

一种有限脉冲响应滤波器格型结构优化方法及灵敏度分析

庄陵 张文静*

(重庆邮电大学通信与信息工程学院 重庆 400065)

(移动通信教育部工程研究中心 重庆 400065)

(移动通信技术重庆市重点实验室 重庆 400065)

摘要:有限脉冲响应(FIR)滤波器是无线通信研究中多载波调制系统的主要组成单元。针对有限字长效应导致FIR滤波器性能下降问题,该文提出一种FIR滤波器格型结构改善因量化导致的滤波器系数误差,即降低系数灵敏度,利用状态空间结构表示相应改进格型结构系数,并推导分析其系数灵敏度表达式。仿真实例验证理论推导结果,即改进格型结构系数灵敏度与采样周期相关。与传统格型结构相比,在量化字长和采样周期约束下,改进格型结构频响特性曲线更接近理想频响特性曲线,系数灵敏度更小,抗有限字长效应能力更好。

关键词:有限脉冲响应滤波器;有限字长;格型结构;状态空间;系数灵敏度

中图分类号: TN911.72

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)02-0686-08

DOI: [10.11999/JEIT210028](https://doi.org/10.11999/JEIT210028)

A Lattice Structure Optimization Method and Sensitivity Analysis of Finite Impulse Response Filter

ZHUANG Ling ZHANG Wenjing

(School of Communication and Information Engineering, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

(Engineering Research Center of Mobile Communications of the Ministry of Education, Chongqing 400065, China)

(Chongqing Key Laboratory of Mobile Communications Technology, Chongqing 400065, China)

Abstract: Finite Impulse Response(FIR) filter is the main component of multi-carrier modulation system in wireless communication research. Considering the problem of FIR filter performance degradation caused by the finite word length effect, an FIR filter lattice structure is proposed to optimize the filter coefficient error caused by quantization, that is, to reduce the coefficient sensitivity. The state space structure is used to express the corresponding improved lattice structure coefficients, and the coefficient sensitivity expression is derived and analyzed. The simulation results show that the sensitivity of the improved lattice structure coefficient is related to the sampling period. Compared with the traditional lattice structure, under the constraints of quantization word length and sampling period, the frequency response characteristic curve of the improved lattice structure is closer to the ideal frequency response characteristic curve, the coefficient sensitivity is smaller, and the ability of resisting finite word length effect is better.

Key words: Finite Impulse Response(FIR)filter; Finite word length; Lattice structure; State space; Coefficient sensitivity

1 引言

未来无线通信系统因其复杂性、多样化面临诸多挑战。由于正交频分复用(Orthogonal Fre-

quency Division Multiplexing, OFDM)已无法满足未来无线通信要求,因此其他多载波调制候选方案在学术界得到广泛研究,如滤波器组多载波调制(Filter Bank Multi-Carrier, FBMC)、子带滤波的正交频分复用(Filtered Orthogonal Frequency Division Multiplexing, F-OFDM)等。其中的原型滤波器即有限脉冲响应(Finite Impulse Response, FIR)滤波器,是多载波调制系统中合成和分析滤

收稿日期: 2021-01-08; 改回日期: 2021-04-16; 网络出版: 2021-04-29

*通信作者: 张文静 zhang_wenjing0818@163.com

基金项目: 中国电子科技集团公司第二十九研究所资助课题

Foundation Item: Project Supported by the 29th Research Institute of CETC

波器的主要组成部分^[1]。FIR滤波器有稳定性好、实现复杂度低和容易实现线性相位等特点，但在无限精度下设计的FIR原型滤波器直接应用于实际系统，会使得系统性能与理论结果存在偏差，这主要是有限字长(Finite Word Length, FWL)效应造成的，FWL效应使得FIR滤波器实际零点位置与理论发生偏离^[2]，如图1所示，当量化字长 $B_c=16$ bit时，FIR滤波器理想零点分布和实际零点分布。FWL效应引入滤波器系数误差和舍入噪声^[3,4]，其中滤波器系数误差用灵敏度衡量。

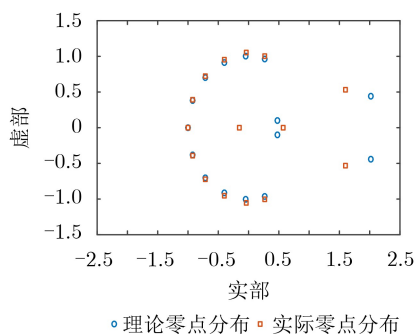


图1 15阶FIR滤波器零点分布

目前通过优化灵敏度，即降低滤波器系数误差改善FWL效应主要从优化滤波器系数与改进滤波器实现结构两方面展开。从优化滤波器系数方面，文献[5-8]提出滤波器正交状态空间实现稀疏化，使滤波器系数矩阵元素尽可能为平凡参数(0, ±1)，降低滤波器系数误差，提高对FWL效应的抵抗能力，但此类方法在迭代时对目标函数和约束条件有限制。从改进滤波器实现结构方面，与滤波器直接型结构和级联型结构相比，格型结构对FWL效应有更好的鲁棒性^[9]。文献[10]和文献[11]分别提出注入式格型结构和抽头式格型结构，但上述两种结构系数固定，无法对其结构优化。因此文献[12]将注入式格型结构中自由参数，即注入系数，与抽头式格型结构结合，得到混合结构的滤波器系数灵敏度要优于前两者。文献[13]在文献[12]的基础上引入另一组自由参数，并利用基于穷举法和遗传算法的混合算法对自由参数优化，得到系数灵敏度较好的混合格型结构。

