

素数长理想平衡四元几乎失配互补对构造

彭秀平* 郑德亮 李红晓

(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

(河北省信息传输与信号处理重点实验室 秦皇岛 066004)

摘要: 当一对失配序列的所有异相自相关函数和均为同一非0整数时,称该对失配序列为几乎失配互补对。该文提出平衡4元几乎失配互补对的新类型序列,通过Gray映射证明得到了平衡的素数长4元几乎失配互补对的理论界,基于4阶分圆类,提出满足理论界的周期为素数长的理想平衡4元几乎失配互补对的构造方法。通过该文研究扩大了4元互补对的存在范围,弥补了目前已有4元互补对大多只存在偶数长度的缺陷。

关键词: 正交频分复用; 4元几乎失配互补对; 分圆类; 平衡性

中图分类号: TN911.2

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2022)02-0677-09

DOI: 10.11999/JEIT210013

The Constructions of Optimal Balanced Quadrphase Almost Mismatched Complementary Pairs with Prime Length

PENG Xiuping ZHENG Deliang LI Hongxiao

(School of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing, Hebei Province, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A pair of mismatched sequences is called an almost mismatched complementary pair if their periodic autocorrelation functions sum up to a same nonzero integer for all out-of-phase time shifts. In this paper, a new balanced quadrphase almost mismatched complementary pair is proposed, the theoretical bound of balanced quadrphase almost complementary pair with prime length is proved by Gray mapping, based on the cyclotomic classes of order 4, the optimal balanced quadrphase almost mismatched complementary pair with prime length satisfied theoretical bound is constructed. The existence of quadrphase complementary pairs are expanded and compensated the deficiency of most of the existing ones only have even length at present by investigate in this paper.

Key words: Orthogonal Frequency Division Multiplexing(OFDM); Quadrphase almost mismatched complementary pair; Cyclotomy; Balance

1 引言

最佳序列^[1](周期异相自相关函数值为0)由于其自相关特性广泛应用于无线通信和雷达系统中,如码分多址系统中最佳序列主要用于解决系统中的多径干扰和多址干扰,正交频分复用系统中,最佳序

列主要用于降低峰均比。然而遗憾的是,已有的最佳2元、4元序列均存在长度上的缺陷,如最佳2元序列仅存在长度为4的情况,最佳4元序列已被证明不存在长度大于 2^n ($n > 4$ 整数)的情况且最佳平衡4元序列不存在^[2]。为了获得更多符合实际需要的序列,学者相继提出理想的2元序列^[3]、4元序列^[4]和奇周期序列^[5]等,但这些序列都使用自相关函数准则,要求发送端与接收端必须使用同一序列,这极大地限制了理想序列的存在空间。为了获得更多的理想序列,学者相继地提出更加广义的理想序列如零相关区序列^[6]、低相关区序列^[7]等。失配序列也是广义理想序列之一,失配序列设计原则是在通信过程中发送端和接收端采用不同的序列,这大大扩展了最佳序列和理想序列存在空间。近几年,关

收稿日期: 2021-01-05; 改回日期: 2021-06-02; 网络出版: 2021-06-22

*通信作者: 彭秀平 pengxp@ysu.edu.cn

基金项目: 河北省自然科学基金(F2021203040), 河北省高等学校科学技术研究项目(BJ2018018, ZD2019039, QN2019133, QN2021144)

Foundation Items: The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2021203040), The Science and Technology Program of Universities and Colleges in Hebei Province (BJ2018018, ZD2019039, QN2019133, QN2021144)

于失配序列的研究引起了广泛关注^[8,9],已经证实最佳2元失配序列存在周期为 $Q \equiv 0 \pmod{4}$ 情况^[10],理想二值自相关2元失配序列周期为 $Q \equiv \pm 1 \pmod{4}$ ^[11],最佳4元失配序列大量存在^[12],但是这些序列都属于单一序列,单一序列的相关性要受到Welch界的限制,不可能在整个周期内同时具有理想自相关和互相关性能。互补序列则通过各子序列的异相自相关和互相关的对消,可同时达到理想的自相关和互相关性能^[13],从而在理论上可以完全消除多载波码分多址系统的多址干扰和多径干扰及能显著降低正交频分复用(Orthogonal Frequency Division Multiplexing, OFDM)系统的峰值平均包络功率比(Peak-to-Mean Envelop Power Ratio, PMEPR),但是最佳2元和4元互补对同样存在数量有限的缺陷,如2元最佳互补对周期在100以内仅有20种可用长度且都为偶数或者1^[14],现有的4元最佳互补对也大多只存在偶数长度并鲜有涉及序列平衡性的讨论^[15],基于此,通过将互补序列异相自相关函数和值为0条件放宽,文献^[14]提出了几乎互补对这类新类型序列。

本文将失配序列设计思想引入互补对的研究中,并将平衡性纳入互补序列设计考虑范畴,提出了平衡4元几乎失配互补对的新概念。通过Gray映射对平衡的素数长4元几乎失配互补对的理论界进行研究,并基于4阶分圆类对满足理论界的素数长理想平衡4元几乎失配互补对的构造方法进行了研究,得到了周期长度为素数长 $Q \equiv 1 \pmod{4}$ 的理想平衡4元几乎失配互补对 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 的设计方法。得到的4元几乎失配互补对用作训练序列可对OFDM系统的载波频率偏差进行估计和补偿,即在发送端采用序列 x_1, x_2 ,在接收端采用序列 y_1, y_2 ,只要保证 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 两对失配互补对具有理想的自相关性能和平衡性,就可以很好地对OFDM系统的载波频偏进行估计和补偿,从而提高系统传输性能。所以通过本文研究,扩大了具有理想自相关特性的4元互补对的存在范围,同时也为不同应用场景下的OFDM系统提供更多的训练序列。

2 基本概念及引理

定义1^[8] 设 $x = (x(0), x(1), \dots, x(Q-1))$ 和 $y = (y(0), y(1), \dots, y(Q-1))$ 是两条周期长度均为 Q 的4元序列,其中 $x(j), y(j) \in \{\pm 1, \pm i\}$, $i = \sqrt{-1}$, $0 \leq j \leq Q-1$,由序列 x 和 y 组成4元失配序列记为 (x, y) ,其自相关函数定义为

$$R_{(x,y)}(\gamma) = \sum_{j=0}^{Q-1} x(j)y^*(j+\gamma) \quad (1)$$

其中, $0 \leq \gamma < Q$,加法 $j+\gamma$ 模 Q 运算, y^* 表示对序列 y 取共轭。当序列 $x=y$ 时,失配序列 (x,y) 退化为序列 x ,其自相关函数简化为 $R_x(\gamma)$ 。

