

# 一类 Wiener 非线性时变系统的迭代学习辨识

仲国民\* 孙明轩

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

**摘要:** 针对Wiener非线性时变系统的参数辨识问题, 该文提出一种基于重复轴的迭代学习算法来实现对时变甚至突变参数的估计。文中将维纳系统输出非线性部分的反函数进行多项式展开, 进而构造了回归模型, 未知参数及中间变量用其估计替代, 分别给出了采用迭代学习梯度算法和迭代学习最小二乘算法实现时变参数辨识的方法。仿真结果表明, 与带遗忘因子的递推算法和迭代学习梯度算法相比, 迭代学习最小二乘算法更具有参数估计收敛速度快, 辨识精度高, 系统输出误差小等优势, 验证了所提学习算法的有效性。

**关键词:** 时变参数; Wiener系统; 梯度算法; 最小二乘; 迭代学习

中图分类号: TP181

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)09-2594-07

DOI: 10.11999/JEIT200882

## Iterative Learning Identification for a Class of Wiener Nonlinear Time-Varying Systems

ZHONG Guomin SUN Mingxuan

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023, China)

**Abstract:** For the parameters identification of Wiener nonlinear time-varying systems, iterative learning algorithms based on repeated axes are proposed to estimate the time-varying or even abrupt parameters. At first, the output nonlinear part of the Wiener system undertaken is tackled based on polynomial expansion, and then the regression model is constructed, the unknown parameters and intermediate variables are replaced by their estimates. Both iterative learning gradient and iterative learning least square algorithms are used to conduct the identification of the time-varying systems. Compared with the recursive algorithm with forgetting factor and iterative learning gradient algorithm, the simulation results demonstrate that the iterative learning least squares algorithm can perform high identification accuracy and efficiency, being of fast convergence speed and less resultant system output error, which verifies the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Time-varying parameters; Wiener systems; Gradient algorithms; Least squares; Iterative learning

### 1 引言

实际生产过程中, 常常遇到时变系统。近年来, 线性系统时变参数的辨识问题得到了广泛研究, 带遗忘因子的迭代算法、迭代学习辨识算法等较好地解决了线性系统时变参数的辨识问题。但是, 通常的工业生产过程大多具有强烈的非线性特征, 而线性模型难以满足非线性过程的描述和研究, 因此非线性系统的参数辨识逐渐成为系统辨识中较热门的研究课题之一。

线性系统的模型结构比较简单, 可以用统一的模型描述, 如差分方程、状态空间模型等<sup>[1]</sup>, 而非

线性系统结构复杂, 难以用统一的模型来描述, 在诸如化学过程、生物和生理系统等采用较普遍的是块结构非线性系统模型<sup>[2]</sup>。根据具体的连接形式, 块结构非线性模型可以分为: Hammerstein模型(输入非线性)、Wiener模型(输出非线性)以及其组合形式Hammerstein-Wiener(N-L-N)模型和 Wiener-Hammerstein(L-N-L)模型。Wiener系统作为典型的非线性系统, 在工业生产过程中有着广泛的应用<sup>[3]</sup>, 如电气控制<sup>[4]</sup>、模拟谷氨酸的发酵过程<sup>[5]</sup>等, 因此文中主要探讨Wiener非线性模型的辨识问题, Wiener非线性模型由一个动态线性子系统串联一个静态的非线性环节构成, 通常用来描述在输出部分存在非线性元素的系统, 因此也称为输出非线性模型, 在工业生产中广泛采用。

近年来, Wiener及其组合形式模型的参数估计问题在系统辨识领域越来越得到关注<sup>[6-8]</sup>。基于

收稿日期: 2020-10-16; 改回日期: 2021-03-11; 网络出版: 2021-04-15

\*通信作者: 仲国民 zgm@zjut.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(62073291)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China(62073291)