以上改进滤波器格型结构方法都基于无限脉冲响应(Infinite Impulse Response, IIR)滤波器，与IIR滤波器格型递归结构不同，FIR滤波器格型结构是非递归的，因此上述方法不能直接用于改进FIR滤波器格型结构。因格型结构对量化误差不敏感^[4]，目前基于FIR滤波器格型结构优化较少考虑因量化带来的滤波器系数误差对滤波器性能的影响，但随着未来无线通信网络向超低延迟、高频谱

效率、高传输速率和业务多样性发展^[15]，对滤波器设计也提出更高要求。因此本文从改进FIR滤波器格型结构优化滤波器系数误差方向展开，提出一种改进FIR滤波器格型结构。首先给出改进FIR滤波器格型结构及其传输函数表达式，然后推导出FIR滤波器格型结构状态空间实现参数表示及状态空间实现结构系数灵敏度公式并对其理论分析，最后通过仿真实例对比分析不同采样周期和量化字长约约束下传统格型结构与改进格型结构的频响特性和系数灵敏度并给出相应结论。

2 改进FIR滤波器格型结构

N阶FIR滤波器格型结构传输函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N \gamma_i z^{-i}}{\eta_0 + \sum_{j=1}^N \eta_j z^{-j}} = \frac{\gamma_0 + \gamma_1 z^{-1} + \dots + \gamma_{N-1} z^{-(N-1)} + \gamma_N z^{-N}}{\eta_0 + \eta_1 z^{-1} + \dots + \eta_{N-1} z^{-(N-1)} + \eta_N z^{-N}} \quad (1)$$

其中， γ_i ($i = 0, 1, \dots, N$)为滤波器传输函数分子系数， η_i ($i = 0, 1, \dots, N$)为滤波器传输函数分母系数，其中 $\eta_0 = 1$ ， $\eta_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$)。

改进格型结构单元如图2所示。其中 $q_{i+1}(n)$ 和 $q_i(n)$ 分别为输入和输出， $x_i(n)$ 为状态变量， $i = 1, 2, \dots, N$ ， T_s 为采样周期，根据图2得到

$$\rho^{-1} \triangleq \frac{T_s}{z-1} \quad (2)$$

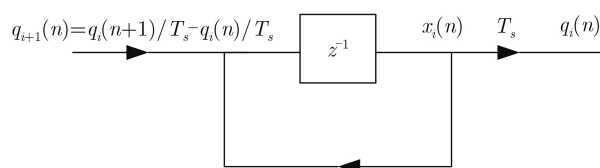


图2 改进格型结构单元

得到改进格型滤波器结构如图3所示，图3中 $u(n)$ 和 $y(n)$ 为滤波器输入和输出，基于新结构的传输函数为

$$H(\rho) = \frac{\sum_{i=0}^N \beta_i \rho^{-i}}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho^{-i}} = \frac{\beta_0 + \beta_1 \rho^{-1} + \dots + \beta_{N-1} \rho^{-(N-1)} + \beta_N \rho^{-N}}{\alpha_0 + \alpha_1 \rho^{-1} + \dots + \alpha_{N-1} \rho^{-(N-1)} + \alpha_N \rho^{-N}} \quad (3)$$

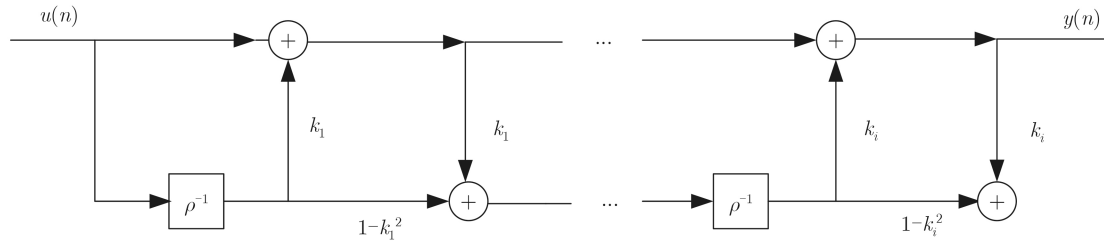


图3 FIR滤波器格型改进结构

其中, $\alpha_i (i = 0, 2, \dots, N)$ 为改进格型结构传输函数分母系数, $\beta_i (i = 0, 1, \dots, N)$ 为改进格型结构传输函数分子系数, 其中 $\alpha_0 = 1$ 。