定义2^[16] 设 (x,y) 为 Q 长的4元失配序列,令 $K_k(x) = |\{0 \leq j < Q : x(j) = k\}|$, $K_k(y) = |\{0 \leq j < Q : y(j) = k\}|$ 分别表示序列 x 和 y 中元素 k 出现的次数,其中 $k \in \{\pm 1, \pm i\}$ 。当 $Q \neq 0 \pmod{4}$ 时,若 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} K_k(x) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} K_k(x) = 1$, $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} K_k(y) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} K_k(y) = 1$ 同时成立,那么称失配序列 (x,y) 是平衡的。

定义3 设 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 是两个周期均为 Q 的平衡4元失配序列,若它们自相关函数和满足

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} C, & \gamma = 0 \\ \eta, & 1 \leq \gamma \leq Q-1 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $C, \eta (\neq 0)$ 分别为同相、异相自相关函数和,则称 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为平衡4元几乎失配互补对。

定义4^[17] 设 $Q = np + 1$ 是一个素数, $\text{GF}(Q)$ 是 Q 阶有限域。设 ω 是 $\text{GF}(Q)$ 上的一个本原元,则 n 阶分圆类定义为

$$F_e^{(n,Q)} = \{\omega^{e+nt}, t = 0, 1, \dots, p-1\}, 0 \leq e \leq n-1 \quad (3)$$

通常, $F_e^{(n,Q)}$ 简化为 F_e^n 。 n 阶分圆数定义为 F

$$(c, d)_n = |(F_c^n + 1) \cap F_d^n| \quad (4)$$

每一个素数 $Q = 4p + 1$ 都可以唯一地表示为 $Q = s^2 + 4t^2$,因此, $\text{GF}(Q)$ 上的4阶分圆数计算公式一般用 s, t 来表示。接下来给出两个分圆数计算的引理将用于主要结果的证明。

引理1^[17] 设 $Q = 4p + 1 = s^2 + 4t^2$ 为一个素数,当 p 为偶数时,各4阶分圆数及计算式如表1所示。当 p 为奇数时,各4阶分圆数及计算式如表2所示。

引理2^[17] 4阶分圆数的一些基本性质如下:

当 $\gamma \in F_e^4$, $e = 0, 1, 2, 3$, 则

$$(1) |(F_c^4 + \gamma) \cap F_d^4| = (c - e, d - e)_4;$$

$$(2) |F_d^4 \cap \{\gamma\}| = \begin{cases} 1, & \text{当 } e = d \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

$$(3) |\{0\} \cap (F_d^4 + \gamma)| = \begin{cases} 1, & \text{当 } e = d \text{ 且 } Q \equiv 1 \pmod{8} \text{ 或} \\ & e \equiv (d+2) \pmod{4} \text{ 且 } Q \equiv 5 \pmod{8}。 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

接下来介绍一些定义和引理,主要用于证明平衡4元几乎失配互补对的理论界。

定义5^[18] 逆Gray映射 $\theta^{-1} : Z_2 \times Z_2 \rightarrow Z_4$ 定义为: $\theta^{-1}(1, 1) = 1$, $\theta^{-1}(1, -1) = i$, $\theta^{-1}(-1, -1) = -1$, $\theta^{-1}(-1, 1) = -i$ 。设 a, b 为同周期的2元序列,则4元序列 x 被定义为: $x(j) = \theta^{-1}(a(j), b(j))$,也可表示为

表 1 p 为偶数时, 4阶分圆数及计算式

$(c, d)_4$	$s \equiv 1(\text{mod}4)$	$s \equiv 3(\text{mod}4)$
$(0, 0)_4$	$(Q - 11 - 6s)/16$	$(Q - 11 + 6s)/16$
$(0, 1)_4, (1, 0)_4, (3, 3)_4$	$(Q - 3 + 2s + 8t)/16$	$(Q - 3 - 2s + 8t)/16$
$(0, 2)_4, (2, 0)_4, (2, 2)_4$	$(Q - 3 + 2s)/16$	$(Q - 3 - 2s)/16$
$(0, 3)_4, (1, 1)_4, (3, 0)_4$	$(Q - 3 + 2s - 8t)/16$	$(Q - 3 - 2s - 8t)/16$
$(1, 2)_4, (1, 3)_4, (2, 1)_4,$ $(2, 3)_4, (3, 1)_4, (3, 2)_4$	$(Q + 1 - 2s)/16$	$(Q + 1 + 2s)/16$

表 2 p 为奇数时, 4阶分圆数及计算式

$(c, d)_4$	$s \equiv 1(\text{mod}4)$	$s \equiv 3(\text{mod}4)$
$(0, 2)_4$	$(Q + 1 - 6s)/16$	$(Q + 1 + 6s)/16$
$(0, 0)_4, (2, 0)_4, (2, 2)_4$	$(Q - 7 + 2s)/16$	$(Q - 7 - 2s)/16$
$(0, 1)_4, (1, 3)_4, (3, 2)_4$	$(Q + 1 + 2s - 8t)/16$	$(Q + 1 - 2s - 8t)/16$
$(0, 3)_4, (1, 2)_4, (3, 1)_4$	$(Q + 1 + 2s + 8t)/16$	$(Q + 1 - 2s + 8t)/16$
$(1, 0)_4, (1, 1)_4, (2, 1)_4,$ $(2, 3)_4, (3, 0)_4, (3, 3)_4$	$(Q - 3 - 2s)/16$	$(Q - 3 + 2s)/16$

$$x(j) = (1 + i) \frac{a(j)}{2} + (1 - i) \frac{b(j)}{2} \quad (5)$$

引理3^[16] 设 a_r, b_r, c_r, d_r 均为周期 Q 的 2 元序列, x_r, y_r 为同周期的 4 元序列, 并且 $x_r(j) = \theta^{-1}(a_r(j), b_r(j)), y_r(j) = \theta^{-1}(c_r(j), d_r(j))$, 其中 $r = 1, 2$, 则自相关函数 $R_{(x_r, y_r)}(\gamma)$ 表示为

$$R_{(x_r, y_r)}(\gamma) = \frac{1}{2} \{R_{(a_r, c_r)}(\gamma) + R_{(b_r, d_r)}(\gamma)\} + \frac{i}{2} \{R_{(a_r, d_r)}(\gamma) - R_{(b_r, c_r)}(\gamma)\} \quad (6)$$