最小二乘辨识算法和迭代梯度算法<sup>[9]</sup>, 将 Wiener 非线性系统双线性代价函数分成两个线性代价函数对模型辨识, 同时也有提出极大似然法辨识 Wiener 模型<sup>[10]</sup>、递推增广最小二乘法辨识一类带滑动平均噪声的经典 Wiener 非线性模型<sup>[11]</sup>, 以及通过输入注入法实现 Wiener 非线性模型的辨识<sup>[12]</sup>。更进一步地, 针对 Wiener 模型非线性部分具有反函数的问题, 现有的研究成果中, blind 方法用于辨识非线性部分有反函数的 Hammerstein-Wiener 模型<sup>[13]</sup>, 针对具有不可逆多项式和有限脉冲响应(FIR)的 Wiener 非线性系统, 现有文献提出离线辨识的方法<sup>[14]</sup>, 并采用多指标表示法, 估计非线性与线性动态部分系数的乘积。另外, 也有针对 Wiener 模型非线性部分的反函数进行多项式展开, 与原线性部分整合形成两个块, 借鉴辅助模型的思想, 采用了递推最小二乘算法<sup>[15]</sup>确定两个块的系数, 从而实现的 Wiener 非线性系统的模型辨识<sup>[9]</sup>。以上方法有效解决了定常系统的参数辨识问题, 但是在处理带时变参数的 Wiener 非线性系统时, 上述方法不具备完全跟踪能力, 而带遗忘因子的辅助模型递推最小二乘算法, 由于在修正项中引入了遗忘因子, 使其具备了跟踪缓变参数的能力, 但是该算法在辨识突变的时变参数时, 跟踪性能较差。

本文提出的迭代学习辨识方法, 指可简化(Reducible)非平稳过程的参数估计, 其动机来自迭代学习控制的基本思想<sup>[16]</sup>。当动态系统在有限区间上重复运行时, 其时变参数随时间而变化, 但其变化规律在每一次运行时相同, 沿重复轴来看, 固定时刻对应的参数是一固定值。它启发我们将时间轴上递推算法的思想进一步运用于重复轴, 构建沿重复轴的“递推”算法<sup>[17]</sup>。

本文考虑了有限区间上重复运行的一类时变 Wiener 非线性系统, 借助 Wiener 系统定常参数的辨识思想, 先将非线性部分反函数通过多项式展开, 进而形成回归模型, 推导了时变 Wiener 非线性系统基于“重复轴”的迭代学习梯度算法(Gradient based Iterative Learning algorithm for Wiener systems, W-ILG)和迭代学习最小二乘算法(Least Squares based Iterative Learning algorithm for Wiener systems, W-ILLS), 解决了时变 Wiener 非线性系统的参数估计问题。仿真结果表明, 对比带遗忘因子的递推算法(Recursive Least Squares algorithm with Forgetting factor for Wiener systems, W-FRLS), 迭代学习梯度算法和迭代学习最小二乘算法能够获得一类 Wiener 非线性系统时变参数的一致估计。对比3种算法的仿真结果, 进一步验证了迭代学习最小二乘算法在非线形系统时变参数估计方面的有效性。

## 2 问题描述

考虑如下重复运行的时变维纳非线性系统, 其线性动态子系统描述为

$$A(q^{-1}, t)r_k(t) = B(q^{-1}, t)u_k(t) \quad (1)$$

加入噪声量后,

$$x_k(t) = r_k(t) + v_k(t) \quad (2)$$

进一步, 动态非线性系统可描述为

$$y_k(t) = f(x_k(t), t) \quad (3)$$

其中,  $u_k(t)$ 和 $y_k(t)$ 分别表示系统第 $k$ 次运行的输入和输出,  $f(\cdot)$ 为非线性函数,  $r_k(t)$ 是线性系统第 $k$ 次运行的输出,  $x_k(t)$ 是未知的中间变量,  $v_k(t)$ 是零均值, 方差为 $\sigma^2$ 的白噪声序列。 $A(q^{-1}, t)$ 和 $B(q^{-1}, t)$ 是延迟算子为 $q^{-1}$ 的时变多项式, 具体形式为

$$A(q^{-1}, t) = 1 + a_1(t)q^{-1} + a_2(t)q^{-2} + \dots + a_{n_a}(t)q^{-n_a}, \\ B(q^{-1}, t) = b_1(t)q^{-1} + b_2(t)q^{-2} + \dots + b_{n_b}(t)q^{-n_b}.$$