则 $H(z)$ 与 $H(\rho)$ 之间的系数关系为

$$\left. \begin{aligned} [\beta_0 \beta_1 \dots \beta_N]^T &= \mathbf{M} [\gamma_0 \gamma_1 \dots \gamma_N]^T \\ [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_N]^T &= \mathbf{M} [\eta_0 \eta_1 \dots \eta_N]^T \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ m_{21} & m_{22} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m_{N,1} & m_{N,2} & \dots & m_{N,N} & 0 \\ m_{N+1,1} & m_{N+1,2} & \dots & m_{N+1,N} & m_{N+1,N+1} \end{bmatrix},$$

$$m_{ij} = C_{N+1-j}^{i-j} T^{-(i-1)}, i \geq j; C_m^i = \frac{m!}{(m-i)!i!} \quad (5)$$

3 改进格型结构状态空间表示及相应灵敏度

3.1 状态空间实现

将改进格型结构传输函数状态空间实现 $(\mathbf{A}_\rho, \mathbf{B}_\rho, \mathbf{C}_\rho, D_\rho)$ 表述为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{n+1}(z) &= \mathbf{A}_\rho \mathbf{X}_n(z) + \mathbf{B}_\rho U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}_\rho \mathbf{X}_n(z) + D_\rho U(z) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{X}(z)$ 为状态矢量; $\mathbf{A}_\rho \in \mathbf{R}^{N \times N}, \mathbf{B}_\rho \in \mathbf{R}^{N \times 1}, \mathbf{C}_\rho \in \mathbf{R}^{1 \times N}, D_\rho \in \mathbf{R}$ 均为系数矩阵, 且满足

$$H(\rho) = D_\rho + \mathbf{C}_\rho (\rho \mathbf{I}_\rho - \mathbf{A}_\rho)^{-1} \mathbf{B}_\rho \quad (7)$$

其中, \mathbf{I}_ρ 为 N 维单位矩阵。根据式(3)和式(7)得到改进格型结构状态空间实现 $(\mathbf{A}_\rho, \mathbf{B}_\rho, \mathbf{C}_\rho, D_\rho)$ 为

$$\mathbf{A}_\rho = \frac{T_s}{z-1} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ k_1 k_2 & 1 & & & & \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & 1 & & & \\ \dots & & & \dots & & \\ k_1 k_N & k_2 k_N & \dots & k_{N-1} k_N & 1 & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_\rho = \frac{T_s}{z-1} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix}, \mathbf{C}_\rho^T = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_N \end{bmatrix}, D_\rho = 1 \quad (8)$$

3.2 灵敏度表达式理论推导与分析

将FIR滤波器格型结构系数集合定义为 $\Gamma_\tau \triangleq \{v_k\}$ 。滤波器硬件实现时, 由于二进制编码字长有限性, 使得实际参数 v_k^* 与理想参数 v_k 之间存在量化误差 Δv_k , 即满足 $v_k^* = v_k + \Delta v_k$ 。因此, FIR滤波器实际传输函数 $H^*(\rho)$ 和理想传输函数 $H(\rho)$ 之间也存在偏差, 即满足 $\Delta H(\rho) = H(\rho) - H^*(\rho)$, 根据泰勒展开式可近似得到

$$\begin{aligned} \Delta H(\rho) &= H(\rho) - H^*(\rho) \\ &\approx \sum_{v_k \in \Gamma_v} \frac{\partial H(\rho)}{\partial v_k} \Delta v_k \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\partial H(\rho) / \partial v_k$ 是滤波器传输函数对第 k 参数 v_k 的灵敏度函数, 即

$$S_{v_k}(\rho) = \frac{\partial H(\rho)}{\partial v_k} \quad (10)$$

在有限字长分析中, 参数量化误差 Δv_k 通常被视为统计独立的随机变量, 即均值为0, 方差为 σ_c^2 的高斯白噪声。则偏差量 $\Delta H(\rho)$ 在频率点 ω 上的方差为

$$\begin{aligned} \xi^2(\omega) &= \mathbb{E} \left[|\Delta H(e^{j\omega})|^2 \right] \\ &= \sum_{v_k \in \Gamma_v, \forall k} |S_{v_k}(e^{j\omega})|^2 \sigma_c^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$\xi^2(\omega)$ 是关于频率 ω 的函数, 计算频率 $[0, 2\pi]$ 范围内偏差

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi^2(\omega) d\omega = M \sigma_c^2 \quad (12)$$

其中, M 为滤波器传递函数 $H(\rho)$ 关于参数 v 的灵敏度

$$M = \sum_{v_k \in \Gamma_v, \forall k} \|S_{v_k}(\rho)\|_2^2 \quad (13)$$

其中, $\|S_{v_k}(\rho)\|_2$ 表示 $S_{v_k}(\rho)$ 的 L_2 -范数 (L_2 -norm) 为

$$\|S_{v_k}(\rho)\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_{v_k}(e^{j\omega})|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

若滤波器采用状态空间实现 $(\mathbf{A}_\rho, \mathbf{B}_\rho, \mathbf{C}_\rho, D_\rho)$,

那么滤波器结构参数集合 v_k 为其中的一个子集。传输函数 $H(\rho) = D_\rho + C_\rho(\rho I_\rho - A_\rho)^{-1}B_\rho$ 关于整个状态空间矩阵微分分别为

$$\left. \begin{aligned} S_{A_\rho} &= \frac{\partial H(\rho)}{\partial A_\rho} = G(\rho) F^T(\rho) \\ S_{B_\rho} &= \frac{\partial H(\rho)}{\partial B_\rho} = G(\rho) \\ S_{C_\rho} &= \frac{\partial H(\rho)}{\partial C_\rho^T} = F(\rho) \\ S_{D_\rho} &= \frac{\partial H(\rho)}{\partial D_\rho} = 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

