

基于分数阶傅里叶变换的低信噪比线性调频信号参数快速估计算法

刘利民^① 李豪欣^② 李琦^{*②} 韩壮志^① 高振斌^②

^①(陆军工程大学石家庄校区电子与光学工程系 石家庄 050003)

^②(河北工业大学电子信息工程学院 天津 300401)

摘要: 针对低信噪比线性调频信号参数估计精度低且运算量大的问题, 该文提出一种基于高效分数阶傅里叶变换(FRFT)和分数阶频谱4阶原点矩的快速估计算法。该算法通过判断调频斜率的正负, 以确定旋转阶次所在初始区间; 进而应用高效FRFT获得初始旋转阶次; 最终利用分数阶频谱4阶原点矩, 进一步确定搜索区间和步长, 实现精准搜索, 从而满足参数精度的要求。实验结果表明, 该算法尤其适用于低信噪比情况下的线性调频(LFM)信号检测与参数的准确估计, 而且运算量较低。

关键词: 线性调频信号; 高效分数阶傅里叶变换; 分数阶频谱4阶原点矩; 低信噪比

中图分类号: TN957.51

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)10-2798-07

DOI: 10.11999/JEIT200973

A Fast Signal Parameter Estimation Algorithm for Linear Frequency Modulation Signal under Low Signal-to-Noise Ratio Based on Fractional Fourier Transform

LIU Limin^① LI Haoxin^② LI Qi^② HAN Zhuangzhi^① GAO Zhenbin^②

^①(Department of Electronic and Optical Engineering, Army Engineering University, Shijiazhuang 050003, China)

^②(School of Electronics Information Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

Abstract: An algorithm based on high-efficiency FRactional Fourier Transform (FRFT) and fourth-order origin moments in the fractional-domain spectrum is proposed to estimate quickly the chirp signal at low signal-to-noise ratio. Firstly, the initial interval of the rotation order is determined by the sign of the FM slope. Then, the rotation order is estimated roughly by the efficient FRFT algorithm. Finally, the search interval and step size are determined according to the fourth-order origin moments of the spectrum in the fractional-domain. The simulation results show that the Linear Frequency Modulation (LFM) signal can be detected under low signal-to-noise ratio and the parameters of the signal can be estimated accurately using this algorithm, and the signal can be detected with a small amount of calculation.

Key words: Linear Frequency Modulation (LFM) signal; Effective FRactional Fourier Transform (FRFT); Fourth order origin moment of fractional spectrum; Low Signal-to-Noise Ratio (SNR)

1 引言

线性调频(Linear Frequency Modulation, LFM)信号是一种频率随时间线性变化的信号, 在通信、雷达、声呐等领域中的应用较为普遍, 其参数估计和信号检测是研究热点之一。目前, 针对LFM

信号的处理方法主要有短时傅里叶变换和Wigner-Ville分布。其中, 短时傅里叶变换^[1-3]无法同时兼顾较好的时域分辨率和频域分辨率, 且在低信噪比情况下估计效果不佳; 而Wigner-Ville分布^[4-6]在需要对多个分量的信号进行处理的情况下, 容易出现交叉项干扰问题, 且运算较为复杂。分数阶傅里叶变换^[7-11](FRactional Fourier Transform, FRFT)是一种新兴的时频分析工具, 它不同于传统的傅里叶变换, 而是将变换阶次作为自变量, 使得线性调频信号在匹配的FRFT阶次下表现为冲激信号, 故能量聚集性较强。正是利用这一特性, FRFT可用来对线性调频信号进行检测和参数估计, 但是由于需要运用

收稿日期: 2020-11-12; 改回日期: 2021-08-16; 网络出版: 2021-08-27

*通信作者: 李琦 liqi@hebut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61601496), 河北省自然科学基金(F2019506037)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61601496), The Nature Science Foundation of Hebei Province (F2019506037)

2维搜索确定最佳旋转角度，因此计算量较大。

针对这一问题，文献[12]提出一种欠采样快速检测算法，通过减少采样点数提升FRFT的运算速度，但该算法在信噪比较低时无法实现信号参数的正确估计。文献[13]提出一种基于分数阶域的黄金分割的搜索方法，虽然可以降低计算成本，但也不适用于信噪比较低的情况。文献[14]提出一种基于修正的功率谱平滑滤波的高效FRFT算法，该算法虽然能够较快地实现LFM信号的检测和估计，但是对于信噪比小于-3 dB的信号参数估计效果欠佳。文献[15]基于分数阶功率谱幅值与旋转角度之间的变换规律，提出一种瞄准搜索方法，尽管可以快速地搜寻到最佳旋转角度，但当信噪比较低时，存在局部最优问题，还是无法保证参数的估计精度。