定义6^[19] 设集合 U, V 为整数集 Z_Q 上的两个子集, 序列 a, b 分别等价对应于集合 U, V , $a(j) = \begin{cases} 1, & j \in U \\ -1, & j \notin U \end{cases}, b(j) = \begin{cases} 1, & j \in V \\ -1, & j \notin V \end{cases}$, 其中 $j = 0, 1, \dots, Q - 1$, 那么称集合 U, V 分别为序列 a, b 的特征集。相应地, 序列 a, b 分别称为集合 U, V 的特征序列。

定义7^[19] 令 a 和 b 分别是周期为 Q 的 2 元序列, 集合 U, V 分别是 a, b 的特征集, 那么决定序列 a 和 b 的相关特性的差函数定义为

$$d_r(U, V) = |(U + \gamma) \cap V| \quad (7)$$

其中, $U + \gamma = \{u + \gamma : u \in U\}$, 加法 $u + \gamma$ 模 Q 运算。

引理4^[19] 设 $|U| = k, |V| = k', |U \cap V| = e$ 分别表示集合 U, V 及两者交集元素的个数, a, b 同为周期 Q 的 2 元序列, 并设集合 U, V 分别为序列 a, b 的特征集, 则

$$R_{(a,b)}(\gamma) = \begin{cases} Q - 2(k + k') + 4e, & \gamma = 0 \\ Q - 2(k + k') + 4d_r(U, V), & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (8)$$

在本文中, 在满足定义 3 中平衡 4 元几乎失配互补对定义的前提下, 重点考虑 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 中

4 条序列所有零位置取值元素最多的个数与取值元素最少个数差为 0, 2, 4 的平衡 4 元几乎失配互补对, 即对于 $k \in \{\pm 1, \pm i\}$, 令 $N_k(0) = \{1 \leq r \leq 2 : x_r(0) = k \text{ 且 } y_r(0) = k\}$ 表示序列 x_r, y_r 所有 0 位置取值为 k 的个数, $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{0, 2, 4\}$ 的平衡 4 元几乎失配互补对。下面给出此类平衡 4 元几乎失配互补对的理论界并进行证明。为了便于描述, 本文余下部分涉及的平衡 4 元几乎失配互补对都指的是此类型平衡 4 元互补对, 不再一一说明。

定理1 设 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为周期 $Q \equiv 1(\text{mod}4)$ 且 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{0, 2, 4\}$ 的平衡 4 元几乎失配互补对, 则它的所有异相周期自相关函数和模值至少为 2。即

$$|R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma)| \geq 2, \gamma \neq 0 \quad (9)$$

证明 当 $0 < \gamma < Q$, 定义 $n_1(x_r, y_r, \gamma), n_{-1}(x_r, y_r, \gamma), n_i(x_r, y_r, \gamma), n_{-i}(x_r, y_r, \gamma)$ 分别表示 1, -1, i, -i 在差 $x_r(j) - y_r^*(j + \gamma) (0 \leq j < Q)$ 中出现的次数, 其中 $r = 1, 2$ 。则

$$R_{(x_r, y_r)}(\gamma) = n_1(x_r, y_r, \gamma) - n_{-1}(x_r, y_r, \gamma) + i(n_i(x_r, y_r, \gamma) - n_{-i}(x_r, y_r, \gamma)) \quad (10)$$

设 $A = n_1(x_1, y_1, \gamma) - n_{-1}(x_1, y_1, \gamma) + n_1(x_2, y_2, \gamma) - n_{-1}(x_2, y_2, \gamma)$, $B = n_i(x_1, y_1, \gamma) - n_{-i}(x_1, y_1, \gamma) + n_i(x_2, y_2, \gamma) - n_{-i}(x_2, y_2, \gamma)$, 则由式(10)可表示为

$$|R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma)| = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (11)$$

如果 A 和 B 均为偶数, 则该定理能得到充分的证明。根据式(6)可得

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r=1}^2 [R_{(a_r, c_r)}(\gamma) + R_{(b_r, d_r)}(\gamma)] \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \sum_{r=1}^2 [R_{(a_r, d_r)}(\gamma) - R_{(b_r, c_r)}(\gamma)] \right\} \quad (12)$$

设 $(U_r, V_r), (U'_r, V'_r)$ 分别为 $(a_r, c_r), (b_r, d_r)$ 的特征集, 根据定义6、定义7及引理4, 则有 $R_{(a_r, c_r)}(\gamma) = Q - 2(k_{r,1} + k'_{r,1}) + 4d_r(U_r, V_r)$, $R_{(b_r, d_r)}(\gamma) = Q - 2(k_{r,2} + k'_{r,2}) + 4d_r(U'_r, V'_r)$ 。其中 $k_{r,1} = |U_r|$, $k'_{r,1} = |V_r|$, $k_{r,2} = |U'_r|$, $k'_{r,2} = |V'_r|$ 。

设 $\Re \left(\sum_{r=1}^2 R_{(x_r, y_r)}(\gamma) \right) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{r=1}^2 [R_{(a_r, c_r)}(\gamma) + R_{(b_r, d_r)}(\gamma)] \right\}$, 则A可以表示为

$$A = \Re \left(\sum_{r=1}^2 R_{(x_r, y_r)}(\gamma) \right) = \frac{1}{2} \left[4Q - 2 \sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) + 4 \sum_{r=1}^2 (d_r(U_r, V_r) + d_r(U'_r, V'_r)) \right] = 2Q - \sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) + 2 \sum_{r=1}^2 (d_r(U_r, V_r) + d_r(U'_r, V'_r)) \quad (13)$$

由于 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为周期 $Q \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{0, 2, 4\}$ 的平衡4元几乎失配互补对, 当 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) = 0$ 时, 得到序列 $a_r, b_r, c_r, d_r (r = 1, 2)$ 均为平衡的2元序列, 可分如下3种情况:

(1) 序列 $a_r, b_r, c_r, d_r (r = 1, 2)$ 中两条序列0位置取-1, 6条序列0位置取1, 则有 $\sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) = 4Q + 2$ 为偶数;

(2) 序列 $a_r, b_r, c_r, d_r (r = 1, 2)$ 中4条序列0位置取-1, 4条序列0位置取1, 则有 $\sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) = 4Q$ 为偶数;

(3) 序列 $a_r, b_r, c_r, d_r (r = 1, 2)$ 中6条序列0位置取-1, 两条序列0位置取1, 则有 $\sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) = 4Q - 2$ 为偶数。