假设非线性函数 $f$ 可逆,  $A(q^{-1}, t)$ 和 $B(q^{-1}, t)$ 的阶数已知, 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 用多项式展开<sup>[18]</sup>表示为

$$x_k(t) = f^{-1}(y_k(t), t) = \sum_{l=1}^m c_l(t)y^l(t) \quad (4)$$

$m$ 表示已知非线性函数的阶数。

由式(1)和式(2)可得

$$A(q^{-1}, t)x_k(t) = B(q^{-1}, t)u_k(t) + A(q^{-1}, t)v_k(t)$$

进一步, 可得

$$x_k(t) = [1 - A(q^{-1}, t)]x_k(t) + B(q^{-1}, t)u_k(t) \\ + A(q^{-1}, t)v_k(t) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t)x_k(t-i) \\ + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(t)u_k(t-j) + \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t)v_k(t-i) \\ + v_k(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t)[v_k(t-i) - x_k(t-i)] \\ + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(t)u_k(t-j) + v_k(t) \quad (5)$$

联立式(4)和式(5)可以得到

$$\sum_{l=1}^m c_l(t)y^l(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t)[v_k(t-i) - x_k(t-i)] \\ + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(t)u_k(t-j) + v_k(t) \quad (6)$$

由于 $x_k(t)[r_k(t)]$ 是不可测的中间量, 式(6)中的参数如不加上其他限定条件则无法直接计算。为了解决这个问题, 把式(6)左边部分的系数分成两部分, 更一般地, 假设非线性部分的第1项系数给定 $c_1(t) = 1$ , 则式(6)可以变换为

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t)[v_k(t-i) - x_k(t-i)] + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(t)u_k(t-j) - \sum_{l=2}^m c_l(t)y_k^l(t) + v_k(t) \quad (7)$$

定义参数矢量:

$$\boldsymbol{\theta}_{1,k}(t) := [a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n_a}(t), b_1(t), b_2(t), \dots, b_{n_b}(t)]^T \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$n_1 = n_a + n_b,$$

$$\boldsymbol{\theta}_k(t) := [a_1(t), a_2(t), \dots, a_{n_a}(t), b_1(t), b_2(t), \dots,$$

$$b_{n_b}(t), c_2(t), c_3(t), \dots, c_m(t)]^T \in \mathbb{R}^n,$$

信息矢量为:

$$\boldsymbol{\phi}_{1,k}(t) := [v_k(t-1) - x_k(t-1), v_k(t-2) - x_k(t-2), \dots, v_k(t-n_a) - x_k(t-n_a),$$

$$u_k(t-1), u_k(t-2), \dots, u_k(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_1}$$

$$\boldsymbol{\phi}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t), -y_k^2(t), -y_k^3(t), \dots, -y_k^m(t)] \in \mathbb{R}^n.$$

从而, 式(5)和式(7)可以获得回归形式为

$$x_k(t) = \boldsymbol{\phi}_{1,k}^T(t)\boldsymbol{\theta}_{1,k}(t) + v_k(t) \quad (8)$$

$$y_k(t) = \boldsymbol{\phi}_k^T(t)\boldsymbol{\theta}_k(t) + v_k(t) \quad (9)$$

显然, 通过模型的变换, 可进一步开展模型参数的辨识。众所周知, 上式的时变参数用现有时间轴上的递推算法和梯度算法等均难以获得参数的一致估计, 下面提出沿重复轴的迭代学习梯度算法和迭代学习最小二乘算法。

### 3 维纳非线性时变系统的迭代学习辨识

系统在给定的作业区间上重复运行时, 记录或量测由第1次到第 $k$ 次运行时的输入输出数据  $\{y_i(t), \phi_i(t), 0 \leq t \leq N, i = 0, 1, \dots, k\}$ 。对于固定的时刻  $t \in \{0, 1, \dots, N\}$ , 其中  $y_i(t)$  为第 $i$ 次迭代的系统输出,  $\phi_i(t)$  是第 $i$ 次迭代的信息矢量, 记  $\mathbf{Y}_k(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_k(t)]^T$ ,  $\boldsymbol{\Phi}_k(t) = [\boldsymbol{\phi}_1^T(t), \boldsymbol{\phi}_2^T(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_k^T(t)]^T$ ,  $\mathbf{V}_k(t) = [v_1(t), v_2(t), \dots, v_k(t)]^T$ 。

