\mathbf{c} = [c[0], c[1], \dots, c[N-1]]^T$ 而言, 其来自矩阵 Φ 中的 K 列的加权组合, 权重系数为 $\{a_k\}_{k=1}^K$ 。如果定义一个 K 稀疏的向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2K \times 1}$, 那么其非0元素应该为 $\{a_k\}_{k=1}^K$, 其位置对应着Dirac脉冲流信号时间延迟参数在 $\{\tilde{t}_l\}_{l=1}^{2K}$ 中的坐标。为此本文提出优化方程为

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \frac{1}{2} \|\Phi \cdot \mathbf{a} - \mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_1, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{a} = \mathbf{z} \end{aligned} \quad (19)$$

参考文献[28]中的交替方向乘子法, 将式(19)所示的优化方程改写为

$$\min_{\mathbf{a}} L(\mathbf{a}, \mathbf{z}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\Phi \cdot \mathbf{a} - \mathbf{c}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{z}\|_1 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{a} - \mathbf{z} + \mathbf{u}\|_2^2 \quad (20)$$

其中, λ 是稀疏度的惩罚因子, 其值越大, 则要求 \mathbf{a} 越稀疏; 而参数 ρ 决定了优化过程的步长。 \mathbf{u} 代表的是优化过程自身产生的残差向量。在噪声情况下, 得到的向量 \mathbf{a} 仍然为近似稀疏的向量, 故而需要选择其中绝对值最大的 K 个数的位置作为参数估计值的坐标(如算法1所示)。

算法1中有

$$S_{\lambda/\rho}(x) = \begin{cases} x - \lambda/\rho, & x \geq \lambda/\rho \\ x + \lambda/\rho, & x < \lambda/\rho \end{cases} \quad (21)$$

通过算法1所示得到参数 $\{t_k\}_{k=1}^K$, 幅值参数 $\{a_k\}_{k=1}^K$ 可以通过最小二乘的方法求得。

3.3 基于离散余弦变换的协方差矩阵分解算法

通过3.2节的分析可以得知, 零化滤波器算法

3.2 基于交替乘子迭代的去共轭算法

由于在零化滤波器算法中使用的是傅里叶系数实部信息, 因此会产生 K 个共轭根, 这会给后续的特征参数选择过程带来混淆。因此本节将借助采样值的时域表达形式, 实现参数的去共轭。采样核时域形式为 $g(t) = B \text{sinc}(Bt)$, 其中 B 为滤波器的带宽, 那么采样值可以表示为

$$c[n] = \sum_{k=1}^K a_k \varphi(nT_s - t_k) \quad (17)$$

其中, $\langle \cdot \rangle$ 表示信号的内积, $\varphi(t) = \sin(\pi Bt) / B\tau \sin(\pi t/\tau)$ 是标准的Dirichlet函数[27]。

假设由零化滤波器估计出的时间延迟参数为 $\{\tilde{t}_r\}_{r=1}^{2K}$, 那么如果定义测量矩阵为 $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times 2K}$ 为

可以从无噪声的观测值中准确估计Dirac脉冲流信号的特征参数。然而, 当观测值受到噪声的扰动时, 零化滤波器方法的鲁棒性将会变得极差[13]。经典的谱估计算法如Cazdow滤波迭代算法等, 虽然具有较强的抗噪声能力, 但其是针对完整的傅里叶系数提出的。为了提高基于傅里叶系数实部的参数估计方法对于噪声的抵抗能力, 本节设计了基于离散余弦变换的协方差矩阵分解算法(CDoD)。

如式(1)所示的Dirac脉冲流信号的傅里叶系数实部信息可以表示为

$$\mathbf{c}^{\text{DCT}} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{a} \quad (22)$$

其中, $\mathbf{c}^{\text{DCT}} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$, 并且

$$\mathbf{a} = \left[\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_K}{2}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \dots, \frac{a_K}{2} \right]^T \quad (23)$$

算法1 时间延迟参数去共轭算法伪代码

输入: 观测矩阵 Φ , 采样值向量 \mathbf{c} , 参数 λ, ρ ; 脉冲个数 K ; 算法的迭代次数 I_{\max} ;