在以上研究的背景下，针对低信噪比情况下线性调频信号参数快速估计问题，本文提出一种基于高效FRFT和分数阶频谱4阶原点矩联合估计算法。本算法在高效FRFT算法的基础上，根据LFM信号的时频分布与FRFT之间的关系特点，确定初始旋转阶次和区间，并结合信号分数阶频谱4阶原点矩良好的抗噪声性能和冲激特性，精准选择合适的搜索区间和搜索步长，实现对低信噪比LFM信号参数精确且快速的估计。

2 LFM信号分数阶频谱特性分析

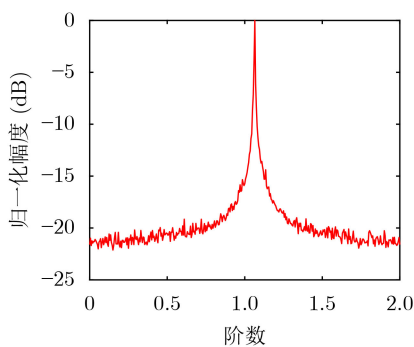
2.1 分数阶频谱幅度特性

设线性调频信号模型为

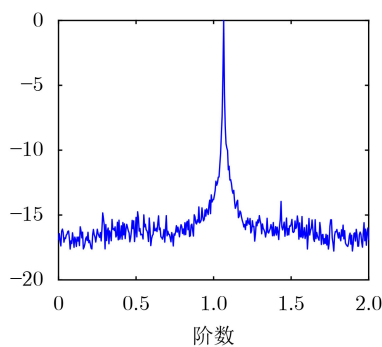
$$x(t) = \exp(j2\pi f_0 t + \pi k t^2) + n(t) \quad (1)$$

其中， f_0 为线性调频信号的初始频率， k 为调频斜率， $n(t)$ 为高斯白噪声。对该信号在角度 α ($\alpha = p \times \pi/2$, p 为阶次)下作FRFT可得频谱幅度表达式为

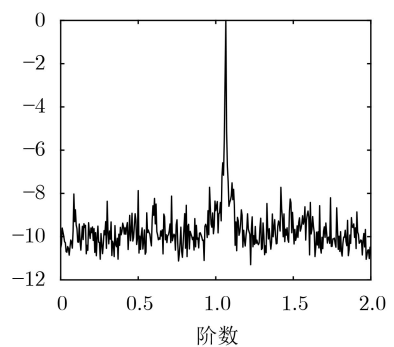
$$|X_\alpha(u)| = A \sqrt{\frac{1 - j \cot \alpha}{2(k + \cot \alpha)}} \cdot \left\{ [c(T_1) + c(T_2)]^2 + [s(T_1) + s(T_2)]^2 \right\}^{1/2} \quad (2)$$



(a) SNR=8 dB



(b) SNR=0 dB



(c) SNR=-8 dB

图1 FRFT频谱幅度与阶次关系图

其中

$$c(T) = \int_0^T \cos\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) dz \quad (3)$$

$$s(T) = \int_0^T \sin\left(\frac{\pi}{2} z^2\right) dz \quad (4)$$

对信噪比分别为8 dB, 0 dB, -8 dB的线性调频信号在[0, 2]的阶次区间内作FRFT运算，并对不同阶次下的分数阶频谱幅度最大值归一化处理，得到的分数阶频谱幅度与阶次关系曲线如图1所示。

由图1可以看出：

(1)对于同一线性调频信号，不同信噪比情况下的最优旋转阶次保持不变；当旋转阶次等于最优阶次时，线性调频信号的能量得到充分集中，其分数阶频谱幅值最大，呈现冲激函数特性。

(2)当旋转阶次距离最优旋转阶次较远时，信号的能量被平均的分散在频谱中，其分数阶频谱幅度变小，且幅度变化速率较慢；随着旋转阶次逐渐靠近最优旋转阶次，分数阶频谱幅度的变化速率越来越快。