第 $k$ 次重复运行后, 系统所有运行特性的矩阵形式可表示为

$$\mathbf{Y}_k(t) = \boldsymbol{\Phi}_k(t)\boldsymbol{\theta}_k(t) + \mathbf{V}_k(t) \quad (10)$$

#### 3.1 维纳非线性时变系统的迭代学习梯度算法

定义准则函数  $J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t), t) = \mathbb{E}\{[y_i(t) - \hat{\phi}_i(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)]^2\}$ 。

基于梯度搜索原理, 可沿输出残差平方的负梯度方向修正, 从而得到迭代学习梯度算法的参数更新率<sup>[19]</sup>

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) - \frac{\mu_k(t)}{2} \text{grad}[J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t), t)] = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \mu_k(t)\boldsymbol{\phi}_k^T(t)[y_k(t) - \boldsymbol{\phi}_k(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)] \quad (11)$$

其中,  $\mu_k(t)$  为收敛因子, 由于式(11)中  $\boldsymbol{\phi}_k(t)$  包含了

系统的未知中间量  $x_k(t-i)$  和不可测的噪声  $v_k(t)$ , 因此无法通过式(11)直接计算。为了解决这个问题, 借助交互估计理论<sup>[20]</sup>的思想, 对于信息矩阵中的未知项  $x_k(t-i)$  和不可测的噪声  $v_k(t-i)$ , 用其估计值  $\hat{x}_k(t-i)$  和  $\hat{v}_k(t-i)$  来替代, 可得

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t) := [\hat{v}_k(t-1) - \hat{x}_k(t-1), \hat{v}_k(t-2) - \hat{x}_k(t-2), \dots, \hat{v}_k(t-n_a) - \hat{x}_k(t-n_a), u_k(t-1), u_k(t-2), \dots, u_k(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t), -y_k^2(t), -y_k^3(t), \dots, -y_k^m(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

相应地, 式(8)和式(9)可以变换为

$$\hat{x}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,k}(t) + \hat{v}_k(t) \quad (12)$$

$$y_k(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) + \hat{v}_k(t) \quad (13)$$

用  $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$  替代式(11)中的信息矩阵  $\boldsymbol{\phi}_k(t)$ , 可以得到迭代学习梯度算法为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \mu_k(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t) \cdot [y_k(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t)] \quad (14)$$

进一步可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = [I - \mu_k(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)]\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \mu_k(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)y_k(t) \quad (15)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t) := [\hat{v}_k(t-1) - \hat{x}_k(t-1), \hat{v}_k(t-2) - \hat{x}_k(t-2), \dots, \hat{v}_k(t-n_a) - \hat{x}_k(t-n_a), u_k(t-1), u_k(t-2), \dots, u_k(t-n_b)]^T \quad (16)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t), -y_k^2(t), -y_k^3(t), \dots, -y_k^m(t)]^T \quad (17)$$

为保证  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$  的收敛性, 矩阵  $[I - \mu_k(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)]$  的所有特征根需要保证在单位圆内<sup>[21]</sup>, 故  $\mu_k$  的保守选择需满足

$$0 \leq \mu_k(t) \leq \frac{2}{\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)} \quad (18)$$

这里可通过调节  $\mu_k(t)$  的参数选择, 获得最佳的参数估计, 通过迭代学习梯度算法(W-ILG)进行时变参数估计的步骤如表1所示。

表1 采用迭代学习梯度算法(W-ILG)计算  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$  的流程图