其中， $F(\rho) = (\rho I_\rho - A_\rho)^{-1}B_\rho$ ， $G^T(\rho) = C_\rho(\rho I_\rho - A_\rho)^{-1}$ ，是状态方程信号流图表示中的部分传递函数， $S_X = \partial H / \partial X$ 是与 X 维度相同的矩阵，其第 (i, j) 元素为 $\partial H / \partial X(i, j)$ 。根据式(10)—式(15)分别定义 S_{A_ρ} ， S_{B_ρ} ， S_{C_ρ} 所有矩阵元素与频率相关的灵敏度函数为

$$\left. \begin{aligned} N_{A_\rho}(\omega) &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |S_{a_{ij}}(e^{j\omega})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ N_{B_\rho}(\omega) &= \left(\sum_{i=1}^N |S_{b_i}(e^{j\omega})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ N_{C_\rho}(\omega) &= \left(\sum_{j=1}^N |S_{c_j}(e^{j\omega})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

则根据式(13)矩阵 A_ρ ， B_ρ ， C_ρ 对应整个频率范围的灵敏度为

$$\left. \begin{aligned} M_{A_\rho} &= \|N_{A_\rho}(\omega)\|_2^2 \\ M_{B_\rho} &= \|N_{B_\rho}(\omega)\|_2^2 \\ M_{C_\rho} &= \|N_{C_\rho}(\omega)\|_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

基于 L_2 -范数的灵敏度表达式为

$$\begin{aligned} lM_{L_2} &= \left\| \frac{\partial H(\rho)}{\partial A_\rho} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial H(\rho)}{\partial B_\rho} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial H(\rho)}{\partial C_\rho^T} \right\|_2^2 \\ &+ \left\| \frac{\partial H(\rho)}{\partial D_\rho} \right\|_2^2 = M_{A_\rho} + M_{B_\rho} + M_{C_\rho} + 1 \end{aligned} \quad (18)$$

定义复矩阵 $X(e^{j\omega})$ Frobenius范数

$$\begin{aligned} \|X(e^{j\omega})\|_F &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |X_{ij}(e^{j\omega})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \text{tr}(X(e^{j\omega}) X^T(e^{-j\omega})) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ \text{tr}(X^T(e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (19)$$

离散序列 $f(n)$ 的 z 变换为 $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$ ，将式(2)中 ρ^{-1} 代入得到离散序列 $f(n)$ 的 ρ 变换

$$F(\rho) = T_s \sum_{n=0}^{\infty} f(n) (1 + T_s \rho)^{-n}, |1 + T_s \rho| > r \quad (20)$$

则根据式(13)—式(20)可得

$$\begin{aligned} M_{B_\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N |S_{B_i}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G^T(e^{-j\omega}) G(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi j} \int_{|\rho+1/T_s|=1/T_s} G^T(\rho^{-1}) \\ &\quad \cdot G(\rho) (1 + T_s \rho)^{-1} d\rho \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_{C_\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^N |S_{C_j}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^T(e^{-j\omega}) F(e^{j\omega}) d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi j} \int_{|\rho+1/T_s|=1/T_s} F^T(\rho^{-1}) \\ &\quad \cdot F(\rho) (1 + T_s \rho)^{-1} d\rho \end{aligned} \quad (22)$$

因此根据式(2)定义的 ρ^{-1} 变换有

$$\left. \begin{aligned} F(\rho) &= T_s \sum_{k=0}^{\infty} f(k) (1 + T_s \rho)^{-k} \\ G(\rho) &= T_s \sum_{k=0}^{\infty} g(k) (1 + T_s \rho)^{-k} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} f(k) &= \begin{cases} 0, k = 0 \\ (T_s A_\rho + I)^{k-1} B_\rho, k \neq 0 \end{cases} \\ g(k) &= \begin{cases} 0, k = 0 \\ (T_s A_\rho^T + I)^{k-1} C_\rho^T, k \neq 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

将式(23)、式(24)中 $F(\rho)$ ， $G(\rho)$ 分别代入 M_{B_ρ} ， M_{C_ρ} 中，并根据留数定理可以推导出

$$\left. \begin{aligned} M_{B_\rho} &= \sum_{k=0}^{\infty} (T_s g(k))^T (T_s g(k)) \\ M_{C_\rho} &= \sum_{k=0}^{\infty} (T_s f(k))^T (T_s f(k)) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

对 B_ρ ， C_ρ 的灵敏度函数进一步简化

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W}_{C_\rho} &= T_s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}(k) \mathbf{f}^T(k) \\ \mathbf{W}_{B_\rho} &= T_s^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g}(k) \mathbf{g}^T(k) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