当 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{2, 4\}$ 时, 同理可得 $\sum_{r=1}^2 (k_{r,1} + k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2}) \in \{4Q + 2, 4Q - 4, 4Q, 4Q + 4\}$, 所以有 $\sum_{r=1}^2 (k_{r,1} +$

$k'_{r,1} + k_{r,2} + k'_{r,2})$ 为偶数, 继而有A为偶数, 则 $n_1(x_1, y_1, \gamma) + n_{-1}(x_1, y_1, \gamma) + n_1(x_2, y_2, \gamma) + n_{-1}(x_2, y_2, \gamma) = A + 2n_{-1}(x_1, y_1, \gamma) + 2n_{-1}(x_2, y_2, \gamma)$ 也为偶数。另有 $\sum_{r=1}^2 [n_1(x_r, y_r, \gamma) + n_{-1}(x_r, y_r, \gamma) + n_i(x_r, y_r, \gamma) + n_{-i}(x_r, y_r, \gamma)] = 2Q$, 可得 $n_i(x_1, y_1, \gamma) + n_{-i}(x_1, y_1, \gamma) + n_i(x_2, y_2, \gamma) + n_{-i}(x_2, y_2, \gamma)$ 也为偶数, 则同理B也为偶数。即由式(11)可得式(9)。证毕

定理1给出了平衡4元几乎失配互补对的理论界, 即其异相自相关函数和的最小界限, 由此给出如下理想平衡4元几乎失配互补对的定义。

定义8 若周期长为素数 $Q \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{0, 2, 4\}$ 的平衡4元几乎失配互补对 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 所有异相自相关函数和模值满足 $|R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma)| = 2, \gamma \neq 0$, 则称 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对。

3 理想4元几乎失配互补对的构造

在本节将基于4阶分圆类来构造理想平衡4元几乎失配互补对, 首先给出平衡4元失配序列的构造方式。

构造法1 令 $Q = 4p + 1$ 为一素数, 令 $(j, k, l, r, j', k', l', r')$ 为整数集 $Z_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 上的一个列举, 设 (j, k, l, r) 和 (j', k', l', r') 分别为序列 x 和 y 的定义参数, 则平衡4元失配序列 (x, y) 定义为

$$x(j) = \begin{cases} x(0), & j \in \{0\} \\ 1, & j \in F_j \\ -1, & j \in F_k \\ i, & j \in F_l \\ -i, & j \in F_r \end{cases}, y(j) = \begin{cases} y(0), & j \in \{0\} \\ 1, & j \in F_{j'} \\ -1, & j \in F_{k'} \\ i, & j \in F_{l'} \\ -i, & j \in F_{r'} \end{cases} \quad (14)$$

其中, $x(0), y(0) \in \{\pm 1, \pm i\}$ 。

接下来, 将构造周期为素数 $Q = 4p + 1$ 的理想平衡4元几乎失配互补对。

定理2 设 $Q = 4p + 1 = s^2 + 4t^2$ 为素数, 其中 p 为奇数, 平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 按构造法1得到, 要使 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对当且仅当平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的定义参数满足表3所示且其自相关函数和为

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} 2Q - 4 \text{ 或 } 2(Q - 1) \pm 2i, & \gamma = 0 \\ -2, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

表3 p 为奇数时，平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的定义参数

$[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)]$	$[(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] \in$
$[(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3)], ((0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3))$	$\{[(1, -1), (-1, 1)]; [(i, -i), (-i, i)]; [(i, 1), (1, -i)]; [(-i, -1), (-1, i)]; [(1, i), (-1, -i)]; [(i, -1), (-i, 1)]\}$
$[(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3)], ((0, 2, 3, 1), (0, 2, 3, 1))$	$\{[(1, -i), (i, 1)]; [(-1, i), (-i, -1)]; [(i, 1), (1, -i)]; [(-i, -1), (-1, i)]; [(1, i), (-1, 1)]; [(-1, -i), (i, -1)]; [(i, -1), (-1, -i)]; [(-i, 1), (1, i)]\}$

证明 取 $[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)] = [(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3)]$, $[(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] = [(1, -1), (-1, 1)]$ 为例进行证明。

首先计算 (x_1, y_1) 的自相关函数，用差函数表示为

$$\begin{aligned}
 R_{(x_1, y_1)}(\gamma) &= d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_0^4) + d_\gamma(F_1^4, F_1^4) \\
 &\quad + d_\gamma(F_2^4, F_2^4 \cup \{0\}) + d_\gamma(F_3^4, F_3^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_2^4, F_0^4) - d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_2^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad - d_\gamma(F_1^4, F_3^4) - d_\gamma(F_3^4, F_1^4) \\
 &\quad + i [d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_3^4) + d_\gamma(F_2^4, F_1^4)] \\
 &\quad + d_\gamma(F_1^4, F_0^4) + d_\gamma(F_3^4, F_2^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad - d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_1^4) - d_\gamma(F_2^4, F_3^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_1^4, F_2^4 \cup \{0\}) - d_\gamma(F_3^4, F_0^4)] \\
 &= \Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) + i\vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中， $\Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma))$ 和 $\vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma))$ 分别表示 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$ 的实部与虚部，通过简化则有

$$\begin{aligned}
 \Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) &= [|(F_0^4 + \gamma) \cap F_0^4| \\
 &\quad + |(F_1^4 + \gamma) \cap F_1^4| \\
 &\quad + |(F_2^4 + \gamma) \cap F_2^4| \\
 &\quad + |(F_3^4 + \gamma) \cap F_3^4| \\
 &\quad - |(F_2^4 + \gamma) \cap F_0^4| \\
 &\quad - |(F_0^4 + \gamma) \cap F_2^4| \\
 &\quad - |(F_1^4 + \gamma) \cap F_3^4| \\
 &\quad - |(F_3^4 + \gamma) \cap F_1^4|] \\
 &\quad + \Delta_{\Re}(\gamma) \\
 &= M + \Delta_{\Re}(\gamma) \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) &= [|(F_0^4 + \gamma) \cap F_3^4| + |(F_2^4 + \gamma) \cap F_1^4| \\
 &\quad + |(F_1^4 + \gamma) \cap F_0^4| + |F_3^4 \cap (F_2^4 + \gamma)| \\
 &\quad - |(F_0^4 + \gamma) \cap F_1^4| - |(F_2^4 + \gamma) \cap F_3^4| \\
 &\quad - |(F_1^4 + \gamma) \cap F_2^4| - |F_3^4 \cap (F_0^4 + \gamma)|] \\
 &\quad + \Delta_{\vartheta}(\gamma) \\
 &= N + \Delta_{\vartheta}(\gamma) \quad (18)
 \end{aligned}$$

