

非凸稀疏约束的多快拍压缩波束形成

丁飞龙^{①②③} 迟骋^{①②} 李宇^{*①②} 黄海宁^{①②}

^①(中国科学院声学研究所 北京 100190)

^②(中国科学院先进水下信息技术重点实验室 北京 100190)

^③(中国科学院大学 北京 100049)

摘要: 基于极小极大凹惩罚函数约束的压缩感知波束形成, 相对于传统 l_1 范数的压缩波束形成来说, 可以增强信号的稀疏性, 获得更精确的波达方向估计。然而, 该算法在强噪声背景下, 方位估计结果不稳定。针对这个问题, 该文提出一种基于极小极大凹惩罚函数约束的多快拍压缩感知波束形成(MCP-MCSBF)算法。通过多个快拍的联合处理, 提供更好的抗噪性能和更精准的波达方向估计结果。仿真结果表明与其他多快拍波达方向估计算法相比, 该文算法提供了更优的精确性和更高的角度分辨率, 湖试结果则进一步验证了所提算法的有效性。

关键词: 波达方向估计; 压缩波束形成; 极小极大凹惩罚函数; 多快拍

中图分类号: TN929.3; TB565

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)06-2071-09

DOI: 10.11999/JEIT220017

Multiple-snapshot Compressive Beamforming with Non-convex Sparse Constraints

DING Feilong^{①②③} CHI Cheng^{①②} LI Yu^{①②} HUANG Haining^{①②}

^①(The Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^②(Key Laboratory of Science and Technology on Advanced Underwater Acoustic Signal Processing, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

^③(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Compressive beamforming based on the minimax-concave penalty function constraint, compared with the traditional l_1 norm compressive beamforming, can enhance the sparsity of the signal and obtain a more accurate Direction Of Arrival (DOA) estimation. However, under the background of strong noise, the azimuth estimation result of this algorithm is unstable. In response to this problem, a Multiple-Snapshot Compressed sensing BeamForming based on the constraint of the Minimax Concave Penalty (MCP-MCSBF) function is proposed. Through the joint processing of multiple snapshots, it provides better anti-noise performance and more accurate direction of arrival estimation results. The simulation results show that compared with other multi-snapshot direction of arrival estimation algorithms, the proposed algorithm provides better accuracy and higher angular resolution. The lake test results verify further the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Direction Of Arrival (DOA) estimation; Compressive beamforming; Minimax-concave penalty function; Multiple-snapshot

1 引言

基于压缩感知(Compressive Sensing, CS)理论的波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计方法, 在近十年里相当流行, 该方法最早由Malioutov

等人^[1]提出。相对于离散化的方位角数目来说, 感兴趣的信源数目是少量的。基于这个事实, DOA估计被描述成了一个具有稀疏约束的欠定线性系统, 称为压缩波束形成(CompreSsive BeamForming, CSBF)^[2]。与传统的常规波束形成(Conventional BeamForming, CBF)相比, CSBF即使在单快拍下也具有稳健的高分辨率精度。因此, CSBF被广泛应用于地震波反演、声学、雷达以及无线通信等领域。

CSBF的经典策略是施加 l_1 范数的稀疏约束^[3],

收稿日期: 2022-01-06; 改回日期: 2022-05-24; 网络出版: 2022-05-26

*通信作者: 李宇 ly@mail.ioa.ac.cn

基金项目: 国家自然科学基金(62001469)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (62001469)

因为在稀疏信号处理中 l_1 范数具有特殊的意义,它是 l_0 范数的凸松弛近似,并且凸问题的可靠求解相对容易^[4]。然而,自然的稀疏度量仍是 l_0 范数,使用 l_1 范数近似,会导致由于稀疏性不足,使得CSBF的性能下降^[5]。使用非凸的惩罚函数约束,具有比 l_1 范数更强的稀疏性,可以提高算法的性能^[6,7]。但是,非凸的惩罚函数在求解过程中需要解决一系列的平滑问题,不能直接最小化惩罚函数,可能出现局部最小化问题^[8]。为了增强稀疏性且同时避免局部最小化问题,Selesnick^[9]提出一种极小极大凹惩罚(Minimax Concave Penalty, MCP)函数,在趋近 l_0 范数稀疏性的同时保持了整体惩罚函数的凸性质。Yang等人^[10]将MCP函数应用到CSBF中,并证明了其优于 l_1 范数约束方法的强大性能。

然而在低信噪比下,文献^[10]的算法DOA估计性能不佳,多快拍联合估计可以提高低信噪比下的DOA估计结果。传统多快拍方法,如最小方差无失真方法(Minimum Variance Distortion-less Response, MVDR)^[11]和多重信号分类方法(Multiple Signal Classification, MUSIC)^[12]等,对快拍的数量有着最低限制,且在低信噪比下性能不佳。基于 l_1 范数的多快拍压缩波束形成(Multiple Snapshot Compressive Beamforming based on l_1 norm, l_1 -MCSBF)^[13]虽然对快拍数没有要求,但在低信噪比下,由于稀疏性不足,会导致伪源的产生。

基于MCP约束的多快拍压缩波束形成(Multiple Snapshot Compressive Beamforming based on MCP, MCP-MCSBF)可以提供比 l_1 -MCSBF的更好的性能。但是,求解MCP-MCSBF的困难在于需要证明MCP-MCSBF具备整体凸性质的前提条件,因为MCP函数本身是非凸的,只有满足整体凸性质,才能收敛到全局最小值,这也是其与其他非凸稀疏约束相比的优势所在。另外,类似文献^[11]的常规多快拍压缩波束形成求解方法,是对每一个快拍单独处理并将结果求均值,其计算成本随着快拍数目的增大而增大。

因此对于上述问题,本文的贡献在于证明了MCP-MCSBF的整体凸性质条件,提出了一种低计算成本的MCP-MCSBF求解方法,实现了增强稀疏性的同时,在低信噪比情况下获得更稳定的DOA估计结果。本文提出的MCP-MCSBF首先对阵列接收的观测矩阵数据进行SVD分解,并将其投影到信号子空间上;然后再根据Boyd等人^[14]的凸优化理论,将投影后的观测矩阵所有列加权叠加成一个新的向量;最后,再将这个新的向量代入计算,得出精确的DOA估计结果。