输出: K 稀疏向量 \mathbf{a} , 其 K 个最大元素的位置集合 \mathfrak{S} 。

(1) 初始化 $\mathbf{a}^0 = \mathbf{c}$, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$ 且 $\mathbf{z}^0 = \mathbf{0}$;

(2) While $k < I_{\max}$ do,

$$\mathbf{a}^{k+1} = (\Phi^T \cdot \Phi + \rho \mathbf{I})^{-1} (\Phi^T \cdot \mathbf{c} + \rho(\mathbf{z}^k - \mathbf{u}^k)),$$

$$\mathbf{z}^{k+1} = S_{\lambda/\rho}(\mathbf{a}^{k+1} + \mathbf{u}^k),$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{a}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1} + \mathbf{u}^k,$$

$$k = k + 1,$$

End While;

(3) 返回 \mathbf{a} 以及其最大的 K 个元素构成的集合 \mathfrak{S} 。

矩阵 $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N \times 2K}$ 为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} u_{2K}^1 & u_{2K}^2 & \cdots & u_{2K}^K & v_{2K}^1 & v_{2K}^2 & \cdots & v_{2K}^K \\ u_{2K-1}^1 & u_{2K-1}^2 & \cdots & u_{2K-1}^K & v_{2K-1}^1 & v_{2K-1}^2 & \cdots & v_{2K-1}^K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{-2K}^1 & u_{-2K}^2 & \cdots & u_{-2K}^K & v_{-2K}^1 & v_{-2K}^2 & \cdots & v_{-2K}^K \end{bmatrix} \quad (24)$$

其中, $u_m^k = e^{j\omega_k m}$, $v_m^k = e^{-j\omega_k m}$ 。因此对于傅里叶系数实部向量 \mathbf{c}^{DCT} 的协方差矩阵可以表示为

$$\mathbf{R}_c = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{c}^{\text{DCT}} \cdot (\mathbf{c}^{\text{DCT}})^T \right\} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{G}^* \quad (25)$$

其中, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ 是期望算子, 且 $\{a_k\}_{k=1}^K$ 假定为随机变量, 其协方差矩阵为 $\mathbf{R}_a = \mathbb{E} \{ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^T \}$ 。本节提出如下定理。

定理1 假设 $\mathbf{R}_c \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 为式(22)中脉冲流信号的傅里叶系数实部向量的协方差矩阵且 $N \geq 2K$, $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{N \times 2K}$ 是 \mathbf{R}_c 的 $2K$ 个最大奇异值对应的左奇异向量构成的矩阵。令 \mathbf{E}_1 为矩阵 \mathbf{E} 的前 $m-1$ 行, \mathbf{E}_2 为矩阵 \mathbf{E} 的后 $m-1$ 行。如果 $m \geq 2K+1$, 那么矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{E}_1^\dagger \cdot \mathbf{E}_2$ 的特征值即为零化滤波器式(11)的根。

证明 首先定义向量 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{2K \times 1}$ 为

$$\mathbf{u} = [e^{j\omega_1} \ e^{j\omega_2} \ \cdots \ e^{j\omega_K} \ e^{-j\omega_1} \ e^{-j\omega_2} \ \cdots \ e^{-j\omega_K}]^T \quad (26)$$

其中, $\omega_k = 2\pi/\tau \cdot (t_k + \tau/2N)$, N 为信号的采样点数。假设矩阵 \mathbf{G}_1 表示矩阵 \mathbf{G} 的前 $m-1$ 行, \mathbf{G}_2 表示矩阵 \mathbf{G} 的后 $m-1$ 行, 那么

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}_1 \cdot \text{diag} \{ \mathbf{u} \} \quad (27)$$

矩阵 \mathbf{R}_c 的列空间与矩阵 \mathbf{E} 以及矩阵 \mathbf{G} 是相同的, 因此定义可逆矩阵 $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{2K \times 2K}$, 满足

$$\mathbf{G} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} \quad (28)$$

故而存在 $\mathbf{G}_1 = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J}$ 以及 $\mathbf{G}_2 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J}$ 。将式(27)代入, 可以得到

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{J} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{u} \} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{J} \quad (29)$$