(3)当信噪比较低时，由于噪声能量较大且呈现随机特性，导致归一化分数阶频谱幅度变化不再呈现明显分布规律。

2.2 分数阶频谱4阶原点矩

信号 $x(t)$ 的分数阶频谱4阶原点矩^[16]定义为

$$\eta(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_\alpha(u)|^4 du \quad (5)$$

当旋转角 α 为最佳旋转角 α_0 时，分数阶频谱4阶原点矩为

$$\eta(\alpha_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} |X_{\alpha_0}(u)|^4 du = \frac{2A^4 T^3}{3 \sin \alpha_0} \quad (6)$$

其中， A 为信号幅值， T 为信号调频周期。此时，

LFM信号的分数阶频谱4阶原点矩取得最大值，能量聚集效果最好。当旋转角 $\alpha \neq \alpha_0$ 时，LFM信号的分数阶频谱4阶原点矩为

$$\eta(\alpha) = \frac{2A^2\rho}{\sin|\alpha - \alpha_0|} \quad (7)$$

其中

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{t_d f_s + \frac{k^2 t_d^3}{f_s}} \quad (8)$$

其中， t_d 为观测时长， f_s 为采样频率。当 α 距离 α_0 越近， $\eta(\alpha)$ 越大。图2给出了信噪比为8 dB, 0 dB和-8 dB情况下信号的分数阶频谱幅度和分数阶频谱4阶原点矩对比情况，相比于分数阶频谱幅度特性，分数阶频谱4阶原点矩具有以下优点：

(1) 当旋转阶次向最优阶次变化时，分数阶频谱4阶原点矩的变化速率更快。

(2) 当信噪比较大时，分数阶频谱4阶原点矩幅度变化更为平滑，且表现出更强的冲击性。

综上所述，信号的分数阶频谱4阶原点矩具有良好的抗噪声性能，因此更适合用于低信噪比情况下最优阶次的快速估计。

2.3 高效FRFT

(1) 基本原理。如图3所示， φ 为LFM信号的W-V分布和时间轴之间的夹角， L_φ 为归一化时频

长度，则该LFM信号做FRFT的最优旋转角为 φ ，设在旋转角度为 α 下对信号作FRFT处理，此时的LFM信号归一化FRFT长度为 L_α 。

分析图4可得，LFM信号的归一化FRFT长度与W-V分布的时频长度之间的几何关系为

$$L_\alpha = |L_\varphi \sin(\varphi - \alpha)| \quad (9)$$

当 $\alpha = \varphi$ 时， $L_\alpha = 0$ ，说明此时LFM信号在该 α 旋转角度下作FRFT得到的频谱表现为冲激函数，即为最佳旋转角度。因此，选取两个旋转角度 α_1 和 α_2 ，并求出 L_{α_1} 和 L_{α_2} ，可得最优旋转角为

$$\hat{\alpha} = \arccot \frac{L_{\alpha_1} \cos \alpha_2 + L_{\alpha_2} \cos \alpha_1}{L_{\alpha_1} \sin \alpha_2 + L_{alpha_2} \sin \alpha_1} \quad (10)$$

LFM信号的调频斜率的估计值为

$$\hat{k} = -\cot \hat{\alpha} \quad (11)$$

对信号在 $\hat{\alpha}$ 角度下再作一次FRFT，即可得出LFM信号的中心频率。

(2) 算法不足。高效FRFT算法只需进行3次FRFT就可实现对LFM信号的检测，使得计算量大大减小，但其容易受到噪声的影响。旋转阶次的估计精度取决于在两个旋转角度下估计出的频谱宽度 L_{α_1} 和 L_{α_2} 的精度。当信噪比较低时，噪声会对 L_{α_1} 和 L_{α_2} 的估计精度产生一定影响，导致最终LFM信号参数估计出现较大偏差。文献[14]中指出该算