$\Delta_{\Re}(\gamma)$ 和 $\Delta_{\vartheta}(\gamma)$ 表达式为

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Re}(\gamma) &= |\{\gamma\} \cap F_0^4| + |(F_2^4 + \gamma) \cap \{0\}| \\
 &\quad - |(F_0^4 + \gamma) \cap \{0\}| - |\{\gamma\} \cap F_2^4| \\
 &\quad - |\{\gamma\} \cap \{0\}| \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\vartheta}(\gamma) &= |\{\gamma\} \cap F_3^4| + |(F_3^4 + \gamma) \cap \{0\}| \\
 &\quad - |\{\gamma\} \cap F_1^4| - |(F_1^4 + \gamma) \cap \{0\}| \quad (20)
 \end{aligned}$$

当 $\gamma = 0$ 时，根据定义1可得到 (x_1, y_1) 同相自相关函数值为 $R_{(x_1, y_1)}(0) = Q - 2$ 。

当 $\gamma \in F_e^4, e = 0, 1, 2, 3$ 时，通过引理2计算可得

$$\Delta_{\Re}(\gamma) = \begin{cases} 2, & \gamma \in F_0^4 \\ -2, & \gamma \in F_2^4 \\ 0, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (21)$$

$$\Delta_{\vartheta}(\gamma) = 0, \gamma \in F_e^4, e = 0, 1, 2, 3 \quad (22)$$

由式(17)和引理2， M 可简化为

$$\begin{aligned}
 M &= (4 - e, 4 - e)_4 + (1 - e, 1 - e)_4 + (2 - e, 2 - e)_4 \\
 &\quad + (3 - e, 3 - e)_4 - (2 - e, 4 - e)_4 \\
 &\quad - (4 - e, 2 - e)_4 - (1 - e, 3 - e)_4 \\
 &\quad - (3 - e, 1 - e)_4 \quad (23)
 \end{aligned}$$

根据引理1中表2的4阶分圆数及计算式可得：当 $e = 0, 1, 2, 3$ 时， $M = -1$ ，进而有

$$\begin{aligned}
 \Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) &= M + \Delta_{\Re}(\gamma) \\
 &= \begin{cases} -3, & \gamma \in F_0^4 \\ 1, & \gamma \in F_2^4 \\ -1, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (24)
 \end{aligned}$$

同理，由式(18)和引理2，有

$$\begin{aligned}
 N &= (4 - e, 3 - e)_4 + (2 - e, 1 - e)_4 + (1 - e, 4 - e)_4 \\
 &\quad + (3 - e, 2 - e)_4 - (4 - e, 1 - e)_4 \\
 &\quad - (2 - e, 3 - e)_4 - (1 - e, 2 - e)_4 \\
 &\quad - (3 - e, 4 - e)_4 \quad (25)
 \end{aligned}$$

根据引理1中表2的4阶分圆数及计算式可得：当 $e = 0, 1, 2, 3$ 时， $N = 0$ ，则有

$$\vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) = N + \Delta_{\vartheta}(\gamma) = 0 \quad (26)$$

综上所述，可得 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$ 表达式为

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) = \Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) + i\vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) = \begin{cases} Q - 2, & \gamma = 0 \\ 1, & \gamma \in F_0^4 \\ -3, & \gamma \in F_2^4 \\ -1, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (27)$$

同样, (x_2, y_2) 的自相关函数可表示为

$$R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = d_\gamma(F_0^4, F_0^4 \cup \{0\}) + d_\gamma(F_1^4, F_1^4) + d_\gamma(F_2^4 \cup \{0\}, F_2^4) + d_\gamma(F_3^4, F_3^4) - d_\gamma(F_0^4, F_2^4) - d_\gamma(F_2^4 \cup \{0\}, F_0^4 \cup \{0\}) - d_\gamma(F_1^4, F_3^4) - d_\gamma(F_3^4, F_1^4) + i[d_\gamma(F_0^4, F_3^4) + d_\gamma(F_2^4 \cup \{0\}, F_1^4) + d_\gamma(F_0^4, F_1^4) + d_\gamma(F_2^4 \cup \{0\}, F_3^4) - d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_1^4) - d_\gamma(F_2^4, F_3^4) - d_\gamma(F_1^4, F_2^4) - d_\gamma(F_3^4, F_0^4 \cup \{0\})] = \Re(R_{(x_2, y_2)}(\gamma)) + i\vartheta(R_{(x_2, y_2)}(\gamma)) \quad (28)$$

参考 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$ 的计算方法, 可得 $R_{(x_2, y_2)}(\gamma)$ 的计算结果为

$$R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} Q - 2, & \gamma = 0 \\ -3, & \gamma \in F_0^4 \\ 1, & \gamma \in F_2^4 \\ -1, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (29)$$

将式(27)与式(29)相加, 则有

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} 2Q - 4, & \gamma = 0 \\ -2, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (30)$$

由此可得 $|\eta|=2$, 满足定理1的理论界, 根据定义8, 可知 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对。证毕

例1 设 $Q = 13 = 4 \times 1^2 + 3^2$, 其4阶分圆类为 $F_0^4 = \{1, 3, 9\}, F_1^4 = \{2, 5, 6\}, F_2^4 = \{4, 10, 12\}, F_3^4 = \{7, 8, 11\}$ (31)

取 $[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)] = [(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3)], [(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] = [(1, -1), (-1, 1)]$, 则有4元失配互补对为 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\} = \{(11i1 - 1ii - i - i1 - 1 - i - 1, -11i1 - 1ii - i - i1 - 1 - i - 1), (-11i1 - 1ii - i - i1 - 1 - i - 1, 11i1 - 1ii - i - i1 - 1 - i - 1)\}$ (32)

通过计算可得失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的自相关函数及其和值如图1所示。

图1(a)为失配序列 (x_1, y_1) 的相关函数 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$, 图1(b)为失配序列 (x_2, y_2) 的相关函数 $R_{(x_2, y_2)}(\gamma)$, 将两者按 $\gamma(0 \leq \gamma \leq 12)$ 取值对应相加可得图1(c), 由图1(c)可得 $C = 2Q - 4 = 22, \eta = -2$, 进而有 $|\eta|=2$ 满足定理1的理论界, 由定义8可得 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对。

定理3 设 $Q = 4p + 1 = s^2 + 4t^2$ 为素数, 其中 p 为偶数且 $t > 0$, 平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 按构造法1得到, 要使 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对当且仅当平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的定义参数满足表4所示且其自相关函数和为