定义矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{E}_1^\dagger \cdot \mathbf{E}_2$, 则可以得到

$$\mathbf{W} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \text{diag} \{ \mathbf{u} \} \cdot \mathbf{J} \quad (30)$$

由于 \mathbf{J} 为任意可逆矩阵, 故而可以选择为矩阵 \mathbf{W} 的特征矩阵, 则向量 \mathbf{u} 即为矩阵 \mathbf{W} 的特征值向量, 也就是零化滤波器式(11)的根。证毕

一旦获得共轭的时间延迟参数 $\{\tilde{t}_r\}_{r=1}^{2K}$, 可以通过去共轭算法, 求解原始脉冲信号的参数。本文将 CDoD 算法总结为 **算法2**。

3.4 基于离散余弦变换的零空间搜索算法

为了充分利用 Toeplitz 矩阵的零空间特性, 本节提出基于离散余弦变换的零空间搜索算法(NSoD)。如果获取了 $N \geq 4K$ 个傅里叶系数实部, 且将其排

列成如式(12)的 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(N-M) \times (M+1)}$, 其中 M 是矩阵束参数, 且满足 $2K \leq M \leq N-2K$, 那么通过本节提出的定理2, 可以实现时延参数的准确估计。

定理2 通过 DCT 变换, 从采样值序列 $c[n]$ 中获取如式(1)所示的脉冲流信号的 $N \geq 4K$ 个连续的傅里叶系数实部 $C[l]$, 并排列成 Toeplitz 矩阵 $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{(N-M) \times (M+1)}$, 且假定向量 \mathbf{e} 满足

$$\mathbf{e} = [\cos(0\omega_k) + \sin(0\omega_k), \cos(1\omega_k) + \sin(1\omega_k), \dots, \cos(M\omega_k) + \sin(M\omega_k)] \quad (31)$$

其中, $k = 1, 2, \dots, K$ 。如果 $2K \leq M \leq N-2K$, 那么向量 \mathbf{e} 将与矩阵 \mathbf{C} 的零空间正交。

证明 定义如式(12)形式的矩阵 $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{(N-M) \times 2K}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(M+1) \times 2K}$ 是列满秩的, 因此他们的零空间维度为 0。定义对角矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{2K \times 2K}$ 为

$$\mathbf{D} = \text{diag} \{ [a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots, a_k] \} \quad (32)$$

则矩阵 \mathbf{C} 满足 $\mathbf{C} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^T$ 。因此矩阵 \mathbf{C} 的零空间与矩阵 \mathbf{V} 的零空间是一致的, 即满足

$$N(\mathbf{C}) = N(\mathbf{V}^T) \quad (33)$$

其中, $N(\cdot)$ 表示矩阵的零空间。

这也就意味着矩阵 \mathbf{C} 的零空间中的向量是垂直于矩阵 \mathbf{V} 中的列向量的。矩阵 \mathbf{C} 的零空间的维度为 $M+1-2K$, 因此其中含有 $M+1-2K$ 个独立的元素, 将他们假设为 $\{v_i | 1 \leq i \leq M+1-2K\}$, 故而存在

$$\sum_{i=1}^{M+1-2K} |\mathbf{e}^T \cdot v_i| = 0, k = 1, 2, \dots, K \quad (34)$$

证毕

算法2 CDoD算法伪代码

输入: 傅里叶系数实部向量 \mathbf{c}^{DCT} , 脉冲参数 K , 周期 τ ;

输出: Dirac 脉冲幅度参数 $\{a_k\}_{k=1}^K$, 时间延迟参数 $\{t_k\}_{k=1}^K$ 。

- (1) 根据式(25)及定理1构建矩阵 \mathbf{R}_c 以及 \mathbf{E} , \mathbf{E}_1 和 \mathbf{E}_2 ;
- (2) 根据定理1计算矩阵 $\mathbf{W} = \mathbf{E}_1^\dagger \cdot \mathbf{E}_2$ 的 $2K$ 个特征值;
- (3) 根据式(16)求解含有共轭的时间延迟参数 $\{\tilde{t}_r\}_{r=1}^{2K}$;
- (4) 根据去共轭算法1以及最小二乘算法计算原始信号的时间延迟参数 $\{t_k\}_{k=1}^K$ 以及幅度参数 $\{a_k\}_{k=1}^K$ 。