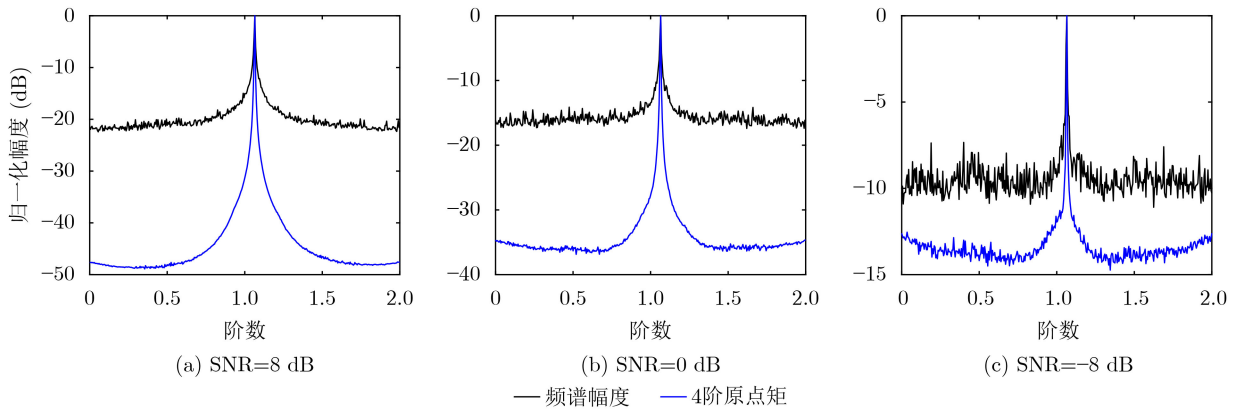


图2 归一化幅度对比图

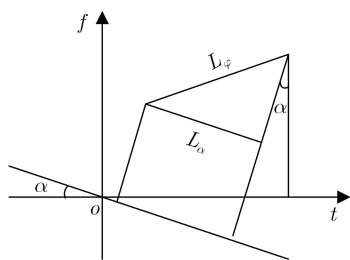


图3 FRFT与W-V分布关系图

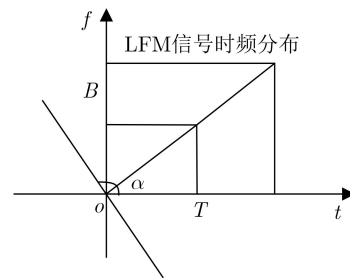


图4 LFM信号时频分布

法能在信噪比大于等于-3 dB时对信号调频斜率和中心频率实现准确估计，而在信噪比为-3 dB以下时参数的估计误差较大。

3 改进LFM信号参数估计算法

本文利用分数阶频谱4阶原点矩的良好特性，结合高效FRFT算法对最优阶次进行精准搜索，实现对低信噪比情况下LFM信号参数精确且快速的估计。

3.1 改进算法基本原理

根据2.2节的分析可知，在低信噪比情况下，分数阶频谱4阶原点矩相较于分数阶频谱幅度性能更佳，因此，本文利用分数阶频谱4阶原点矩对FRFT的最佳阶次进行估计。

(1)确定初始区间和初始旋转阶次。图4为LFM信号的时频分布与最佳旋转角度的关系图，根据FRFT性质可知，当LFM信号的调频斜率为正时，最佳旋转角度 α_0 处于 $[\pi/2, \pi]$ 内，即对应阶次所在区间应为 $[1, 2]$ ；当LFM信号的调频斜率为负时，最佳阶次所在区间应为 $[0, 1]$ 。因此，可对LFM信号进行一次短时傅里叶变换判断调频斜率的正负，确定最佳阶次所在的初始区间。选取窗函数为矩形窗函数，其公式表示为

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

式中， M 为窗口宽度。本文设置窗函数的窗口宽度为 $N/2$ ，其中 N 为一个调频周期的采样点数。为保证准确性，在短时傅里叶变换后，分别对得到的两段LFM信号的功率谱进行平滑滤波，采用的平滑滤波公式为

$$P_s(n) = \frac{1}{M+1} \sum_{-M/2}^{M/2} |P(\text{mod}(n+m, N))|^2, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (13)$$

其中， $P_s(n)$ 为平滑之后的功率谱， $P(n)$ 为信号的频谱， M 为平滑窗长度， N 为信号长度。经过平滑滤波后分别找出频谱最大值所对应的频率分量 f_1 和 f_2 ，并进行比较，若 $f_2 > f_1$ ，则说明调频斜率为正，反之说明调频斜率为负，即可确定初始区间。确定初始区间后，利用高效FRFT估计旋转阶次 p_0 ，并令其为初始搜索中心。