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} 2Q - 4 \text{ 或 } 2(Q - 1) \pm 2i, & \gamma = 0 \\ -2, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (33)$$

证明 取 $[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)] = [((0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3)), ((0, 3, 2, 1), (0, 3, 2, 1))], [(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] = [(-1, -i), (1, i)]$ 为例进行证明, 与定理2的证明相似, 失配序列 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的自相关函数表达式分别为

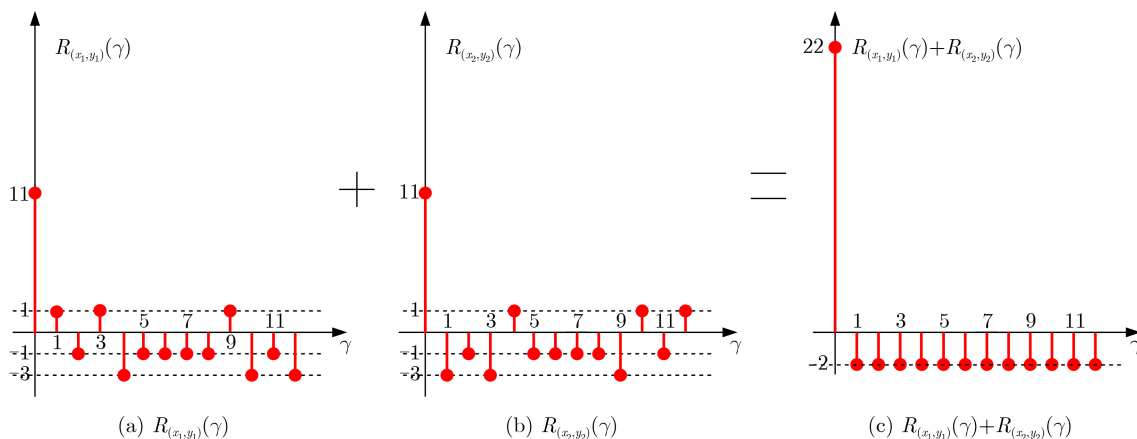


图1 失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的自相关函数值及两者之和

$$\begin{aligned}
 R_{(x_1, y_1)}(\gamma) &= d_\gamma(F_0^4, F_0^4) + d_\gamma(F_1^4 \cup \{0\}, F_1^4) \\
 &\quad + d_\gamma(F_2^4, F_2^4) + d_\gamma(F_3^4, F_3^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad - d_\gamma(F_0^4, F_1^4) - d_\gamma(F_1^4 \cup \{0\}, F_0^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_2^4, F_3^4 \cup \{0\}) - d_\gamma(F_3^4, F_2^4) \\
 &\quad + i [d_\gamma(F_0^4, F_3^4 \cup \{0\}) + d_\gamma(F_1^4 \cup \{0\}, F_2^4)] \\
 &\quad + d_\gamma(F_2^4, F_0^4) + d_\gamma(F_3^4 \cup \{0\}, F_1^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_0^4, F_2^4) - d_\gamma(F_1^4 \cup \{0\}, F_3^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad - d_\gamma(F_2^4, F_1^4) - d_\gamma(F_3^4, F_0^4)] \\
 &= \Re(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) + i\vartheta(R_{(x_1, y_1)}(\gamma)) \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) = \begin{cases} (Q-1) - i, & \gamma = 0 \\ -2 - t + i, & \gamma \in F_0^4 \cup F_2^4 \\ t - i, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (36)$$

$$R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} (Q-1) - i, & \gamma = 0 \\ t - i, & \gamma \in F_0^4 \cup F_2^4 \\ -2 - t + i, & \gamma \in F_1^4 \cup F_3^4 \end{cases} \quad (37)$$

将 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$ 与 $R_{(x_2, y_2)}(\gamma)$ 两式相加，可得

$$R_{(x_1, y_1)}(\gamma) + R_{(x_2, y_2)}(\gamma) = \begin{cases} 2(Q-1) - 2i, & \gamma = 0 \\ -2, & \gamma \neq 0 \end{cases} \quad (38)$$

则有 $|\eta| = 2$ ，满足定理1的理论界限值，根据定义8，可知 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对。证毕

例2 设 $Q = 17 = 4 \times 1^2 + 1^2$ ，则其4阶分圆类为

$$\begin{aligned}
 F_0^4 &= \{1, 4, 13, 16\}, F_1^4 = \{3, 5, 12, 14\}, \\
 F_2^4 &= \{2, 8, 9, 15\}, F_3^4 = \{6, 7, 10, 11\} \quad (39)
 \end{aligned}$$

取 $[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)] = [(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (0, 3, 2, 1), (0, 3, 2, 1)]$
 $[(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] = [(-1, -i), (1, i)]$ ，则有4元失配互补对为

$$\begin{aligned}
 R_{(x_2, y_2)}(\gamma) &= d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_0^4) + d_\gamma(F_1^4, F_1^4) \\
 &\quad + d_\gamma(F_2^4, F_2^4 \cup \{0\}) + d_\gamma(F_3^4, F_3^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_3^4, F_0^4) - d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_3^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_2^4, F_1^4) - d_\gamma(F_1^4, F_2^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad + i [d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_1^4) + d_\gamma(F_2^4, F_0^4)] \\
 &\quad + d_\gamma(F_1^4, F_3^4) + d_\gamma(F_3^4, F_2^4 \cup \{0\}) \\
 &\quad - d_\gamma(F_2^4, F_3^4) - d_\gamma(F_3^4, F_1^4) \\
 &\quad - d_\gamma(F_0^4 \cup \{0\}, F_2^4 \cup \{0\}) - d_\gamma(F_1^4, F_0^4)] \\
 &= \Re(R_{(x_2, y_2)}(\gamma)) + i\vartheta(R_{(x_2, y_2)}(\gamma)) \quad (35)
 \end{aligned}$$