矩阵 C 的零空间向量可以通过奇异值分解求得, 他们与矩阵 C 的最小的 $M+1-2K$ 个奇异值对应的右奇异向量位于同一空间中。当获取到的采样值含有噪声时, 式(34)中的等号不再成立, 但本文仍然期望能够使得式(34)左侧的表达式尽量小。因此参数 $\{\omega_r\}_{r=1}^{2K}$ 对应着式(35)所示伪谱中的 $2K$ 个最大的谱峰

$$S(\omega) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M+1-2K} |e^T(\omega) \cdot v_i|} \quad (35)$$

同样, 通过去共轭算法, 可以求得原始信号的时间延迟参数。将NSoD算法总结为**算法3**。

3.5 复杂度分析

本节将分析所提出的算法与经典的零化滤波器算法在脉冲流信号时间延迟参数估计上的运算复杂度。为了便于展示, 将经典的零化滤波器方法称为AFoD (Annihilating Filter method based on DCT)^[21]。对于经典方法而言, 在对式(12)所示的矩阵 $C \in \mathbb{R}^{(2K+1) \times (2K+1)}$ 的奇异值分解过程中, 浮点运算复杂度为 $O((2K+1)^3) = O(K^3)$; 在采用**算法1**进行共轭根的去过程中, 运算环节主要集中在第1步, $\Phi^T \cdot \Phi$ 需要 $(2K+1)^2 N$ 次乘法运算, 复杂度为 $O((2K+1)^2 N) = O(K^2 N)$; 而矩阵求逆的复杂度为 $O((2K+1)^3) = O(K^3)$, 由于 $N > K$, 因此算法总的复杂度约为 $O(K^3 + K^2 N) = O(K^2 N)$ 。

对于CDoD方法, 构造矩阵 R_c 需要 $2KN^2$ 次乘法运算, 复杂度为 $O(KN^2)$; 两次特征值分解的运算复杂度为 $O(N^3) + O(K^3)$; E_1 矩阵求伪逆过程的运算复杂度为 $O(K^3)$; 去共轭算法的复杂度为 $O(K^2 N)$; 因此CDoD算法总的复杂度为 $O(N^3 + KN^2 + K^2 N + K^3) = O(N^3)$ 。

对于NSoD方法, 一般取 $M > 2K$ 。第1步构建矩阵 C 以及获取其零空间向量的过程中, 运算复杂度为 $O((M+1)^3) > O(K^3)$; 伪谱搜索过程相当

于对矩阵进行求逆运算, 其运算复杂度为 $O((M+1-2K)^3) > O(K^3)$; 使用去共轭算法的复杂度为 $O(K^2 N)$; 因此NSoD方法总的复杂度大于 $O((M+1)^3 + (M+1-2K)^3 + K^2 N) > O(K^3 + K^2 N) = O(K^2 N)$ 。

4 仿真实验验证

实验1 为了探究本文所提算法对脉冲流信号时间延迟参数估计的精度, 并将其与解析的克拉默-拉奥下界(Cramer-Rao Lower Bound, CRLB)进行对比^[27], 本实验假设脉冲流信号中包含着 $K=1$ 个脉冲, 信号周期为 $\tau=1$ s, 且时间延迟参数为 $t_1=0.35\tau$ 。幅度参数为 $a_1=1$ 。采样过程中的低通滤波器带宽选择为 $B=21$ Hz, 因此在单位周期 τ 内需要采样 $N=21$ 个点。对于CDoD以及NSoD算法, 假设其矩阵束参数为 $M=11$, 在去共轭算法阶段假设交替方向乘子法的参数为 $\rho=0.02$, $\lambda=10$ 。仿真算法采用归一化均方误差(Normalized Mean Square Error, NMSE)为评价指标, 具体定义为

$$\text{NMSE} = 10 \cdot \lg \left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\frac{t_k - \hat{t}_k}{\max(t_k)} \right)^2 \right) \quad (36)$$