(2)精准搜索。确定初始区间和初始阶次后，需要进一步搜索来获得最优估计阶次。在这一过程中，搜索区间和搜索步长的选取至关重要。由分数阶频谱4阶原点矩特性可知，若 p_0 距离最佳阶次较近，该阶次下的分数阶频谱4阶原点矩幅值较大；若 p_0 距离最佳阶次较远，该阶次下的分数阶频谱

4阶原点矩幅值较小。因此，为实现精准搜索，本文采用以下方法确定区间和步长。

步长的确定方法：为使搜索结果更加精确，先选取一个较大的步长作为初始值，本文选取的初始阶次步长为 $\Delta p = 0.1$ 。在 p_0 两侧分别取值 $p_1 = p_0 - \Delta p$ 和 $p_2 = p_0 + \Delta p$ ，计算这3个阶次下的分数阶频谱4阶中心矩并比较大小，判断 p_0 与最佳阶次之间的误差是否小于 Δp ，进而确定该步长是否满足搜索要求。若 p_0 处幅值最大，则说明误差小于 Δp ，该步长已不适用于本次搜索需求，因此保持搜索中心不变，并缩小步长 Δp ；否则说明 Δp 为适合的搜索步长，同时确定搜索区间，以该步长进行最大值搜索，确定新的搜索中心。

区间的确定方法：若依次递增，则说明最佳阶次位于 p_0 右侧，所在区间为 $[p_0, p_0 + 10\Delta p]$ ；反之最佳阶次位于 p_0 左侧，所在区间为 $[p_0 - 10\Delta p, p_0]$ 。

3.2 改进算法流程及步骤

根据上述原理，改进算法流程如图5所示。其具体步骤如下：

步骤1 确定初始区间。利用短时傅里叶变换判断LFM信号调频斜率的正负，确定初始区间为 $[0, 1]$ 或 $[1, 2]$ 。

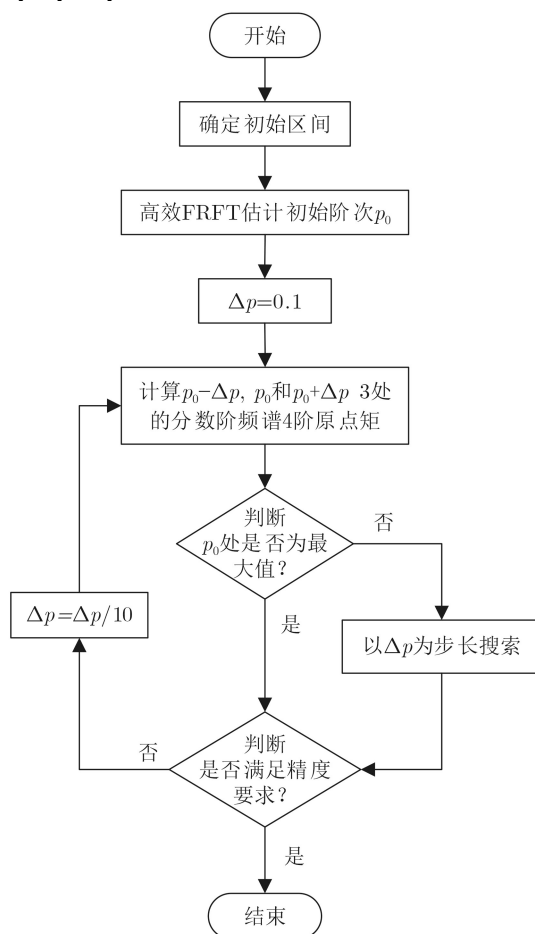


图5 改进算法流程图

步骤2 确定初始搜索中心和精度。利用高效FRFT估计旋转阶次 p_0 ，确定初始搜索中心。

步骤3 确定搜索区间和步长。令步长 Δp 的初始值为0.1，并计算 $p_0 - \Delta p, p_0, p_0 + \Delta p$ 3个阶次下的4阶中心矩。若 p_0 处的值最大，则转向步骤4；若依次递增，则搜索区间为 $[p_0, p_0 + 10\Delta p]$ ；若依次递减，则搜索区间为 $[p_0 - 10\Delta p, p_0]$ ，递增和递减两种情况转步骤5。

步骤4 搜索中心保持不变，更新搜索步长 $\Delta p = \Delta p/10$ ，重复步骤3。

步骤5 在满足初始区间的前提下，根据步长 Δp ，在搜索区间内进行分数阶频谱4阶原点矩最大值搜索，对搜索中心 p_0 进行更新，并将搜索步长改变为 $\Delta p = \Delta p/10$ ，重复步骤3。