2 单快拍 DOA估计

2.1 信号模型

为了便于叙述,本文考虑远场理想均匀水平线阵模型。假设已知声速为1500 m/s,存在 K 个未知窄带源 $s_k, k \in \{1, 2, \dots, K\}$ 从不同的方向角度入射。水平线阵阵元数为 M 。从源到每一个阵元的传播延迟由转向矢量描述, $\mathbf{a}(\theta_k) = [1, e^{j(2\pi/\lambda)d_1 \sin \theta_k}, e^{j(2\pi/\lambda)d_2 \sin \theta_k}, \dots, e^{j(2\pi/\lambda)d(M-1) \sin \theta_k}]^T$, d 为两个相邻阵元间距, λ 表示波长, θ_k 代表第 k 个源的角度。

令阵列观测信号为 \mathbf{y} , 并同样定义源信号 \mathbf{s} 与加性噪声信号 \mathbf{n} , 就可以将阵列观测信号建模为

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\theta_k) \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中, 矩阵 $\mathbf{A}(\theta_k) = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_k)]$ 称为阵列流形矩阵。将感兴趣的角度空间 $\theta_i \in [-90^\circ, 90^\circ]$ 分解为 N 个可能的源方向, 通常 $N \gg K$ 。因此, 源的数目是稀疏的, DOA估计问题就转化成稀疏重构问题

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{s}\|_2^2 + \varepsilon \|\mathbf{s}\|_1 \quad (2)$$

其中, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\varepsilon \geq 0$ 是控制稀疏程度与拟合度的均衡。目前解决式(2)的方法有很多, 包括快速迭代收缩阈值算法(Fast Iterative Shrinkage Thresholding Algorithm, FISTA)^[15], 利用MATLAB中的CVX工具箱的内点法求解^[16]等。但是, l_1 范数是 l_0 范数一种非常松散的近似, 所描述的稀疏结构并不令人满意, 而稀疏性更强的非凸惩罚函数约束容易陷入局部最小化问题, 所以有必要引入一个更加稀疏, 且整体保持凸函数性质的惩罚函数。

2.2 非凸稀疏约束的压缩波束形成

MCP函数是由Huber函数^[17]的一个多元推广来定义的^[9]。其公式表达如式(3)所示

$$\phi_{\Sigma}(\mathbf{s}; \mathbf{u}) = \|\mathbf{s}\|_1 - \min_{\mathbf{u}} \left\{ \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{1}{2} \|\Sigma(\mathbf{s} - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \quad (3)$$

其中, \mathbf{s} 表示需要重构源信号向量, \mathbf{u} 表示引入的辅助变量, Σ 为加权矩阵。将高维MCP函数 $\phi_{\Sigma}(\mathbf{s}; \varepsilon)$ 引入式(2), 就得到了基于MCP函数约束的压缩感知波束形成模型

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A} \mathbf{s}\|_2^2 + \varepsilon \|\mathbf{s}\|_1 - \min_{\mathbf{u}} \left\{ \varepsilon \|\mathbf{u}\|_1 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Sigma \mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \quad (4)$$

MCP函数 $\phi_{\Sigma}(\mathbf{s}; \mathbf{u})$ 是非凸的, 因此可以比 l_1 范数提供 stronger 的稀疏性约束。根据参考文献^[9], 当加权矩阵 Σ 满足 $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 时, 式(4)的模型是凸的, 通常加权矩阵 Σ 设置为 $\Sigma = \sqrt{\gamma/\varepsilon} \mathbf{A}$ 。其中, $0 \leq \gamma \leq 1$ 是一个常数, 实际中常使用 $0.5 \leq \gamma \leq 0.8$ 。

将设置的固定加权矩阵 $\Sigma = \sqrt{\gamma/\varepsilon}\mathbf{A}$ 代入式(4), 可得

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 + \varepsilon \|\mathbf{s}\|_1 + \max_{\mathbf{u}} \left\{ -\varepsilon \|\mathbf{u}\|_1 - \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \quad (5)$$

式(5)具有凹凸结构, 因此它在鞍点 $(\mathbf{s}^*, \mathbf{u}^*)$ 处具有最优的估计。本文提出基于块近端梯度下降算法框架^[18]的方法解决这个问题, 实际上是两个FISTA变种, 核心的思想是保持一个变量不变的同时, 优化另一个变量。因此需要保持变量 \mathbf{s} 不变, 首先优化 \mathbf{u}

$$\mathbf{u}^{q+1} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left\{ -\varepsilon \|\mathbf{u}\|_1 - \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{s}^q - \mathbf{u})\|_2^2 \right\} \quad (6)$$

其中, q 表示迭代次数。式(6)可以改写为

$$\mathbf{u}^{q+1} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left\{ -\frac{\gamma}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^q - \mathbf{A}^H \mathbf{A}(\mathbf{s}^q - \mathbf{u}^q)/\mathbf{L}_u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{\gamma \mathbf{L}_u} \|\mathbf{u}\|_1 \right\} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{L}_u = \|\mathbf{A}^H \mathbf{A}\|$ 是关于变量 \mathbf{u} 利普希茨常数^[10]。为了加快收敛, 参照FISTA算法^[15]将变量 \mathbf{u} 的迭代重新设计为 $\tilde{\mathbf{u}}^q = \mathbf{u}^q + w_u^q(\mathbf{u}^q - \mathbf{u}^{q-1})$, 并代入式(7)中可得

$$\mathbf{u}^{q+1} = \arg \max_{\mathbf{u}} \left\{ -\frac{\gamma}{2} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}^q - \mathbf{A}^H \mathbf{A}(\mathbf{s}^q - \tilde{\mathbf{u}}^q)/\mathbf{L}_u\|_2^2 - \frac{\varepsilon}{\gamma \mathbf{L}_u} \|\mathbf{u}\|_1 \right\} \quad (8)$$

因此, 式(8)的解表示为^[19]

$$\mathbf{u}^{q+1} = \text{soft} \left(\frac{\mathbf{L}_u \tilde{\mathbf{u}}^q + \mathbf{A}^H \mathbf{A}(\mathbf{s}^q - \tilde{\mathbf{u}}^q)}{\mathbf{L}_u}; \frac{\varepsilon}{\gamma \mathbf{L}_u} \right) \quad (9)$$

接下来保持变量 $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{q+1}$ 不变, 类似地优化变量 \mathbf{s}

$$\mathbf{s}^{q+1} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 + \varepsilon \|\mathbf{s}\|_1 - \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{s} - \mathbf{u}^q)\|_2^2 \quad (10)$$