其中, \hat{t}_k 为重构参数。实验假设信噪比范围为 $-10 \sim 40$ dB, 对每组数值进行1000次蒙特卡罗实验。

如图2所示为CDoD, NSoD算法与AFoD算法的时间延迟参数重构精度对比。在低信噪比的情况下, 3种重构算法的表现区分度不明显, 因为此时的噪声功率极高, 信号空间被噪声完全覆盖。然而, 随着信噪比条件的改善, 本文提出的算法的重构精度远超AFoD算法, 且更加逼近参数估计的CRLB。算法在信噪比为10 dB时达到较为稳定的效果, 且此时相较于AFoD算法, 精度提高25 dB左右。

在 $0 \sim 15$ dB的区间段中, 可以发现NSoD算法的重构精确度要高于CDoD算法。这主要是由于在NSoD算法谱峰搜索的网格密度可以进行调节, 因

算法3 NSoD方法伪代码

-
- 输入: 向量 e^{DCT} , 脉冲参数 K , 周期 τ , 矩阵束参数 M ;
 输出: 脉冲幅度参数 $\{a_k\}_{k=1}^K$, 时间延迟参数 $\{t_k\}_{k=1}^K$ 。
- (1) 利用 e^{DCT} 构建矩阵 C , 并通过奇异值分解获取其零空间向量 $\{v_i | 1 \leq i \leq M+1-2K\}$;
 - (2) 根据定理2构建向量 $e(\omega)$, 通过搜索式(35)的伪谱峰值, 获得信号的时间延迟参数;
 - (3) 根据式(16)求解含有共轭的时间延迟参数 $\{\tilde{t}_r\}_{r=1}^{2K}$;
 - (4) 根据算法1计算信号的参数 $\{t_k\}_{k=1}^K$ 以及 $\{a_k\}_{k=1}^K$ 。
-

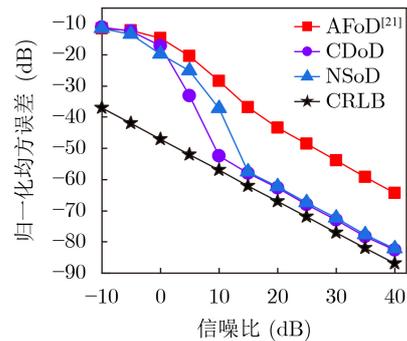


图2 时间延迟参数重构精度对比

此其参数估计的精度相较于CDoD算法会有所提高。随着信噪比的提高，二者重构效果趋于一致，但在高信噪比条件下，重构精度依然高于AFoD算法。

实验2 为了比较3种算法重构过程的稳定性，本实验采用如实验1所设置的实验条件。由图3可以看出，AFoD算法在低信噪比的情况下收敛性极差，大约在 $t = 0.62$ s处，还出现了一个显著的共轭聚集区。这种情况在CDoD算法与NSoD算法上得到了大大的缓解，其中CDoD算法的重构稳定性要好于NSoD。这是因为CDoD重构过程是完全解析的，并不需要参数搜索的过程。NSoD虽然可以压缩参数搜索网格的密度以获得高的重构精度，但是在噪声的干扰下会出现虚假谱峰的现象，这种现象并不严重，这也就是在图3(b)与图3(c)的比较中，NSoD会出现几个偏离准确值的异常值点，但是其在0~10 dB区间的精度要高于CDoD算法。

实验3 下面将要探讨在高息率的条件下，本文所提算法与经典FRI理论中利用傅里叶系数的谱估计算法的重构精度以及运算速度的对比。此处假设单位时间 τ 内含有 $K = 7$ 个脉冲信号，其中脉冲信号的时间延迟参数在周期内服从均匀分布，幅值参数为 $a_k = 1$ 。由于NSoD方法中存在谱峰搜索的步骤，因此为了仅仅对比谱估计算法中特征值分

解一步的运算效率，本实验提出使用CDoD算法与经典的ESPRIT (Estimating Signal Parameter via Rotational Invariance Techniques)算法^[16]进行对比。在参数估计精度的验证方面，采样点数为 $N = 141$ ，因此滤波器带宽为 $B = 70$ Hz。如图4(a)所示，由于傅里叶系数实部Toeplitz矩阵的规模更大，因此噪声空间的特征值更多，在相同的噪声能量水平下，每个特征值量级会更小^[29]。这样会使得傅里叶系数实部的参数估计精度曲线的“截断下降”点相应提前^[30]。CDoD算法在高信噪比的条件下与ESPRIT算法保持同样水平的重构精度，虽然在低信噪比阶段ESPRIT算法的重构精度相对更高，这主要是由于傅里叶系数所含的信息量高于其实部，会相应提升其在低信噪比阶段的性能。尽管如此，本文所提使用傅里叶系数实部的参数估计方法仍然能够保持与经典ESPRIT方法近乎一致的能力。