输入: 重复激励的一组数列
输出: 堆积的输出向量 $\mathbf{Y}_k(t)$
1. 对于所有的 $t = 0, 1, \dots, N$ , 给定参数估计初始值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}(t) = 0$ , 迭代所需 $x_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 的值, 并置 $k = 0$ ;
2. 在第 $k$ 次重复运行时, 采集输入数据 $u_k(t)$ , 计算输出数据 $y_k(t)$
3. While $k < K_{\max}$ (其中 $K_{\max}$ 为最大迭代次数)
4. for each $t \in [0, N]$
5. 通过式(16)和式(17)构造 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$
6. 通过式(18)选取合适的 $\mu_k$
7. 通过式(15)计算得出 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$
8. 通过式(12)刷新 $\hat{x}_k(t)$ 和式(13)刷新 $\hat{v}_k(t)$
9. end
10. end

### 3.2 维纳非线性时变系统的迭代学习最小二乘算法

迭代学习梯度算法虽可实现对时变维纳非线性系统的参数估计, 但仿真结果显示梯度算法的参数收敛速度不够快, 且抖动性大, 鉴于最小二乘算法在收敛性能上的优点, 下面采用迭代学习最小二乘算法对其参数进行辨识. 针对上述迭代学习梯度算法中所述给定作业区间的重复运行系统, 考虑如下准则函数

$$J_k(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t), t) = \sum_{i=1}^k [y_i(t) - \boldsymbol{\phi}_i(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)]^2$$

当 $\boldsymbol{\Phi}_k^T(t)\boldsymbol{\Phi}_k(t)$ 可逆时, 极小化准则函数则可得对于该时变模型的最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = (\boldsymbol{\Phi}_k^T(t)\boldsymbol{\Phi}_k(t))^{-1}\boldsymbol{\Phi}_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t) \quad (19)$$

同理, 由于信息矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_k(t)[\boldsymbol{\phi}_k(t)]$ 中包含了系统的未知中间量 $x_k(t-i)$ 和不可测的噪声 $v_k(t)$ , 无法通过式(19)直接计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$ . 为了解决这个问题, 与上述算法一样, 用其估计值 $\hat{x}_k(t-i)$ 和 $\hat{v}_k(t)$ 来替代.

定义

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t) := [\hat{v}_k(t-1) - \hat{x}_k(t-1), \hat{v}_k(t-2) - \hat{x}_k(t-2), \dots, \hat{v}_k(t-n_a) - \hat{x}_k(t-n_a), u_k(t-1), u_k(t-2), \dots, u_k(t-n_b)]^T \in \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t), -y_k^2(t), -y_k^3(t), \dots, -y_k^m(t)]^T \in \mathbb{R}^n.$$

式(19)可变换为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = (\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k(t))^{-1}\hat{\boldsymbol{\Phi}}_k^T(t)\mathbf{Y}_k(t) \quad (20)$$

显然, 通过最小二乘准则函数计算参数的估计值需矩阵求逆运算, 为回避求逆运算, 借鉴递推最小二乘算法的原理, 推导沿迭代轴的递推算法, 即迭代学习最小二乘算法, 推导过程略. 由此可以得到维纳非线性时变系统的迭代学习最小二乘算法(W-ILLIS)为

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) + \frac{\mathbf{P}_{k-1}(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\mathbf{P}_{k-1}(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)}e_k(t) \quad (21)$$

$$\mathbf{P}_k(t) = \mathbf{P}_{k-1}(t) - \frac{\mathbf{P}_{k-1}(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\mathbf{P}_{k-1}(t)}{1 + \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\mathbf{P}_{k-1}(t)\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)} \quad (22)$$

$$\hat{x}_k(t) = \hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,k}(t) + \hat{v}_k(t) \quad (23)$$

$$\hat{v}_k(t) = y_k(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \quad (24)$$

$$e_k(t) = y_k(t) - \hat{\boldsymbol{\phi}}_k^T(t)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}(t) \quad (25)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t) := [\hat{v}_k(t-1) - \hat{x}_k(t-1), \hat{v}_k(t-2) - \hat{x}_k(t-2), \dots, \hat{v}_k(t-n_a) - \hat{x}_k(t-n_a), u_k(t-1), u_k(t-2), \dots, u_k(t-n_b)]^T \quad (26)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}^T(t), -y_k^2(t), -y_k^3(t), \dots, -y_k^m(t)]^T \quad (27)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,k}(t) := [\hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_{n_a}(t), \hat{b}_1(t), \hat{b}_2(t), \dots, \hat{b}_{n_b}(t)]^T \quad (28)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) := [\hat{\boldsymbol{\theta}}_{1,k}(t), \hat{c}_2(t), \hat{c}_3(t), \dots, \hat{c}_m(t)]^T \quad (29)$$