对优化变量 \mathbf{s} 执行类似变量 \mathbf{u} 的操作可得

$$\mathbf{s}^{q+1} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{\varepsilon}{\mathbf{L}_s} \|\mathbf{s}\|_1 + \frac{1}{2} \left\| \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}^q + \frac{\mathbf{A}^H(\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{s}}^q + \gamma(\mathbf{u}^q - \tilde{\mathbf{s}}^q)) - \mathbf{y})}{\mathbf{L}_s} \right\|_2^2 \quad (11)$$

其中, $\mathbf{L}_s = (1 - \gamma) \|\mathbf{A}^H \mathbf{A}\|$ 表示变量 \mathbf{s} 的利普希茨常数, $\tilde{\mathbf{s}}^q = \mathbf{s}^q + w_s^q(\mathbf{s}^q - \mathbf{s}^{q-1})$ 是变量 \mathbf{s} 迭代的外推点。同上可得, 式(11)的解表示为

$$\mathbf{s}^{q+1} = \text{soft} \left(\tilde{\mathbf{s}}^q - \frac{\mathbf{A}^H(\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{s}}^q + \gamma(\mathbf{u}^q - \tilde{\mathbf{s}}^q)) - \mathbf{y})}{\mathbf{L}_s}; \frac{\varepsilon}{\mathbf{L}_s} \right) \quad (12)$$

根据参考文献^[15]的加速策略, 上文所提到的权值 w_u^q 和 w_s^q 可以被迭代的设置为

$$w_u^q = \min \left\{ w_u^q, \sqrt{\mathbf{L}_u} \right\}, w_s^q = \min \left\{ w_s^q, \sqrt{\mathbf{L}_s} \right\} \quad (13)$$

并且, 权值 w^q 的更新迭代遵循初始值 $t_0 = 1$ 时

$$t_q = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4t_{q-1}^2} \right), w^k = (t_{q-1} - 1)/t_q \quad (14)$$

因为MCP函数的整体凸性质, 所以向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{s} 的初始值没有特别的限制, 这里都设置为 $\mathbf{0}$ 向量。算法的迭代次数可以任意设置, 迭代的停止一个简单规则是利用两个相邻迭代向量的变化, $\|\mathbf{s}^{q+1} - \mathbf{s}^q\|_2 / \|\mathbf{s}^q\|_2 \leq \text{tol}$, 其中, tol 为一个较小的常数。具体的算法步骤如表1所示。

3 多快拍DOA估计

使用多次观测数据的联合DOA估计, 比单快拍具有更稳定的估计结果^[20]。本文近似地认为源信号的DOA在连续的多个快拍数据里都是相同的。将阵列接收到的多快拍测量数据建模成一个矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (15)$$

其中, L 表示快拍数目, $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 为噪声矩阵, 矩阵 $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N \times L}$, $\mathbf{S} = [s(1), s(2), \dots, s(L)]$ 表示出相同的行稀疏性。

对多快拍观测数据矩阵 $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 进行SVD分解^[21]可得

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{B}\mathbf{V}^H \quad (16)$$

其中, \mathbf{U} 表示 $M \times M$ 的正交矩阵, \mathbf{B} 表示对角线上具有非负实数的对角线 $M \times L$ 矩阵, \mathbf{V} 表示 $L \times L$ 的正交矩阵。通过估计 \mathbf{B} 中较大的奇异值个数 \hat{K} , 并且

表 1 基于MCP函数约束的压缩波束形成算法步骤

输入: 观测数据 \mathbf{y} , 参数 ε , 超参数 γ , 最大迭代次数 Q , 终止条件 $\text{tol} = 10^{-3}$ 。参数向量 $t_0 = 1$, \mathbf{u}^0 和 \mathbf{s}^0 的初始值均设为 $\mathbf{0}$ 向量, 且 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1$, $\mathbf{s}^0 = \mathbf{s}^1$ 。

- (1) 当 $q \leq Q$ 时:
 - (2) 根据式(14)和式(13)更新 w_u^q ,
 - (3) 获得变量 $\tilde{\mathbf{u}}^q$, 并按照式(9)更新变量为 \mathbf{u}^{q+1} ,
 - (4) 根据式(14)和式(13)更新 w_s^q ,
 - (5) 同理获得变量 $\tilde{\mathbf{s}}^q$, 并按照式(12)更新变量为 \mathbf{s}^{q+1} 。
 - (6) 如果 \mathbf{s}^{q+1} 和 \mathbf{s}^q 的变化 $\leq \text{tol}$:
 - (7) 那么停止迭代, 且最优估计 $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}^{q+1}$,
 - (8) 找到 \mathbf{s}^* 的峰值, 并将其对应到DOA估计的角度 θ^* 。
 - (9) 结束
 - (10) 结束
- 输出: DOA估计的角度 θ^* 。

得到 \mathbf{V} 中与奇异值对应的信号子空间 $\mathbf{V}_{\hat{K}} = [\mathbf{V}(1), \mathbf{V}(2), \dots, \mathbf{V}(\hat{K})]$ 。因为噪声与信号子空间正交, 通过正交投影, 从而将多快拍观测数据矩阵截断, 得到降噪后的观测矩阵 $\mathbf{Y}_{\hat{K}} \in \mathbb{C}^{M \times \hat{K}}$

$$\mathbf{Y}_{\hat{K}} = \mathbf{Y}\mathbf{V}\mathbf{D}_{\hat{K}} = \mathbf{Y}\mathbf{V}_{\hat{K}} \quad (17)$$

其中, $\mathbf{D}_{\hat{K}} = [\mathbf{I}_{\hat{K}} \mathbf{0}]^T$, $\mathbf{I}_{\hat{K}}$ 是 $\hat{K} \times \hat{K}$ 的单位阵。

此时基于MCP约束的多快拍压缩波束形成的模型可以表示为

$$\hat{\mathbf{S}}_{\hat{K}} = \arg \min_{\mathbf{S}_{\hat{K}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{\text{F}}^2 + \varepsilon \phi_{\Sigma}(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}}) \quad (18)$$

其中, $\phi_{\Sigma}(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}}) = \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} - \min_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1} + 1/2 \|\Sigma(\mathbf{S}_{\hat{K}} - \mathbf{U}_{\hat{K}})\|_{\text{F}}^2 \right\}$ 。那么式(18)可以进一步写成