在算法运行时间方面，本文使用的PC是Intel(R) Core i7-8700，CPU频率为3.2 GHz，且RAM内存为16 GB，整个仿真算法在同样的仿真软件上进行运算。本文假设仿真信号在无噪声环境下，且采样点数设置为 $N \cdot K$ ， $N = 5, 10, \dots, 50$ ，因此本文所提去共轭方法可以近似为最小二乘方法，且只需要运算1次。本文并不考虑参数匹配阶段的运行时间消

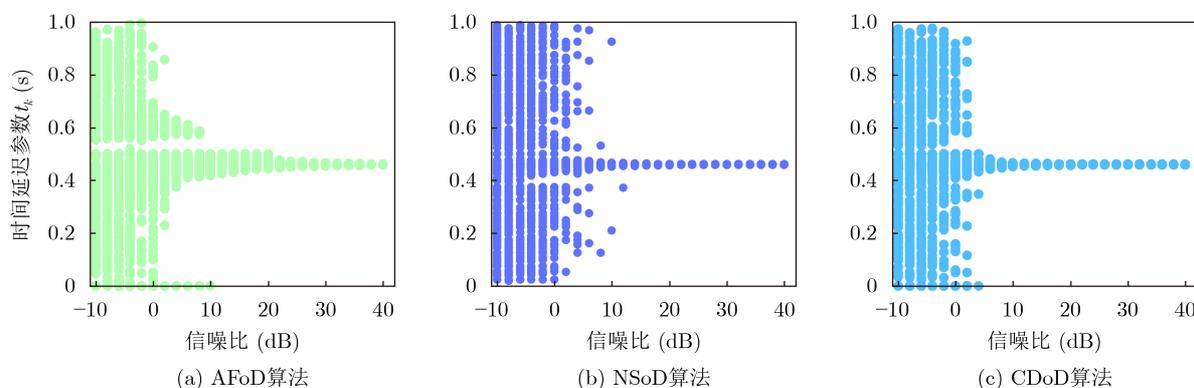


图3 3种针对傅里叶系数实部的谱估计算法稳定性比较

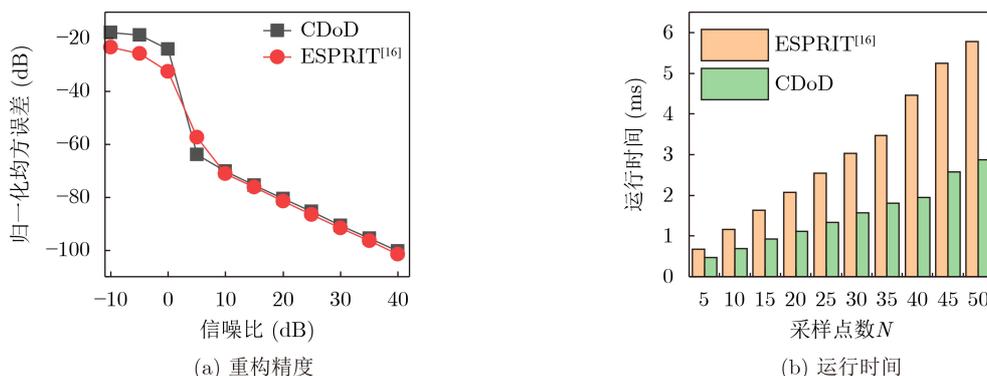


图4 ESPRIT与CDoD算法的重构精度及运行时间对比

耗,只考虑奇异值分解需要的运算时间。由图4(b)可知,本文所提算法的运行时间大大降低,相较于ESPRIT算法,运行时间缩短1/2。

5 结束语

本文针对脉冲流的欠采样问题,从傅里叶系数实部的协方差矩阵的旋转不变特性与测量值矩阵的零空间特性出发,提出了基于离散余弦变换的CDoD与NSoD两种参数估计算法。与经典的FRI谱估计算法相比,本文提出的方法不仅提升了Toeplitz矩阵特征值分解的效率,而且保持了高的参数估计精度,在工程领域中具有巨大的应用潜力。