通过计算，可分别求得

表4 p 为偶数时，平衡4元失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的定义参数

$[(j_1, k_1, l_1, r_1), (j'_1, k'_1, l'_1, r'_1), (j_2, k_2, l_2, r_2), (j'_2, k'_2, l'_2, r'_2)]$	$[(x_1(0), y_1(0)), (x_2(0), y_2(0))] \in$
$[(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3)]$	$\{(1, -1), (-1, 1)\}; \{(i, -i), (-i, i)\}; \{(1, -i), (-1, i)\}; \{(i, 1), (-i, -1)\}; \{(1, i), (-1, -i)\}; \{(i, -1), (-i, 1)\}$
$[(0, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 3), (0, 2, 3, 1), (0, 2, 3, 1)]$	$\{(1, -1), (1, -1)\}; \{(-1, 1), (-1, 1)\}; \{(i, -i), (-i, i)\}; \{(-i, i), (i, -i)\}; \{(1, -i), (-1, -1)\}; \{(-1, i), (i, 1)\}; \{(i, 1), (-1, i)\}; \{(-i, -1), (1, -i)\}; \{(1, i), (i, -1)\}; \{(-1, -i), (-i, 1)\}; \{(i, -1), (1, i)\}; \{(-i, 1), (-1, -i)\}$
$[(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (0, 3, 1, 2), (0, 3, 1, 2)]$	$\{(i, 1), (-1, i)\}; \{(-i, -1), (1, -i)\}; \{(1, i), (i, -1)\}; \{(-1, -i), (-i, 1)\}$
$[(0, 1, 2, 3), (0, 1, 2, 3), (0, 3, 2, 1), (0, 3, 2, 1)]$	$\{(i, 1), (-i, -1)\}; \{(-i, -1), (i, 1)\}; \{(1, i), (-1, -i)\}; \{(-1, -i), (1, i)\}$

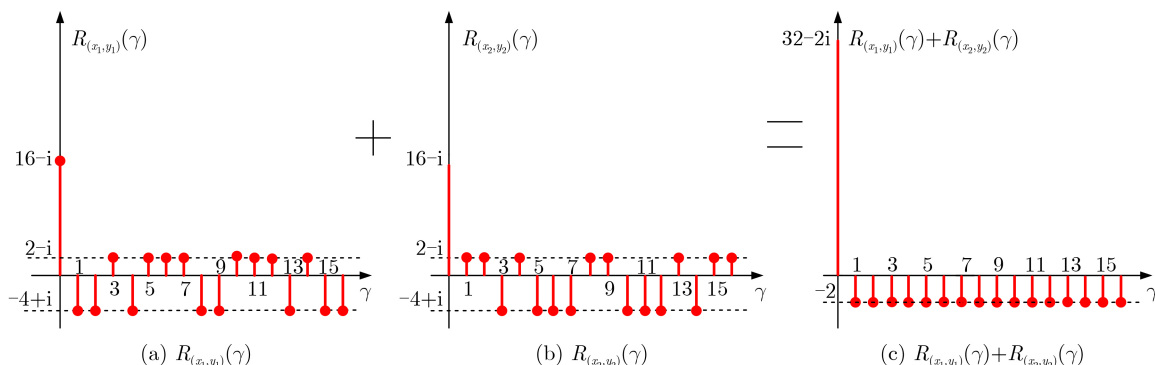


图2 失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的自相关函数值及两者之和

$$\begin{aligned} & \{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\} \\ & = \{(-11i - 11 - 1 - i - iii - i - i - 11 - 1i1, \\ & \quad - i1i - 11 - 1 - i - iii - i - i - 11 - 1i1); \\ & \quad (11i - i1 - i - 1 - 1ii - 1 - 1 - i1 - ii1, \\ & \quad i1i - i1 - i - 1 - 1ii - 1 - 1 - i1 - ii1)\} \quad (40) \end{aligned}$$

通过计算可得失配序列 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 的自相关函数及其和值如图2所示。

图2(a)为失配序列 (x_1, y_1) 的相关函数 $R_{(x_1, y_1)}(\gamma)$, 图2(b)为失配序列 (x_2, y_2) 的相关函数 $R_{(x_2, y_2)}(\gamma)$, 将两者按 $\gamma(0 \leq \gamma \leq 16)$ 取值对应相加可得图2(c), 由图2(c)可得 $C = 2(Q - 1) - 2i = 32 - 2i$, $\eta = -2$, 进而有 $|\eta| = 2$ 满足定理1的理论界, 由定义8可得 $\{(x_1, y_1); (x_2, y_2)\}$ 为理想平衡4元几乎失配互补对。

4 结束语

本文提出了平衡4元几乎失配互补对新类型序列, 通过Gray映射证明了平衡的周期为素数长 $Q \equiv 1 \pmod{4}$ 且 $\max_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) - \min_{k \in \{\pm 1, \pm i\}} N_k(0) \in \{0, 2, 4\}$ 4元几乎失配互补对的理论界。基

于此理论界, 利用4阶分圆类, 按 p 的奇偶性分别提出了周期为素数长 $Q = 4p + 1$ 满足理论界的理想平衡4元几乎失配互补对的构造方法。表5列出了目前已有的4元周期互补对同本文得到的理想平衡4元几乎失配互补对在周期长度、构造方法和平衡特性等方面的对比结果。在周期长度上, 除了文献[22,23]得到了奇数长4元周期互补对以外, 其他文献得到的多数为偶数长4元互补对, 本文的构造法弥补了奇数长4元周期互补对存在较少的不足; 在构造方法上, 文献[15,20-23]都是基于基序列进行扩展或Gray映射等间接方法, 所以在周期长度上无规律, 部分长度列举在表5中, 而本文利用4阶分圆类提出了直接构造方法, 序列长度有规律; 在平衡性上, 仅本文得到了平衡的4元互补对, 文献[15,20-23]均未考虑平衡性且不能得到平衡的4元互补对。所以通过本文的研究扩展了4元互补对的存在范围并为OFDM系统提供了更多互补序列的选择, 也为4元互补序列的研究提供了一个新的序列设计思路。

表5 4元周期互补对已有结果总结

文献	周期长度	方法	平衡性
文献[15,20]	2, 4, 8, 10, 16, 20, 26, 32, 34, 40, ...	Gray映射, 交织操作	不平衡
文献[21,22]	2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, 32, 36, 40, 44, 48, ...	Gray阵列扩展 Baker序列	不平衡
文献[23]	3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 41, 43, 45, 49 4, 6, 8, 10, ..., 30, 34, 36, 38, ...	Gray映射 生成序列扩展	不平衡
定理2	素数长 $Q = 4p + 1$, p 为奇数	4阶分圆	平衡
定理3	素数长 $Q = 4p + 1$, p 为偶数	4阶分圆	平衡