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{K}} = \arg \min_{\mathbf{S}_{\hat{K}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{\text{F}}^2 + \varepsilon \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} \\ - \varepsilon \min_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1} + \frac{1}{2} \|\Sigma(\mathbf{S}_{\hat{K}} - \mathbf{U}_{\hat{K}})\|_{\text{F}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

显然 $\phi_{\Sigma}(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}})$ 是非凸的, 所以式(19)也是非凸的。为了消除局部最小值, 保证式(19)的整体凸性质, 定理1给出了约束条件。

定理1 定义函数 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}}) = 1/2 \|\mathbf{Y}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{\text{F}}^2 + \varepsilon \phi_{\Sigma}(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}})$, 当加权矩阵 Σ 满足 $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 时, $\mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}})$ 是凸函数。

证明 由式(19)可知, $\mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}})$ 可以写成

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}}) = \max_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{\text{F}}^2 + \varepsilon \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} \right. \\ \left. - \varepsilon \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1} - \frac{\varepsilon}{2} \|\Sigma(\mathbf{S}_{\hat{K}} - \mathbf{U}_{\hat{K}})\|_{\text{F}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

根据 $\|\cdot\|_{\text{F}}^2$ 的计算公式, 可以将式(20)中的矩阵 \mathbf{F} 范数转化为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}}) = \max_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\hat{K}} \|\mathbf{y}_j - \mathbf{A}\mathbf{s}_j\|_2^2 \right. \\ \left. + \varepsilon \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} - \varepsilon \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1} \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=1}^{\hat{K}} \|\Sigma(\mathbf{s}_j - \mathbf{u}_j)\|_2^2 \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

对于向量 $\|\cdot\|_2$ 的计算公式, 式(21)可以转化为

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}}) = \max_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ \sum_{j=1}^{\hat{K}} \frac{1}{2} [(\mathbf{y}_j - \mathbf{A}\mathbf{s}_j)^T (\mathbf{y}_j - \mathbf{A}\mathbf{s}_j) \right. \\ \left. + \varepsilon (\Sigma(\mathbf{s}_j - \mathbf{u}_j))^T (\Sigma(\mathbf{s}_j - \mathbf{u}_j))] \right. \\ \left. + \varepsilon (\|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} - \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1}) \right\} \end{aligned} \quad (22)$$

将式(22)展开并合并同类项可得

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}}) = \sum_{j=1}^{\hat{K}} \frac{1}{2} \mathbf{s}_j^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \varepsilon \Sigma^T \Sigma) \mathbf{s}_j + \varepsilon \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} \\ + \max_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} G(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}}) \end{aligned} \quad (23)$$

其中, j 表示矩阵 $\mathbf{S}_{\hat{K}} \in \mathbb{C}^{N \times \hat{K}}$ 的第 j 个快拍, \hat{K} 是快拍数目。最后一项 $G(\mathbf{S}_{\hat{K}}; \mathbf{U}_{\hat{K}})$ 是 $\|\cdot\|_{\text{F}}^2$ 展开之后 $\mathbf{S}_{\hat{K}}$ 和 $\mathbf{U}_{\hat{K}}$ 的相关项, 它是一组凸函数的最大值^[22], 因此也是凸的。所以, 当条件 $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 满足时, 函数 $\mathbf{F}(\mathbf{S}_{\hat{K}})$ 是凸的。证毕

同2.2节, 将加权矩阵 Σ 设置为 $\Sigma = \sqrt{\gamma/\varepsilon} \mathbf{A}$, 式(23)可以改写为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{K}} = \arg \min_{\mathbf{S}_{\hat{K}}} \frac{1}{2} \|\mathbf{Y}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{\text{F}}^2 + \varepsilon \|\mathbf{S}_{\hat{K}}\|_{2,1} \\ + \max_{\mathbf{U}_{\hat{K}}} \left\{ -\varepsilon \|\mathbf{U}_{\hat{K}}\|_{2,1} - \frac{\gamma}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{S}_{\hat{K}} - \mathbf{U}_{\hat{K}})\|_{\text{F}}^2 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

显然, 可以参考2.2节的单快拍算法, 将式(24)看成两个交替求解的多快拍稀疏约束问题求解。但问题在于传统求解多快拍稀疏约束的算法, 如多快拍交替方向法(Multiple snapshots Alternate Direction Method, M-ADM)^[23]等, 本质上只是对每一个快拍单独运算并求和平均。这样的做法存在两个问题: (1)本质上仍未脱离单快拍运算的范畴, 只能一定程度上减少估计结果的误差, 对于高噪声环境下导致的稀疏约束能力不足, 从而产生的估计偏差, 并没有得到真正的解决; (2)计算成本与 \hat{K} 成正比。

本文提出MCP-MCSBF算法将降维后的观测矩阵 $\mathbf{Y}_{\hat{K}}$ 通过加权求和, 进一步表示成 $M \times 1$ 维向量 $\mathbf{y}_{\hat{K}}$, 然后将其代入单快拍求解算法中求解。且可以通过定理2证明, 当权数 $\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \dots + \hat{w}_{\hat{K}} = 1$, $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 时, 目标函数仍具备整体凸性质。

定理2 令加权向量 $\hat{\mathbf{w}} = [\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_{\hat{K}}]^T$, $\hat{w}_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, \hat{K}$, 定义

$$\mathbf{y}_{\hat{K}} = \mathbf{Y}_{\hat{K}} \hat{\mathbf{w}} = \hat{w}_1 \mathbf{Y}_1 + \hat{w}_2 \mathbf{Y}_2 + \dots + \hat{w}_{\hat{K}} \mathbf{Y}_{\hat{K}} \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{\hat{K}} = \arg \min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \|\hat{\mathbf{y}}_{\hat{K}} - \mathbf{A}\mathbf{s}\|_2^2 + \phi_{\Sigma}(\mathbf{s}; \varepsilon) \quad (26)$$

当且仅当 $\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \dots + \hat{w}_{\hat{K}} = 1$, $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 时, $\hat{\mathbf{s}}_{\hat{K}}$ 是整体凸的。