步骤6 重复步骤3—步骤5，直至满足误差要求。

3.3 改进算法运算量分析

算法的运算量与所需阶次精度有关。首先，利用高效FRFT算法估计初始搜索中心需要进行2次FRFT；其次，每次确定搜索区间需要进行3次FRFT和3次4阶中心矩计算；最后，每次区间搜索需要进行10次FRFT和10次4阶中心矩计算。设信号的采样点数为 N ，则进行1次FRFT变换需要的计算量为 $O(N\log_2 N)$ ，进行1次FRFT变换并求4阶原点矩需要的运算量为 $O(N\log_2 N + N)$ 。在最高阶次精度要求下，算法最多需要的运算量为 $O(54N\log_2 N + 52N)$ 。对于传统的FRFT 2维搜索算法，达到0.0001的精度需要2000次FRFT运算，计算量为 $O(2000N\log_2 N)$ ，可见相比于传统的FRFT 2维搜索算法，改进算法的运算量大大减少，可对信号实现较为快速的估计。

4 实验结果及分析

本文对改进算法的抗噪声性能、参数估计性能和计算量进行了实验，并进行结果分析。

4.1 算法的抗噪声性能验证

为验证改进算法的抗噪声性能，实验中选取的LFM信号为： $x(t) = \exp(j2\pi \times 1500t + j\pi \times 1000t^2)$ ， $t \in [-0.25, +0.25]$ ，采样频率为5000 Hz。在实验过程中，设置虚警概率为 10^{-6} ，分别采用改进算法和文献[14]中的高效FRFT算法在 $-15 \sim 10$ dB的信噪比区间内对LFM信号进行仿真分析，且在每个信噪比条件下均进行1000次蒙特卡洛仿真实验，得到的检测性能曲线为图6。仿真结果表明，相比于高效FRFT算法，改进算法的检测性能得到有效改善。当信噪比大于等于 -10 dB时，检测概率在95%以上，可基本实现对LFM信号的检测。

4.2 算法参数估计性能验证

为验证改进算法的参数估计性能，选取LFM信号为： $x(t) = \exp(j2\pi \times 1500t + j\pi \times 1000t^2)$ ， $t \in [-0.25, +0.25]$ ，采样频率为5000 Hz。对信号在 $-15 \sim 10$ dB的信噪比区间内采用高效FRFT算法和改进算法进行仿真比较分析。图7为两种算法估计出的调频斜率误差对比图和中心频率误差对比图。实验结果表明，与高效FRFT算法相比，改进算法能提升调频斜率和中心频率的估计精度，且在信噪比较低情况下，提升效果更加明显；当信噪比为 -10 dB时，仍能较为准确地估计出LFM信号的参数。