参考文献

- [1] FAN Pingzhi and DARNELL M. Sequence Design for Communications Applications[M]. Taunton, England: Research Studies Press LTD, 1996: 3-16.
- [2] PARRAUD P. On the non-existence of (almost-) perfect Quaternary sequences[C]. 14th International Symposium on Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Melbourne, Australia, 2001: 210-218.
- [3] SCHOLTZ R and WELCH L. GMW sequences (Corresp.)[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1984, 30(3): 548-553. doi: 10.1109/TIT.1984.1056910.
- [4] JANG J W, KIM Y S, KIM S H, et al. New sequences with ideal autocorrelation constructed from binary sequences with ideal autocorrelation[C]. IEEE International Symposium on Information Theory, Seoul, Korea, 2009: 278-281. doi: 10.1109/ISIT.2009.5205807.
- [5] LUKE H D. Binary odd-periodic complementary sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1997, 43(1): 365-367. doi: 10.1109/18.567768.
- [6] 李琦, 李鼎, 高军萍, 等. 零相关区屏蔽四元周期互补序列偶集设计研究[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(2): 318-324. doi: 10.11999/JEIT150636.
- [7] 李玉博, 许成谦, 李刚. 基于二元二值序列构造四元低相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(5): 1174-1178. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00980.
- [8] LI Yubo, XU Chengqian, and LI Gang. Construction of low correlation zone sequence set using binary sequence with ideal two-level autocorrelation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(5): 1174-1178. doi: 10.3724/SP.J.1146.2011.00980.
- [9] ARASU K T, ARYA D, and BAKSHI A. Constructions of punctured difference set pairs and their corresponding punctured binary array Pairs[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(4): 2191-2199. doi: 10.1109/

- TIT.2015.2403857.
- [9] SHEN Xiumin, JIA Yanguo, and SONG Xiaofei. Constructions of binary sequence pairs of period $3p$ with optimal three-level correlation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(10): 2150–2153. doi: [10.1109/LCOMM.2017.2700845](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2017.2700845).
- [10] PENG Xiuping, XU Chengqian, and ARASU K T. New families of binary sequence pairs with two-level and three-level correlation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2012, 58(11): 6968–6978. doi: [10.1109/TIT.2012.2210025](https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2210025).
- [11] PENG Xiuping, XU Chengqian, and LI Yubo. Mismatched binary periodic complementary pairs with period $3q$ [C]. Ninth International Workshop on Signal Design and its Applications in Communications (IWSDA), Dongguan, China, 2019: 1-5. doi: [10.1109/IWSDA46143.2019.8966097](https://doi.org/10.1109/IWSDA46143.2019.8966097).
- [12] SHEN Xiumin, JIA Yanguo, WANG Jiaqi, et al. New families of balanced sequences of even period with three-level optimal autocorrelation[J]. *IEEE Communications Letters*, 2017, 21(10): 2146–2149. doi: [10.1109/LCOMM.2017.2661750](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2017.2661750).
- [13] 刘涛, 许成谦, 李玉博. 基于差族构造高斯整数周期互补序列[J]. 电子与信息学报, 2019, 41(5): 1167–1172. doi: [10.11999/JEIT180646](https://doi.org/10.11999/JEIT180646).
LIU Tao, XU Chengqian, and LI Yubo. Constructions of Gaussian integer periodic complementary sequences based on difference families[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(5): 1167–1172. doi: [10.11999/JEIT180646](https://doi.org/10.11999/JEIT180646).
- [14] ADHIKARY A R, LIU Zilong, GUAN Yongliang, et al. Optimal binary periodic almost-complementary pairs[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(12): 1816–1820. doi: [10.1109/LSP.2016.2600586](https://doi.org/10.1109/LSP.2016.2600586).
- [15] JANG J W, KIM Y S, KIM S H, et al. New construction methods of periodic complementary sequence sets[J]. *Advances in Mathematics of Communications*, 2010, 4(1): 61–68. doi: [10.3934/amc.2010.4.61](https://doi.org/10.3934/amc.2010.4.61).
- [16] TANG Xiaohu and DING Cunsheng. New classes of balanced and almost balanced binary sequences with optimal autocorrelation value[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(12): 6398–6405. doi: [10.1109/TIT.2010.2081170](https://doi.org/10.1109/TIT.2010.2081170).
- [17] CUSICK T W, DING Cunsheng, and RENVALL A. Stream Ciphers and Number Theory[M]. Amsterdam: Elsevier, 1998.
- [18] 李玉博, 许成谦, 李刚, 等. 四元零相关区周期互补序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2013, 35(9): 2180–2186. doi: [10.3724/SP.J.1146.2012.01303](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2012.01303).
LI Yubo, XU Chengqian, LI Gang, et al. Constructions of periodic complementary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2013, 35(9): 2180–2186. doi: [10.3724/SP.J.1146.2012.01303](https://doi.org/10.3724/SP.J.1146.2012.01303).
- [19] 许成谦. 差集偶与最佳二进阵列偶的组合研究方法[J]. 电子学报, 2001, 29(1): 87–89. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2001.01.024](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2001.01.024).
XU Chengqian. Differences set pairs and approach for the study of perfect binary array pairs[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2001, 29(1): 87–89. doi: [10.3321/j.issn:0372-2112.2001.01.024](https://doi.org/10.3321/j.issn:0372-2112.2001.01.024).
- [20] ZENG Fanxin, ZENG Xiaoping, ZHANG Zhenyu, et al. Quaternary periodic complementary/Z-complementary sequence sets based on interleaving technique and Gray mapping[J]. *Advances in Mathematics of Communications*, 2012, 6(2): 237–247. doi: [10.3934/amc.2012.6.237](https://doi.org/10.3934/amc.2012.6.237).
- [21] GIBSON R G and JEDWAB J. Quaternary Golay sequence pairs I: Even length[J]. *Designs, Codes and Cryptography*, 2011, 59(1/3): 131–146. doi: [10.1007/s10623-010-9471-z](https://doi.org/10.1007/s10623-010-9471-z).
- [22] GIBSON R G and JEDWAB J. Quaternary Golay sequence pairs II: Odd length[J]. *Designs, Codes and Cryptography*, 2011, 59(1/3): 147–157. doi: [10.1007/s10623-010-9472-y](https://doi.org/10.1007/s10623-010-9472-y).
- [23] ZHOU Zhengchun, LI Jiangdong, YANG Yang, et al. Two constructions of periodic complementary pairs[J]. *IEEE Communications Letters*, 2018, 22(12): 2507–2510. doi: [10.1109/LCOMM.2018.2876530](https://doi.org/10.1109/LCOMM.2018.2876530).
- 彭秀平: 女, 1984年生, 博士, 副教授, 研究方向为编码理论、信号设计等。
郑德亮: 男, 1994年生, 硕士生, 研究方向为序列设计等。
李红晓: 女, 1995年生, 硕士生, 研究方向为序列设计等。

责任编辑: 余蓉