证明 首先由2.2节已知, 当 $\Sigma^T \Sigma \leq 1/\varepsilon \mathbf{A}^H \mathbf{A}$ 时, 式(4)中的目标函数 $\hat{\mathbf{s}}$ 是整体凸的; 其次, 定义集合 $\Omega = \{\mathbf{Y}_i, i = 1, 2, \dots, \hat{K}\}$, 同时集合 Ω 中的元素组合加权叠加可以表示为集合 Θ

$$\Theta = \left\{ \sum_{i=1}^{\hat{K}} \hat{w}_i \mathbf{Y}_i \mid \mathbf{Y}_i \in \Omega, \hat{w}_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, \hat{K} \right\} \quad (27)$$

根据文献[14]中1.1节第1部分可知, 当 $\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \dots + \hat{w}_{\hat{K}} = 1$ 时, 集合 Θ 是包含集合 Ω 的凸集, 因此 $\hat{\mathbf{s}}_{\hat{K}}$ 是整体凸的。证毕

本文所提MCP-MCSBF算法如表2所示。本文算法的收敛性证明可见文献[10,24], 因此这里不再重复说明。

4 仿真结果

本节主要探讨基于MCP约束的多快拍压缩波束形成的DOA估计性能。考虑了一个传感器数量 $M = 24$ 且半波长分离的均匀线性阵列, 源信号为载波频率3000 Hz的窄带信号, 噪声为服从高斯分布点的白噪声信号。传感矩阵 A 定义在一个间隔为 1° , 从 $-90^\circ \sim 90^\circ$ 的角度网格中, 并使用均方根误差(Root Mean Squared Error, RMSE)量化DOA估计的性能。

4.1 本文算法的性能

首先, 考虑单快拍与提出多快拍算法之间的性能对比。假设有3个能级相同的源信号, 它们的入射角分别为 $[-40^\circ, -15^\circ, 20^\circ]$ 。信噪比SNR=-10 dB, 快拍数分别设置为1和50, 算法的最大迭代次数 Q 设置为3000。图1展示了MCP约束的单快拍与多快拍压缩波束形成算法的性能。从图1(a)可以看

表2 MCP-MCSBF算法步骤

输入: 多快拍观测数据矩阵 \mathbf{Y} 。	
(1)	根据式(16)和式(17)计算降噪后的观测矩阵 $\mathbf{Y}_{\hat{K}}$,
(2)	构造加权向量 $\hat{\mathbf{w}}$, 满足 $\hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \dots + \hat{w}_{\hat{K}} = 1$,
(3)	根据式(25)计算 $\mathbf{y}_{\hat{K}}$,
(4)	将 $\mathbf{y}_{\hat{K}}$ 代入式(26)中得到全新的目标函数,
(5)	根据表1的算法得到DOA估计角度 θ^* 。
输出: DOA估计的角度 θ^* 。	

出, 由于较强噪声的存在, MCP约束的单快拍压缩波束形成算法产生了多个能量很强的伪源, 且DOA估计结果存在偏差, 估计性能较差。而MCP约束的多快拍压缩波束形成算法, 在准确定位了3个源信号入射角度的同时, 也不存在错误的峰值, 如图1(b)所示。

其次, 比较MCP约束的传统多快拍与提出多快拍压缩感知算法的性能。这里的传统多快拍压缩感知算法指的是, 通过对每一个快拍单独处理, 然后将结果求和平均的方法, 见文献[11,23]。仿真设置与上文相同, 仿真结果如图2所示。图2(a)展示了传统多快拍压缩感知算法的估计性能。由于该算法只是对每个快拍分别计算然后求和平均, 没有根本上解决强噪声背景下, 稀疏性不足的问题, 因此可以看到图2(a)中尽管估计出了准确的方位角度, 但是存在两个较强的伪源, 干扰了目标判断。图2(b)为提出多快拍算法的估计结果, 展示了稳健而精确的方位估计性能。

4.2 与传统多快拍DOA估计算法的性能对比

为了进一步验证MCP-MCSBF算法的性能。本文将其与CBF, MUSIC以及 l_1 -MCSBF对比。首先, 考察SNR为-10 dB下不同的算法的DOA估计结果。令3个能级相同的独立源信号, 入射角分别为 $[-4^\circ, 0^\circ, 20^\circ]$, 快拍数为50, 仿真结果如图3所示。在图3(a)和图3(b)中由于 -4° 和 0° 的两个源间隔较小, CBF和MUSIC均无法有效地区分这两个目标源; 而图3(c)中 l_1 -MCSBF虽然能够区分这两个目标源, 但由于 l_1 -MCSBF的稀疏性不足, 所以出现了许多的伪峰。MCP-MCSBF具有比 l_1 -MCSBF更强的稀疏性, 因此在图3(d)中, 不仅能区分间隔较近的两个目标源, 且除了估计的目标源外, 不存在别的伪峰。

其次, 分别考虑独立源和相干源情况。SNR从-10 dB变化到10 dB, 其余设置与上文相同, 每次均进行400次蒙特卡罗仿真模拟, 得到的RMSE

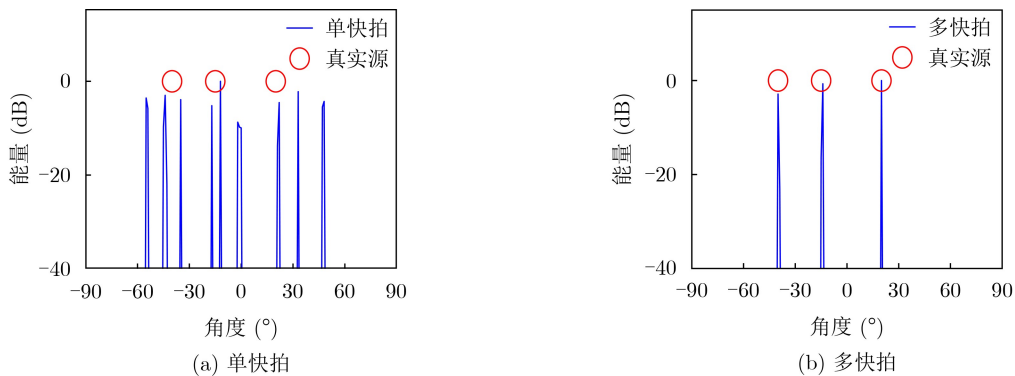


图1 信噪比-10 dB下的DOA估计结果

结果如图4所示。图4(a)表示独立源情况下RMSE随SNR变化的情况。可以看出,随着SNR的增大,这4种算法的DOA估计精度都逐渐提高。因为CBF波束宽度近似为 $102^\circ/M=4.25^\circ$,大于 -4° 和 0° 的两个源的角度间隔,所以CBF的估计精度要明显低于另外3种算法。MUSIC估计精度在高信噪比下较好,但在低信噪比下估计精度较差。 l_1 -MCSBF和MCP-MCSBF估计精度相似,但在低信噪比下MCP-MCSBF具备的估计精度更高。图4(b)表示相干源情况下RMSE随SNR变化的情况。由于MUSIC算法在估计DOA过程中,涉及接收信号协方差求逆,因此相干源会导致DOA估计精度大大降低。