参考文献

- [1] UNSER M. Sampling-50 years after Shannon[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2000, 88(4): 569–587. doi: 10.1109/5.843002.
- [2] 陈鹏, 孟晨, 王成. 基于高度冗余Gabor框架的欠Nyquist采样系统子空间探测[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(12): 2877–2884. doi: 10.11999/JEIT150327.
CHEN Peng, MENG Chen, and WANG Cheng. Subspace detection of sub-Nyquist sampling system based on highly redundant Gabor frames[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(12): 2877–2884. doi: 10.11999/JEIT150327.
- [3] 张素玲, 席峰, 陈胜焱, 等. 基于正交压缩采样系统的脉冲雷达回波信号实时重构方法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1064–1071. doi: 10.11999/JEIT150767.
ZHANG Suling, XI Feng, CHEN Shengyao, et al. A real-time reconstruction scheme of pulsed radar echoes with quadrature compressive sampling[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1064–1071. doi: 10.11999/JEIT150767.
- [4] QI Peihan, LI Zan, LI Hongbin, et al. Blind sub-Nyquist spectrum sensing with modulated wideband converter[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2018, 67(5): 4278–4288. doi: 10.1109/TVT.2018.2794779.
- [5] TUR R, ELDAR Y C, and FRIEDMAN Z. Innovation rate sampling of pulse streams with application to ultrasound imaging[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1827–1842. doi: 10.1109/TSP.2011.2105480.
- [6] TARAR M O and KHALID Z. Reconstruction of finite rate of innovation spherical signals in the presence of noise using deep learning architecture[C]. 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Amsterdam, Netherlands, 2021: 1487–1491. doi: 10.23919/Eusipco47968.2020.9287581.
- [7] HUANG Guoxing, YANG Zeming, LU Weidang, et al. Sub-Nyquist sampling of ECG signals based on the extension of variable pulsewidth model[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, 71: 6501114. doi: 10.1109/TIM.2022.3144213.
- [8] DA COSTA M F and CHI Yuejie. Compressed super-resolution of positive sources[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, 28: 56–60. doi: 10.1109/LSP.2020.3045343.
- [9] HUANG Guoxing, CHEN Linlin, LU Weidang, et al. FRI sampling of parametric signals with non-ideal Sinc kernel[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2021, 68(10): 3361–3365. doi: 10.1109/TCSII.2021.3070159.
- [10] 王亚军, 李明, 刘高峰. 复杂脉冲序列的有限新息率采样方法[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(7): 1606–1611. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01329.
WANG Yajun, LI Ming, and LIU Gaofeng. Sampling complex pulse streams with finite rate of innovation methods[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(7): 1606–1611. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.01329.
- [11] VETTERLI M, MARZILIANO P, and BLU T. Sampling signals with finite rate of innovation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(6): 1417–1428. doi: 10.1109/TSP.2002.1003065.
- [12] QIU Tianyu, LIAO Wenjing, HUANG Yihui, et al. An automatic denoising method for NMR spectroscopy based on low-rank Hankel model[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2021, 70: 6010612. doi: 10.1109/TIM.2021.3109743.
- [13] SIMEONI M, BESSON A, HURLEY P, et al. CPGD: Cadzow plug-and-play gradient descent for generalised FRI[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 69: 42–57. doi: 10.1109/TSP.2020.3041089.
- [14] GONG Yu, XIAO Shaoqiu, and WANG Bingzhong. Synthesis of sparse planar arrays with multiple patterns by the generalized matrix enhancement and matrix pencil[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2021, 69(2): 869–881. doi: 10.1109/TAP.2020.3016484.
- [15] HU Yonggang, ABHAYAPALA T D, and SAMARASINGHE P N. Multiple source direction of arrival estimations using relative sound pressure based MUSIC[J]. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*, 2021, 29: 253–264. doi: 10.1109/TASLP.2020.3039569.
- [16] LONG Wenxuan, CHEN Rui, MORETTI M, et al. AoA estimation for OAM communication systems with mode-frequency multi-time ESPRIT method[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021, 70(5): 5094–5098. doi: 10.1109/TVT.2021.3070358.
- [17] 王亚军, 李明, 刘高峰. 基于改进指数再生采样核的有限新息率采样系统[J]. *电子与信息学报*, 2013, 35(9): 2088–2093. doi:

- 10.3724/SP.J.1146.2013.00059.
- WANG Yajun, LI Ming, and LIU Gaofeng. Finite rate of innovation sampling system based on modified exponential reproducing sampling kernel[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(9): 2088–2093. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00059.
- [18] KIM J H, MAMOU J, KOUAMÉ D, *et al.* Autoregressive model-based reconstruction of quantitative acoustic maps from RF signals sampled at innovation rate[J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2020, 6: 993–1006. doi: 10.1109/TCL.2020.3000086.
- [19] NAAMAN H, MULLETI S, and ELDAR Y C. FRI-TEM: Time encoding sampling of finite-rate-of-innovation signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2022, 70: 2267–2279. doi: 10.1109/TSP.2022.3167146.
- [20] MULLETI S and SEELAMANTULA C S. Paley-wiener characterization of kernels for finite-rate-of-innovation sampling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(22): 5860–5872. doi: 10.1109/TSP.2017.2733484.
- [21] NAGESH S, MULLETI S, and SEELAMANTULA C S. On the role of the Hilbert transform in boosting the performance of the annihilating filter[C]. 2014 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Florence, Italy, 2014: 1836–1840. doi: 10.1109/ICASSP.2014.6853916.
- [22] BARROS B and JOHNSON B D. Sparse recovery using the discrete cosine transform[J]. *The Journal of Geometric Analysis*, 2021, 31(9): 8991–8998. doi: 10.1007/s12220-020-00574-0.
- [23] FU Ning, HUANG Guoxing, QIAO Liyan, *et al.* Sub-Nyquist sampling and recovery of pulse streams with the real parts of fourier coefficients[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 22667–22677. doi: 10.1109/ACCESS.2017.2763421.
- [24] CHI Yuejie and DA COSTA M F. Harnessing sparsity over the continuum: atomic norm minimization for superresolution[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2020, 37(2): 39–57. doi: 10.1109/MSP.2019.2962209.
- [25] ZHAO Yijiu, HU Yuheng, and WANG Houjun. Enhanced random equivalent sampling based on compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2012, 61(3): 579–586. doi: 10.1109/TIM.2011.2170729.
- [26] FISCHER J V, ROMMEL T, and STENS R L. Poisson’s summation formula in radar imaging[C]. 13th European Conference on Synthetic Aperture Radar, Zurich, Switzerland, 2021: 1–6.
- [27] BLU T, DRAGOTTI P L, VETTERLI M, *et al.* Sparse sampling of signal innovations[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 31–40. doi: 10.1109/MSP.2007.914998.
- [28] HEREDIA-JUESAS J, MOLAEI A, TIRADO L, *et al.* Consensus and sectioning-based ADMM with norm-1 regularization for imaging with a compressive reflector antenna[J]. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, 2021, 7: 1189–1204. doi: 10.1109/TCL.2021.3124360.
- [29] MECKES M W. On the spectral norm of a random Toeplitz matrix[J]. *Electronic Communications in Probability*, 2007, 12(2): 315–325. doi: 10.1214/ECP.v12-1313.
- [30] WEI Xiaoyao and DRAGOTTI P L. Guaranteed performance in the FRI setting[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(10): 1661–1665. doi: 10.1109/LSP.2015.2411154.
- 云双星: 男, 博士生, 研究方向为有限新息率采样理论、欠奈奎斯特采样等。
- 徐红伟: 男, 博士后, 研究方向为自动驾驶数据采集、FPGA硬件加速计算等。
- 付宁: 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为信息域采样理论及技术、稀疏信号处理及压缩感知、智能信号处理、虚拟仪器技术、自动测试技术等。
- 乔立岩: 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为数据采集技术、大容量数据记录技术和测试信息处理等。

责任编辑: 余蓉