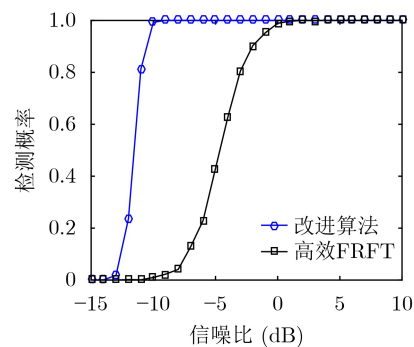


图6 算法检测性能曲线

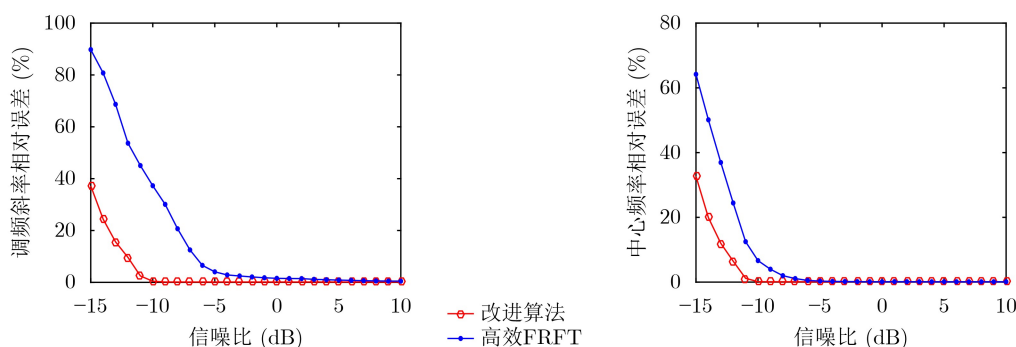


图7 两种算法对比

4.3 算法运算量验证

为验证改进算法的运算量, 该实验将信噪比设为-5 dB, 选取LFM信号为: $x(t) = \exp(j2\pi \times 1500t + j\pi \times 1000t^2)$, $t \in [-0.25, +0.25]$, 采样频率为5000 Hz。在允许阶次误差分别为0.01, 0.001, 0.0001 3种情况

下, 对信号采用高效FRFT, FRFT 2维搜索算法与改进算法进行对比研究。仿真结果如表1所示, 其中, \hat{k} 和 \hat{f} 分别为调频斜率和中心频率的估计值, k_{error} 和 f_{error} 分别为调频斜率相对误差和中心频率相对误差。

表 1 3种算法对比仿真结果

估计方法	允许阶次误差	\hat{k} (Hz/t)	\hat{f} (Hz)	k_{error} (%)	f_{error} (%)	FRFT运算次数
高效FRFT算法	-	1537.2000	1580.3	53.7244	5.3565	3
FRFT 2维搜索	<0.0100	1104.0000	1511.1	10.4010	0.7417	201
FRFT 2维搜索	<0.0010	1024.6000	1501.8	2.4580	0.1214	2001
FRFT 2维搜索	<0.0001	1003.9000	1501.5	0.3950	0.1007	20001
改进搜索算法	<0.0100	940.2061	1510.2	5.9794	0.6800	7
改进搜索算法	<0.0010	993.1624	1501.1	0.6838	0.0754	20
改进搜索算法	<0.0001	1002.3000	1500.8	0.2281	0.0531	43

从运算速度角度分析, 改进算法的运算量大于高效FRFT, 但相对于2维搜索算法大幅度减小, 具有实时检测性能。从参数估计精度角度分析, 采用高效FRFT算法估计的调频斜率和中心频率误差过大, 失去估计作用; 随着允许阶次误差的缩小, FRFT 2维搜索算法和改进算法估计的参数误差均有所下降, 但相比较于FRFT 2维搜索算法, 改进算法的参数估计误差更低, 更适用于需要高精度估计参数的情况。

5 结论

本文提出一种LFM信号检测与参数快速估计方法, 通过判断LFM信号调频斜率正负确定最佳阶次所在初始区间, 并结合分数阶频谱4阶原点矩性质, 对高效FRFT估计的旋转阶次所在区间进行判断, 精准确定合适的搜索区间和步长, 实现最佳阶次的快速搜索。本文所提算法能够对信噪比为-10 dB及以上的信号实现参数的高精度估计, 且运算量较低, 在需要对低信噪比LFM信号参数进行精确估计的情况下, 算法的实时处理性能更好。

参考文献

- [1] DUAN Yu, WANG Jinzhen, SU Shaoying, *et al.* Detection of LFM signals in low SNR based on STFT and wavelet denoising[C]. 2014 International Conference on Audio, Language and Image Processing, Shanghai, China, 2014: 921-925.
- [2] YIN Qingbo, SHEN Liran, LU Mingyu, *et al.* Selection of optimal window length using STFT for quantitative SNR analysis of LFM signal[J]. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2013, 24(1): 26-35. doi: 10.1109/JSEE.2013.00004.
- [3] XU Fenfei, BAO Qinglong, CHEN Zengping, *et al.* Parameter estimation of multi-component LFM signals based on STFT+Hough transform and fractional fourier transform[C]. The 2nd IEEE Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC), Xi'an, China, 2018: 839-842.
- [4] ZHANG Zhichao. Linear canonical Wigner distribution based noisy LFM signals detection through the output SNR improvement analysis[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(21): 5527-5542. doi: 10.1109/TSP.2019.2941071.
- [5] WU Yushuang and LI Xiukun. Elimination of cross-terms in the Wigner-Ville distribution of multi-component LFM signals[J]. *IET Signal Processing*, 2017, 11(6): 657-662. doi: 10.1049/iet-spr.2016.0358.
- [6] ZHANG Zhichao. The optimal linear canonical Wigner distribution of noisy linear frequency-modulated signals[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2019, 26(8): 1127-1131. doi: 10.1109/LSP.2019.2922510.
- [7] HUANG Xiang, ZHANG Linrang, ZHANG Juan, *et al.* Efficient angular chirp-Fourier transform and its application to high-speed target detection[J]. *Signal Processing*, 2019, 164: 234-248. doi: 10.1016/j.sigpro.2019.06.011.
- [8] YANG Tiantian, SHAO Jie, CHEN Yongliang, *et al.* Parameter estimation of multi component LFM signals based on nonlinear mode decomposition and FRFT[C]. The 10th International Conference on Advanced Computational Intelligence (ICACI), Xiamen, China, 2018: 204-209.
- [9] MIAO Hongxia, ZHANG Feng, and TAO Ran. Fractional Fourier analysis using the Möbius inversion formula[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(12): 3181-3196. doi: 10.1109/TSP.2019.2912878.
- [10] LIU Yifei, ZHAO Yuan, ZHU Jun, *et al.* Iterative high-accuracy parameter estimation of uncooperative OFDM-