式(21)和式(22)构成了最小二乘学习算法, 其中 $\mathbf{P}_{-1}(t) = p_{-1}(t)\mathbf{I}$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}(t) = \mathbf{0}$ , 该算法无矩阵求逆运算, 是基于重复轴上的“递推算法”, 将时间上的递推转变成运行次数的迭代.

通过W-ILLIS算法进行时变参数估计的步骤如表2所示.

## 4 数值算例

本节将完成具体的算例仿真, 以说明本文所提算法的有效性. 考虑如下的时变维纳非线性系统

$$x_k(t) = \frac{B(q^{-1}, t)}{A(q^{-1}, t)}u_k(t) + v_k(t)$$

其中,  $A(q^{-1}, t)$ 和 $B(q^{-1}, t)$ 是2阶多项式, 具体表达式为 $A(q^{-1}, t) = 1 + a_1(t)q^{-1} + a_2(t)q^{-2}$ ,  $B(q^{-1}, t) = b_1(t)q^{-1} + b_2(t)q^{-2}$ .

具体参数为 $a_1(t) = 1.5^{\sin(\frac{1000}{t})} - 1$ ,  $a_2(t) = 0.6 - 0.4 \sin\left(\frac{\pi}{|t - 60.5|}\right)$ ,  $b_1(t) = -(0.3 + 0.1\sqrt{0.3t + 6})$ ,  $b_2(t) = \lg\left(0.1 + 1.4\left|\cos\left(\frac{30\pi}{t}\right)\right|\right) + 0.1$ .

同时, 输出非线性部分的反函数展开为 $x_k(t) = y(t) + c_2(t)y^2(t) + c_3(t)y^3(t)$ , 其中 $c_2(t) = 0.01t \lg\left(\frac{50}{t}\right)$ ,  $c_3(t) = -1.5 + 0.5(1.5t + 130)^{\frac{1}{6}}$ .

在仿真过程中, 取输入 $u_k(t)$ 为零均值、方差为1的不相关持续激励信号, 噪声项 $v_k(t)$ 为零均值、方差为0.01的白噪声序列. 选取初值

表2 采用迭代学习最小二乘算法(W-ILLIS)计算 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$ 的流程图

输入: 重复激励的一组数列
输出: 堆积的输出向量 $\mathbf{Y}_k(t)$
1. 对于所有的 $t = 0, 1, \dots, N$ , 给定参数估计初始值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{-1}(t) = \mathbf{0}$ , 迭代所需 $x_0(t)$ 和 $v_0(t)$ 的值, 并置 $k = 0$ ;
2. 在第 $k$ 次重复运行时, 采集输入数据 $u_k(t)$ , 计算输出数据 $y_k(t)$
3. While $k < K_{\max}$ (其中 $K_{\max}$ 为最大迭代次数)
4. for each $t \in [0, N]$
5. 通过式(26)和式(27)构造 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,k}(t)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\phi}}_k(t)$
6. 通过式(21)计算得出 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)$ , 式(22)刷新 $\mathbf{P}_k(t)$
7. 通过式(23)刷新 $\hat{x}_k(t)$ , 式(24)刷新 $\hat{v}_k(t)$ , 式(25)刷新 $e_k(t)$
8. End
9. End

$P_{-1}(t) = p_{-1}(t)I_{6 \times 6}$ ,  $p_{-1}(t) = 10^6$ ,  $\hat{\theta}_{-1}(t) = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ 。分别采用W-FRLS算法、W-ILG算法和W-ILLS算法估计该时变系统的参数。采用W-FRLS算法的参数辨识中, 选取遗忘因子 $\lambda=0.7$ , 为检验其收敛效果, 定义系统估计误差  $\lg J = |y(t) - \hat{\phi}^T(t)\hat{\theta}(t-1)|$ , W-ILG算法和W-ILLS算法中, 为