CBF, l_1 -MCSBF以及MCP-MCSBF则不受相干源影响,仍具备很高的DOA估计精度。

然后,比较信噪比 -10 dB,快拍数从 $1\sim 100$ 变化下的DOA估计结果,如图4(c)所示。这里考虑到阵元个数为24,因此MUSIC算法的快拍起点为30快拍。图中所有算法的RMSE都随着快拍数增多而下降,但是可以清楚地看到本文提出的MCP-MCSBF在任何快拍下都要优于CBF, MUSIC以及 l_1 -MCSBF。

最后,从SNR和角度间隔两个方面考察不同算法的角度分辨率。对于不同算法的DOA估计结果,如果满足 $\sum_{k=1}^2 |\hat{\theta}_{ik} - \theta_{ik}^{\text{true}}| < |\theta_2^{\text{true}} - \theta_1^{\text{true}}|$,则

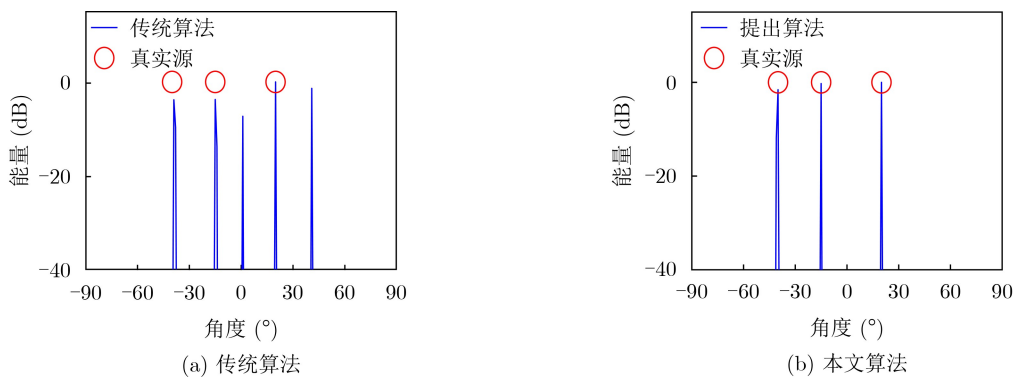


图2 信噪比 -10 dB下多快拍的DOA估计结果

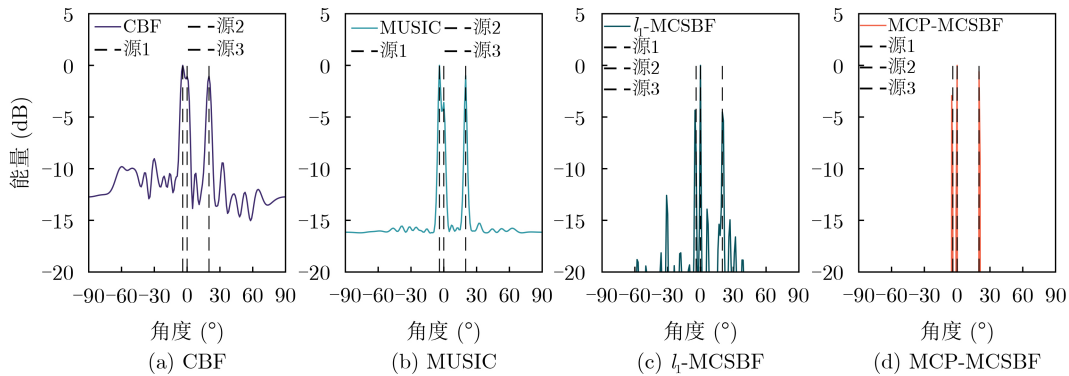


图3 -10 dB下不同算法的DOA估计结果对比

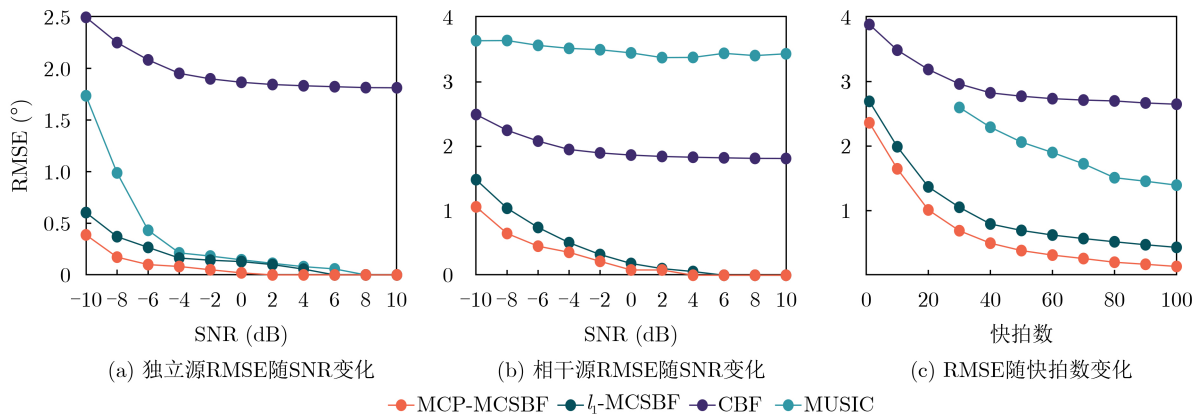


图4 不同算法的性能比较

认为成功区分了两个独立源，将成功分辨的次数比上蒙特卡罗仿真次数，得到成功分辨概率，可以用来表示算法的性能。

考虑SNR从-10 dB变化到10 dB，两个能级相同的独立源信号，入射角分别为 $[0^\circ, 5^\circ]$ ，快拍数为50，每次均进行400次蒙特卡罗仿真模拟。不同算法的成功分辨概率结果随SNR的变化如图5(a)所示。接下来考虑角度间隔 2° 从变化到 12° 的两个独立源，SNR为-10 dB。不同算法的成功分辨概率结果随角度间隔的变化如图5(b)所示。显然，当角度间隔较大时，所有算法的成功分辨概率都很高；但当角度间隔较小时，本文提出的MCP-MCSBF算法成功分辨概率要远优于其他4种算法。