根据式(19), 可将 M_{B_ρ}, M_{C_ρ} 改写为

$$M_{B_\rho} = \text{tr}(\mathbf{W}_{B_\rho}), M_{C_\rho} = \text{tr}(\mathbf{W}_{C_\rho}) \quad (27)$$

接下来推导灵敏度 M_{A_ρ} 。根据式(16)—式(19)及式(21)—式(24)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{A_\rho} &= \mathbf{G}(\rho) \mathbf{F}^T(\rho) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_s \mathbf{g}(n) (1 + T_s \rho)^{-n} \\ &\quad \cdot \sum_{m=0}^{\infty} T_s \mathbf{f}^T(m) (1 + T_s \rho)^{-m} \\ &= T_s^2 \sum_{n,m \geq 0} \mathbf{g}(n) \mathbf{f}^T(m) (1 + T_s \rho)^{-n+m} \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\mathbf{h}(k) = T_s^2 \sum_{n+m=k} \mathbf{g}(n) \mathbf{f}^T(m)$, 则 $\mathbf{S}_{A_\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(k) (1 + T_s \rho)^{-k}$, 因此

$$\begin{aligned} M_{A_\rho} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |S_{a_{ij}}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{T_s}{2\pi j} \oint_{|\rho+1/T_s|=1/T_s} \text{tr} \{ (\mathbf{G}(\rho) \mathbf{F}^T(\rho)) \\ &\quad \cdot (\mathbf{G}(\rho^{-1}) \mathbf{F}^T(\rho^{-1}))^T \} (1 + T_s \rho)^{-1} d\rho \\ &= \text{tr} \left\{ \frac{T_s}{2\pi j} \oint_{|\rho+1/T_s|=1/T_s} \{ (\mathbf{G}(\rho) \mathbf{F}^T(\rho)) \right. \\ &\quad \cdot (\mathbf{G}(\rho^{-1}) \mathbf{F}^T(\rho^{-1}))^T \} (1 + T_s \rho)^{-1} d\rho \left. \right\} \\ &= \text{tr}(\mathbf{W}_{A_\rho}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{h}(k) \mathbf{h}^T(k) \end{aligned} \quad (29)$$

因此根据以上公式之间的转换, 式(19)基于 L_2 -norm的状态空间实现结构系数总灵敏度公式可表示为

$$M_{L_2, \rho} = \text{tr}(\mathbf{W}_{A_\rho}) + \text{tr}(\mathbf{W}_{B_\rho}) + \text{tr}(\mathbf{W}_{C_\rho}) + 1 \quad (30)$$

传统格型结构基于 L_2 -norm的状态空间实现系数总灵敏度公式可表示为

$$\begin{aligned} M_{L_2, z} &= \text{tr} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \tilde{\mathbf{G}}(z) \tilde{\mathbf{F}}^T(z) \tilde{\mathbf{F}}(z) \tilde{\mathbf{G}}^T(z) \frac{dz}{z} \right] \\ &\quad + \text{tr} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \tilde{\mathbf{G}}(z) \tilde{\mathbf{G}}^T(z) \frac{dz}{z} \right] \\ &\quad + \text{tr} \left[\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \tilde{\mathbf{F}}(z) \tilde{\mathbf{F}}^T(z) \frac{dz}{z} \right] + 1 \end{aligned} \quad (31)$$

其中, $\tilde{\mathbf{F}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} \mathbf{B}_z$, $\tilde{\mathbf{G}}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A}_z^T)^{-1} \mathbf{C}_z^T$ 。

对比式(30)和式(31)可知, 传统格型结构状态空间实现系数灵敏度表达式中各参数为定值, 而改进格型结构状态空间实现系数灵敏度表达式中存在参量 T_s , T_s 值直接影响改进格型结构状态空间实现系数灵敏度大小, 而传统格型结构系数灵敏度不受 T_s 影响。接下来通过仿真实例具体分析 T_s 对改进格型结构系数灵敏度影响。

4 仿真实例及分析

以11阶低通线性相位FIR滤波器为例, 分别计算不同采样周期 T_s 下传统格型结构和改进格型结构系数灵敏度, 并比较频响特性在量化字长约束下的变化情况。仿真中的滤波器通带截止频率为 $\omega_p = 0.2\pi$ Hz, 阻带截止频率为 $\omega_s = 0.5\pi$ Hz, 阻带最小衰减为 $\alpha_s = 30$ dB。

4.1 灵敏度分析

根据3.2节传统格型结构和改进格型结构系数灵敏度公式, 给定不同的 T_s 值, 分析传统格型结构 R_z 和改进格型结构 R_ρ 系数灵敏度。由表1可知, 当 $T_s = 10^{-2}$ s时, 传统格型结构系数灵敏度小于改进格型结构系数灵敏度, 说明此时传统格型结构因量化产生的滤波器系数误差小于改进格型结构, 但随着 T_s 减小, 传统格型结构系数灵敏度保持不变, 改进格型结构系数灵敏度逐渐减小, 并且由表1可知, 改进格型结构系数灵敏度并非随着 T_s 减小一直无限减小, 如 T_s 减小到 $10^{-4}/10^{-5}$ s时, 改进格型结构系数灵敏度减小趋于数值1。下面在频响特性曲线中分析量化字长和 T_s 对滤波器频响特性的影响。