- LFM radar signals based on FRFT and fractional autocorrelation interpolation[J]. *Sensors*, 2018, 18(10): 3550. doi: [10.3390/s18103550](https://doi.org/10.3390/s18103550).
- [11] 赵兴浩, 邓兵, 陶然. 分数阶傅里叶变换数值计算中的量纲归一化[J]. 北京理工大学学报, 2005, 25(4): 360–364. doi: [10.3969/j.issn.1001-0645.2005.04.019](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-0645.2005.04.019).
- ZHAO Xinghao, DENG Bing, and TAO Ran. Dimensional normalization in the digital computation of the fractional fourier transform[J]. *Transactions of Beijing Institute of Technology*, 2005, 25(4): 360–364. doi: [10.3969/j.issn.1001-0645.2005.04.019](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-0645.2005.04.019).
- [12] 仇兆扬, 陈蓉, 汪一鸣. 基于FRFT的线性调频信号欠采样快速检测方法[J]. 电子学报, 2012, 40(11): 2165–2170.
- QIU Zhaoyang, CHEN Rong, and WANG Yiming. Fast detection of LFM signal based on FRFT and sub-nyquist sampling[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2012, 40(11): 2165–2170.
- [13] ALDIMASHKI O and SERBES A. Performance of chirp parameter estimation in the fractional fourier domains and an algorithm for fast chirp-rate estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2020, 56(5): 3685–3700. doi: [10.1109/TAES.2020.2981268](https://doi.org/10.1109/TAES.2020.2981268).
- [14] 黄响, 唐世阳, 张林让, 等. 一种基于高效FRFT的LFM信号检测与参数估计快速算法[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(12): 2905–2911.
- HUANG Xiang, TANG Shiyang, ZHANG Linrang, *et al.* A fast algorithm of LFM signal detection and parameter estimation based on efficient FRFT[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(12): 2905–2911.
- [15] 宋耀辉, 黄仰超, 张衡阳, 等. 基于FRFT的多分量LFM信号检测与参数估计方法[J]. 北京航空航天大学学报, 2020, 46(6): 1221–1228. doi: [10.13700/j.bh.1001-5965.2019.0430](https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2019.0430).
- SONG Yaohui, HUANG Yangchao, ZHANG Hengyang, *et al.* Multicomponent LFM signal detection and parameter estimation method based on FRFT[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2020, 46(6): 1221–1228. doi: [10.13700/j.bh.1001-5965.2019.0430](https://doi.org/10.13700/j.bh.1001-5965.2019.0430).
- [16] YIN Zhiping, ZHANG Dongchen, CHEN Weidong, *et al.* LFM signal detection using the origin moment of fractional spectrum[C]. 2008 9th International Conference on Signal Processing, Beijing, China, 2008: 191–194.
- 刘利民: 男, 1971年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为雷达对抗、雷达信号处理.
- 李豪欣: 女, 1997年生, 硕士, 研究方向为雷达信号处理.
- 李琦: 男, 1974年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为雷达信号处理、信息与编码理论.
- 韩壮志: 男, 1972年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为雷达信号处理、武器系统性能评估.
- 高振斌: 男, 1973年生, 教授, 硕士生导师, 研究方向为雷达信号处理.

责任编辑: 余蓉