5 实测数据结果

上文已经在仿真中验证了算法的性能，但是数值的模拟并不能代表真实的水下环境。本节展示算法在水下实测数据中的优良性能。采用湖试数据作为本文提出的MCP-MCSBF算法的实测数据。湖面声速为1500 m/s，由UUV平台搭载的舷侧均匀水平线阵接收数据，UUV航行深度在水下6 m，阵元数目为24个，阵元之间的距离为0.1875 m。此次试验中存在两个声源信号，一个是位于水下6 m处的静止声源信号，发射频率为1~4 kHz宽带噪声信号

号，另一个为水面运动的小艇发出的辐射声源，且小艇与静止声源之间存在交叉。将每秒的数据分为50快拍，使用全频带的信息进行DOA估计。

图6表示CBF, MUSIC以及 l_1 -MCSBF与MCP-MCSBF算法的时间方位历程图。图6(a)表示CBF的方位历程图，可以看出当两个声源逐渐接近时，由于CBF较宽的主瓣，将两个声源合并成了一个声源，且存在自噪声和干扰噪声的影响，导致目标声源不够突出；图6(b)表示已知精确的信号源个数这一先验信息下的MUSIC的方位历程图，MUSIC算法相对于CBF来说主瓣更窄，对自噪声和干扰噪声有了很好的抑制，因此目标声源更加突出，但是对背景噪声的抑制力不强，最低能量为-10 dB；图6(c)表示 l_1 -MCSBF的方位历程图，显然 l_1 -MCSBF相对于CBF以及MUSIC来说，在抑制自噪声和干扰噪声的同时，大大减弱了背景噪声，此时最低能量为-100 dB，增强了目标声源。但是由于稀疏性不足，所以方位历程图中存在较多的噪点；图6(d)表示MCP-MCSBF的方位历程图，与 l_1 -MCSBF相比，由于本文提出算法增强了稀疏性，因此图中存在的噪点很少。且与传统CBF和MUSIC算法相比，目标声源更加清晰，对背景噪声的抑制也更强，此时最低能量为-150 dB。

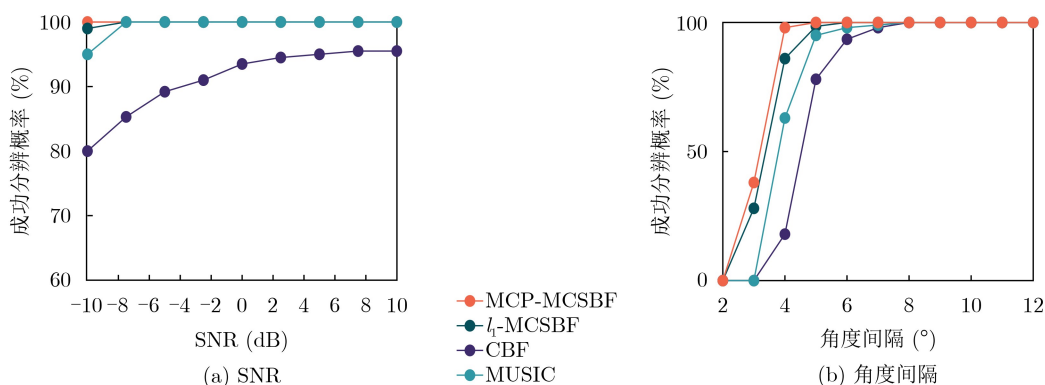


图5 成功分辨率随SNR和角度间隔的变化

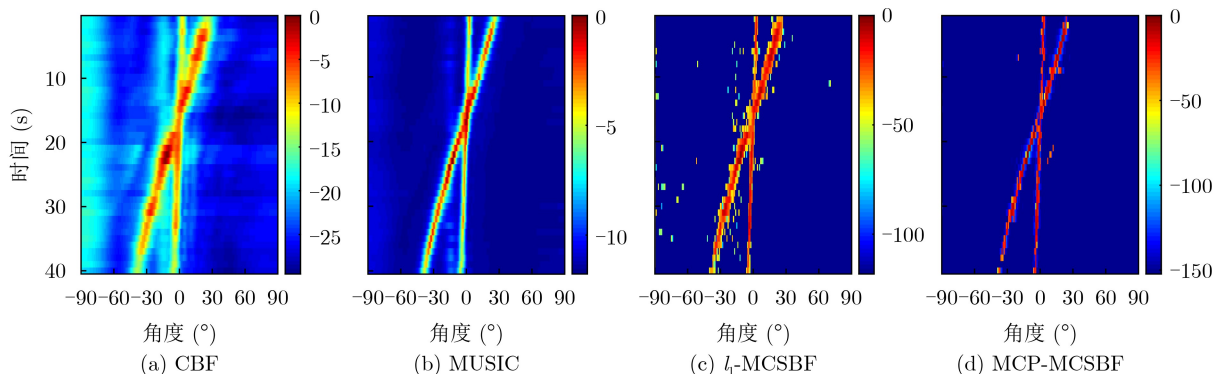


图6 方位历程图

通过湖试数据可以看出, 本文方法在噪声背景下保持着稳健的DOA估计性能, 抑制了旁瓣的产生; 同时由于较窄的主瓣宽度, 也提高了目标声源的分辨率, 在目标声源角度间隔较近时, 展现了良好的性能。

6 结论

本文提出一种基于MCP约束的多快拍压缩波束形成算法, 本方法通过非凸函数MCP提高了传统压缩波束形成算法的稀疏性, 且由于MCP的整体凸性质, 不存在局部最小值问题, 保证了DOA估计的可靠性; 同时利用多个快拍的数据联合估计, 提高了DOA估计的稳定性。仿真分析证明了本文算法与CBF, MUSIC以及 l_1 -MCSBF算法相比, 具有更优的精确性和更高的角度分辨率, 湖试结果也再一次证明了本文算法的有效性。