4.2 频响特性分析

为验证上述结论并分析传统格型结构和改进格型结构抗FWL效应能力, 将结构系数小数部分舍

表1 不同 T_s 下结构系数灵敏度

T_s (s)	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
R_z	12	12	12	12
R_ρ	19.4761	1.1848	1.0018	1.0000

入量化到 B_c 位, 得到以下频响特性曲线。

图4表示采样周期为 10^{-2} s, 量化字长为8 bit时理想、传统格型结构和改进格型结构的频响特性对比曲线。图4传统格型结构频响特性曲线虽远离理

想状态, 但表现稳定, 而改进格型结构频响特性曲线发生明显偏离, 这是因为采样频率低时, 改进格型单元具有较差的数值特性, 即有限字长特性、系数灵敏度等。

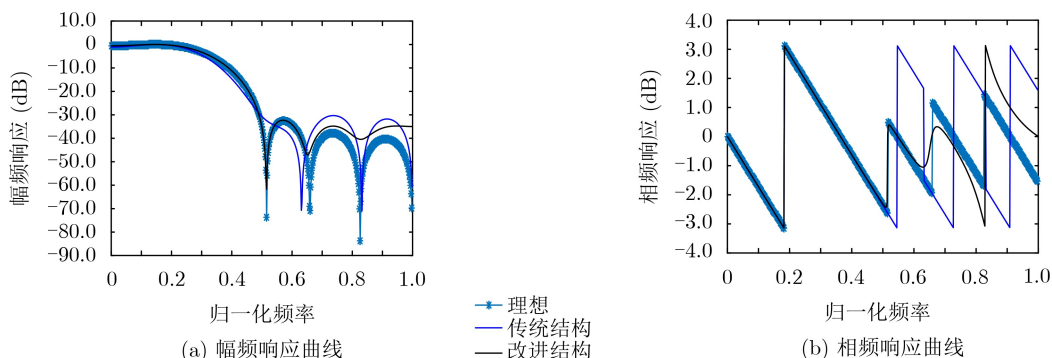


图 4 频率响应特性比较($T_s=10^{-2}$ s, $B_c=8$ bit)

图5表示采样周期为 10^{-2} s, 量化字长为10 bit时理想、传统格型结构和改进格型结构的频响特性对比曲线。与图4相比, 随着量化字长增大, 传统格型结构频响特性曲线靠近理想频响特性曲线不明

显, 而改进格型结构频响特性曲线相比于图4改进格型结构频响特性曲线更接近理想曲线, 说明改进格型结构对量化字长的敏感程度优于传统格型结构。

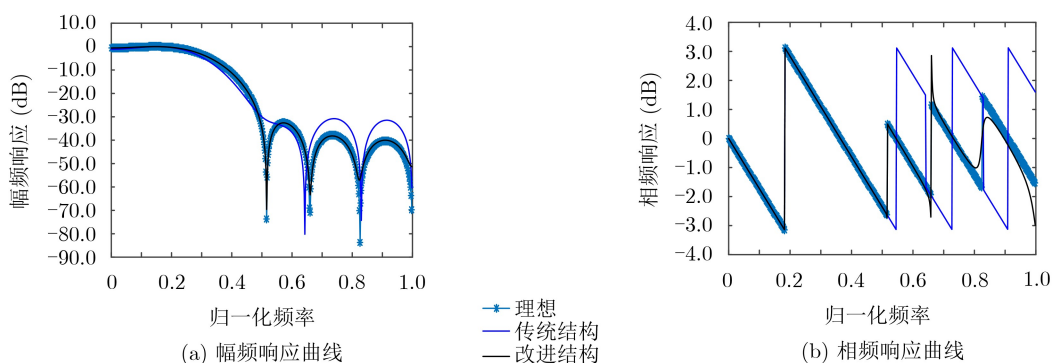


图 5 频率响应特性比较($T_s=10^{-2}$ s, $B_c=10$ bit)

图6表示采样周期为 10^{-4} s, 量化字长为16 bit时理想、传统格型结构和改进格型结构的频响特性对比曲线。与图4和图5对比可知, 随着采样周期减小, 量化字长增大, 由上述图5分析可知改进格型

结构对量化敏感程度优于传统格型结构, 并且由表1可知, 采样周期小于 10^{-2} s时, 改进格型结构系数灵敏度小于传统格型结构系数灵敏度, 即改进格型结构滤波器系数误差较小, 因此其频响特性曲线较

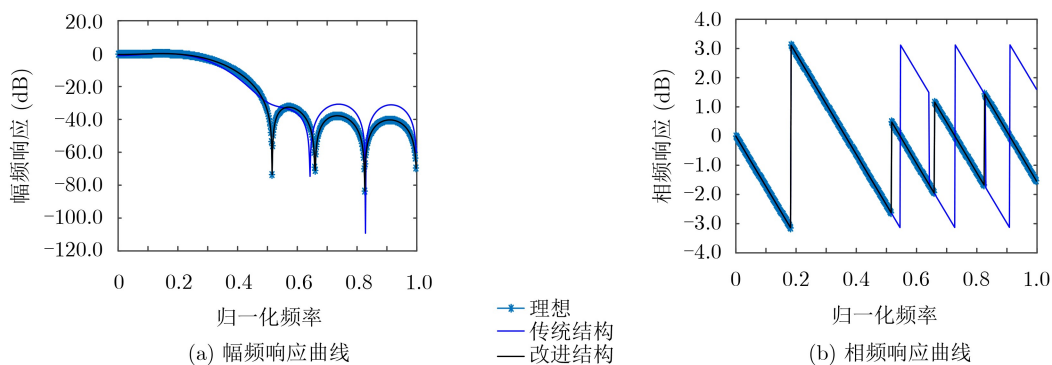


图 6 频率响应特性比较($T_s=10^{-4}$ s, $B_c=16$ bit)

传统格型结构频响特性曲线接近理想状态。

图7表示采样周期为 10^{-5} s, 量化字长为16 bit时理想、传统格型结构和改进格型结构的频响特性对比曲线。图6、图7对比发现, 图7的改进格型结构频响特性曲线接近理想频响特性曲线程度与图6

区别不明显, 因为当采样周期为 10^{-4} s和 10^{-5} s时, 改进格型结构系数灵敏度值相差不大, 即因量化带来的滤波器系数误差相差较小, 因此图6、图7改进格型结构频响特性曲线接近理想频响特性曲线程度相差不明显。

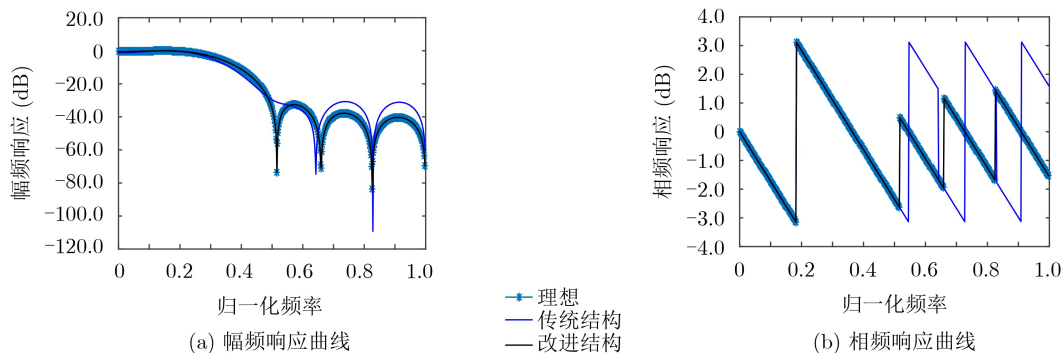


图7 频率响应特性比较($T_s=10^{-5}$ s, $B_c=16$ bit)

由上述对各图的描述和分析可知, 量化字长或采样频率增大对改进格型结构频响曲线影响比传统格型结构频响特性曲线影响明显。为直观表示量化字长和采样周期对两种结构频响特性曲线的影响, 分别计算传统格型结构和改进格型结构的幅频响应与理想幅频响应在各归一化频率点的平均数值差 ω_{R_z} 和 ω_{R_ρ} 。

由表2可知, 当 $B_c=8$ bit, $B_c=10$ bit或 $B_c=16$ bit时, 随着采样周期 T_s 减小, ω_{R_z} 值不变, 表明采样周期 T_s 不影响传统格型结构幅频响应曲线, ω_{R_ρ} 值减小, 表明改进格型结构幅频响应与理想幅频响应的差值减小, 且当 $B_c=16$ bit时, 改进格型结构幅频响应更接近理想幅频响应。当采样周期 $T_s=10^{-2}/10^{-3}/10^{-4}$ s时, 随着 B_c 增大, ω_{R_z} 值改变不明显, ω_{R_ρ} 值减小明显, 表明量化字长对改进格型结构幅频特性曲线影响比传统格型结构幅频特性曲线大。

综上分析结果, 采样周期 T_s 改变对传统格型结构系数灵敏度和频响特性均无影响, 而改进格型结构随着采样周期 T_s 减小, 其系数灵敏度减小趋于数值1, 频响曲线更接近理想状态, 在量化字长约束下, 与传统格型结构频响曲线相比, 改进格型结构频响曲线更接近理想状态, 即改进格型结构抗FWL效应能力优于传统格型结构。

5 结论

未来无线网络发展对滤波器设计提出更高要求。格型结构具有较好的抗FWL效应能力, 但缺少从硬件实现的结构优化方向研究如何降低滤波器系数误差的文献。本文提出一种改进FIR滤波器格型结构, 推导并分析结构系数灵敏度表达式。仿真实例表明, 与传统格型结构相比, 改进格型结构因FWL效应带来的滤波器系数误差更小, 即系数灵敏度更小, 在量化字长约束下, 改进格型结构频响曲线更接近理想曲线, 有效改善因FWL效应导致的滤波器性能下降问题。