参 考 文 献

- [1] MALIOUTOV D, CETIN M, and WILLSKY A S. A sparse signal reconstruction perspective for source localization with sensor arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(8): 3010–3022. doi: [10.1109/TSP.2005.850882](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.850882).
- [2] WANG Shuo, CHI Cheng, JIN Shenglong, *et al.* Fast compressive beamforming with a modified fast iterative shrinkage-thresholding algorithm[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, 149(5): 3437–3448. doi: [10.1121/10.0004997](https://doi.org/10.1121/10.0004997).
- [3] XENAKI A, GERSTOFT P, and MOSEGAARD K. Compressive beamforming[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2014, 136(1): 260–271. doi: [10.1121/1.4883360](https://doi.org/10.1121/1.4883360).
- [4] BARANIUK R G, CANDLES E, ELAD M, *et al.* Applications of sparse representation and compressive sensing [scanning the issue][J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 906–909. doi: [10.1109/JPROC.2010.2047424](https://doi.org/10.1109/JPROC.2010.2047424).
- [5] SELESNICK I W and BAYRAM İ. Sparse signal estimation by maximally sparse convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(5): 1078–1092. doi: [10.1109/TSP.2014.2298839](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2298839).
- [6] QIAO Baijie, AO Chunyan, MAO Zhu, *et al.* Non-convex sparse regularization for impact force identification[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2020, 477: 115311. doi: [10.1016/j.jsv.2020.115311](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115311).
- [7] LIU Lutao and RAO Zejing. An adaptive Lp norm minimization algorithm for direction of arrival estimation[J]. *Remote Sensing*, 2022, 14(3): 766. doi: [10.3390/rs14030766](https://doi.org/10.3390/rs14030766).
- [8] TAUSIESAKUL B. Iteratively reweighted least squares minimization with nonzero index update[C]. 2021 Smart Technologies, Communication and Robotics (STCR), Sathyamangalam, India, 2021: 1–6. doi: [10.1109/STCR51658.2021.9588830](https://doi.org/10.1109/STCR51658.2021.9588830).
- [9] SELESNICK I. Sparse regularization via convex analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(17): 4481–4494. doi: [10.1109/TSP.2017.2711501](https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2711501).
- [10] YANG Yixin, DU Zhaohui, WANG Yong, *et al.* Convex compressive beamforming with nonconvex sparse regularization[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2021, 149(2): 1125–1137. doi: [10.1121/10.0003373](https://doi.org/10.1121/10.0003373).
- [11] SHAW A, SMITH J, and HASSANIEN A. MVDR beamformer design by imposing unit circle roots constraints for uniform linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2021, 69: 6116–6130. doi: [10.1109/TSP.2021.3121630](https://doi.org/10.1109/TSP.2021.3121630).
- [12] DIAS U V. Extremely sparse co-prime acquisition: Low latency estimation using MUSIC algorithm[C]. 2021 Sixth International Conference on Wireless Communications, Signal Processing and Networking (WiSPNET), Chennai, India, 2021: 225–229. doi: [10.1109/WiSPNET51692.2021.9419449](https://doi.org/10.1109/WiSPNET51692.2021.9419449).
- [13] GERSTOFT P, XENAKI A, and MECKLENBRÄUKER C F. Multiple and single snapshot compressive beamforming[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015, 138(4): 2003–2014. doi: [10.1121/1.4929941](https://doi.org/10.1121/1.4929941).
- [14] BOYD S and VANDENBERGHE L. *Convex Optimization*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2004: 23–25. doi: [10.1017/CBO9780511804441](https://doi.org/10.1017/CBO9780511804441).
- [15] BECK A and TEOULLE M. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2009, 2(1): 183–202. doi: [10.1137/080716542](https://doi.org/10.1137/080716542).
- [16] GRANT M C and BOYD S P. Graph Implementations for Nonsmooth Convex Programs[M]. BLONDEL V D, BOYD S P, and KIMURA H. Recent Advances in Learning and Control. London: Springer, 2008: 95–110. doi: [10.1007/978-1-84800-155-8_7](https://doi.org/10.1007/978-1-84800-155-8_7).
- [17] HUBER P J. Robust estimation of a location parameter[J]. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1964, 35(1): 73–101. doi: [10.1214/aoms/1177703732](https://doi.org/10.1214/aoms/1177703732).
- [18] XU Yangyang and YIN Wotao. Block stochastic gradient iteration for convex and nonconvex optimization[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2015, 25(3): 1686–1716. doi: [10.1137/140983938](https://doi.org/10.1137/140983938).

- [19] COMBETTES P L and PESQUET J C. Proximal Splitting Methods in Signal Processing[M]. BAUSCHKE H H, BURACHIK R S, COMBETTES P L, *et al.* Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering. New York: Springer, 2011: 185–212. doi: [10.1007/978-1-4419-9569-8_10](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9569-8_10).
- [20] TANG Wengen, JIANG Hong, and ZHANG Qi. One-bit gridless DOA estimation with multiple measurements exploiting accelerated proximal gradient algorithm[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2022, 41(2): 1100–1114. doi: [10.1007/s00034-021-01829-z](https://doi.org/10.1007/s00034-021-01829-z).
- [21] LI Ping, WANG Hua, LI Xuemei, *et al.* An image denoising algorithm based on adaptive clustering and singular value decomposition[J]. *IET Image Processing*, 2021, 15(3): 598–614. doi: [10.1049/ipr2.12017](https://doi.org/10.1049/ipr2.12017).
- [22] BAUSCHKE H H and COMBETTES P L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces[M]. Cham: Springer International Publishing, 2017: 413–447. doi: [10.1007/978-3-319-48311-5](https://doi.org/10.1007/978-3-319-48311-5).
- [23] LU Hongtao, LONG Xianzhong, and LV Jingyuan. A fast algorithm for recovery of jointly sparse vectors based on the alternating direction methods[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, 15(6): 461–469.
- [24] POCK T and SABACH S. Inertial proximal alternating linearized minimization (iPALM) for nonconvex and nonsmooth problems[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2016, 9(4): 1756–1787. doi: [10.1137/16M1064064](https://doi.org/10.1137/16M1064064).
- 丁飞龙：男，1996年生，博士生，研究方向为阵列信号处理。
迟 骋：男，1989年生，副研究员，研究方向为阵列信号处理。
李 宇：男，1977年生，研究员，研究方向为阵列信号处理。
黄海宁：男，1969年生，研究员，研究方向为阵列信号处理。

责任编辑：余 蓉