参考文献

表2 两种结构幅频响应与理想幅频响应的差值

字长 B_c (bit)	采样周期 T_s (s)	ω_{R_z} (dB)	ω_{R_ρ} (dB)
8	10^{-2}	4.9703	2.9412
	10^{-3}	4.9703	0.9399
	10^{-4}	4.9703	0.9437
10	10^{-2}	4.6208	0.5500
	10^{-3}	4.6208	0.1509
	10^{-4}	4.6208	0.1244
16	10^{-2}	4.7135	0.0018
	10^{-3}	4.7135	9.1602×10^{-4}
	10^{-4}	4.7135	3.9264×10^{-4}

- [1] JIANG Lei, ZHANG Haijian, CHENG Shuai, et al. An overview of FIR filter design in future multicarrier communication systems[J]. *Electronics*, 2020, 9(4): 599. doi: 10.3390/electronics9040599.
 - [2] 庄陵, 马靖怡, 王光宇, 等. FIR数字滤波器零点灵敏度分析及优化实现[J]. *通信学报*, 2018, 39(9): 168-177. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2018167.
- ZHUANG Ling, MA Jingyi, WANG Guangyu, et al. Analysis and optimal realization of pole-zero sensitivity for FIR digital filters[J]. *Journal on Communications*, 2018, 39(9): 168-177. doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2018167.

- [3] RAJAN A, JAMADAGNI H S, and RAO A. Minimizing quantization effects in digital filtering[C]. 2009 IEEE 13th Digital Signal Processing Workshop and 5th IEEE Signal Processing Education Workshop, Marco Island, USA, 2009: 501–506. doi: [10.1109/DSP.2009.4785975](https://doi.org/10.1109/DSP.2009.4785975).
- [4] RENCZES B, KOLLÁR I, MOSCHITTA A, *et al.* Numerical optimization problems of sine-wave fitting algorithms in the presence of roundoff errors[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2016, 65(8): 1785–1795. doi: [10.1109/TIM.2016.2562218](https://doi.org/10.1109/TIM.2016.2562218).
- [5] LI Gang, GEVERS M, and SUN Youxian. Performance analysis of a new structure for digital filter implementation[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(4): 474–482. doi: [10.1109/81.841849](https://doi.org/10.1109/81.841849).
- [6] HUANG Chaogeng, LI Gang, and XU Hong. Sensitivity analysis of a novel digital filter structure[C]. 2009 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing, Macau, China, 2009: 1–5. doi: [10.1109/ICICS.2009.5397476](https://doi.org/10.1109/ICICS.2009.5397476).
- [7] 黄朝耿, 李刚. 一种高效数字滤波器结构及其灵敏度分析[J]. *电路与系统学报*, 2010, 15(2): 80–86. doi: [10.3969/j.issn.1007-0249.2010.02.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-0249.2010.02.015).
HUANG Chaogeng and LI Gang. An efficient orthogonal digital filter structure with sensitivity analysis[J]. *Journal of Circuits and Systems*, 2010, 15(2): 80–86. doi: [10.3969/j.issn.1007-0249.2010.02.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1007-0249.2010.02.015).
- [8] KO H J and TSAI J J P. Robust and computationally efficient digital IIR filter synthesis and stability analysis under finite precision implementations[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2020, 68: 1807–1822. doi: [10.1109/TSP.2020.2977848](https://doi.org/10.1109/TSP.2020.2977848).
- [9] LIU Yin and PARHI K K. Linear-phase lattice FIR digital filter architectures using stochastic logic[J]. *Journal of Signal Processing Systems*, 2018, 90(5): 791–803. doi: [10.1007/s11265-017-1224-z](https://doi.org/10.1007/s11265-017-1224-z).
- [10] GRAY A and MARKEL J. Digital lattice and ladder filter synthesis[J]. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, 1973, 21(6): 491–500. doi: [10.1109/TAU.1973.1162522](https://doi.org/10.1109/TAU.1973.1162522).
- [11] LIM Y C. On the synthesis of IIR digital filters derived from single channel AR lattice network[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 1984, 32(4): 741–749. doi: [10.1109/TASSP.1984.1164394](https://doi.org/10.1109/TASSP.1984.1164394).
- [12] LI Gang, LIM Y C, and HUANG Chaogeng. Very robust low complexity lattice filters[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(12): 6093–6104. doi: [10.1109/TSP.2010.2077635](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2077635).
- [13] HUANG Chaogeng, LI Gang, XU Zhixing, *et al.* Design of optimal digital lattice filter structures based on genetic algorithm[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(4): 989–998. doi: [10.1016/j.sigpro.2011.10.011](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2011.10.011).
- [14] 张玉洪, 保铮. FIR数字滤波器的简化格型实现[J]. *电子与信息学报*, 1988, 10(3): 193–201.
ZHANG Yuhong and BAO Zheng. Simplified lattice realization of fir digital filters[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 1988, 10(3): 193–201.
- [15] ANDREWS J G, BUZZI S, CHOI W, *et al.* What will 5G be?[J]. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2014, 32(6): 1065–1082. doi: [10.1109/JSAC.2014.2328098](https://doi.org/10.1109/JSAC.2014.2328098).

庄陵：女，1978年生，副教授，研究方向为多载波通信及信号处理。
张文静：女，1995年生，硕士生，研究方向为数字信号处理、滤波器结构设计。

责任编辑：余蓉