验证收敛效果, 定义每次迭代的估计误差为  $\max_{0 < t \leq N} \{e_k(t)\}$ , 这里  $e_k(t) = y_k(t) - \hat{\phi}^T_{k-1}(t)\hat{\theta}_{k-1}(t)$ 。

参数辨识结果及估计误差如图1—图4所示。仿真结果表明, 带遗忘因子的最小二乘递推算法(W-FRLS)具备一定的时变参数跟踪能力, 但是针对参数突变的情况无法实现完全跟踪, 且算法估计误差

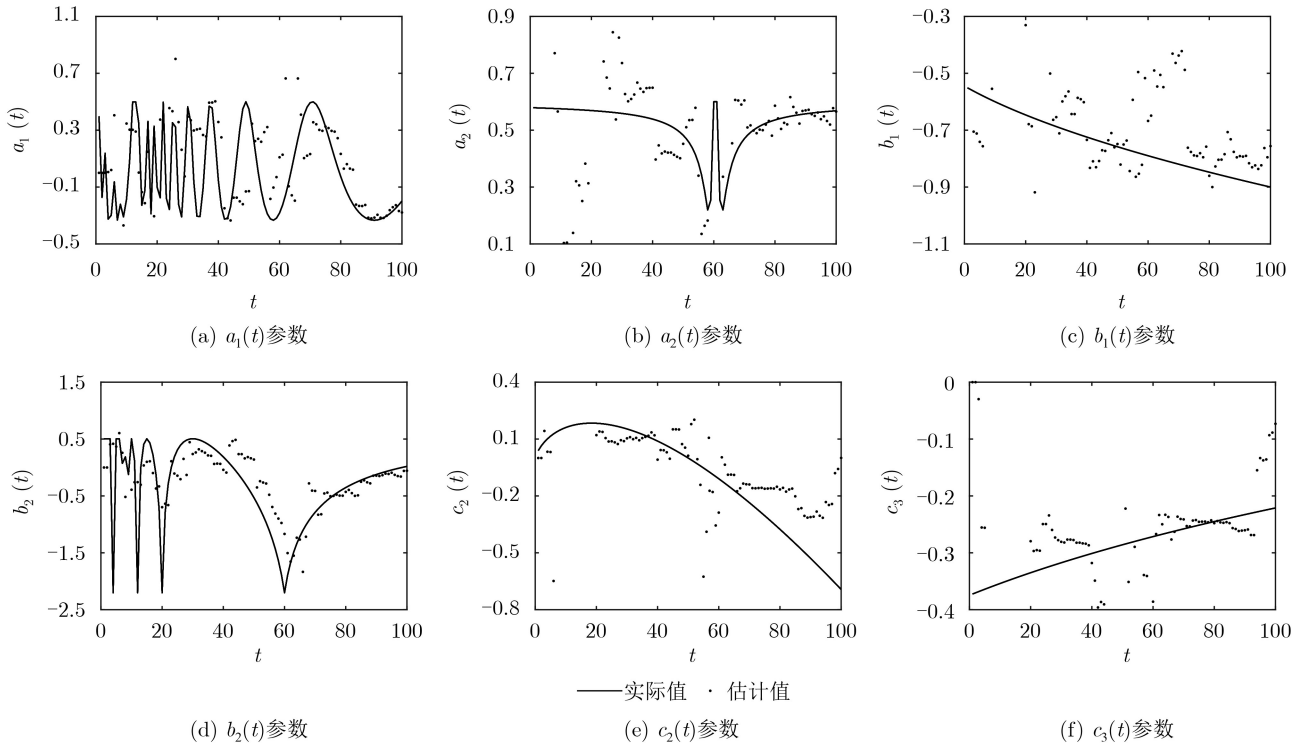


图1 采用W-FRLS算法 (遗忘因子 $\lambda = 0.7$ ) 辨识参数结果

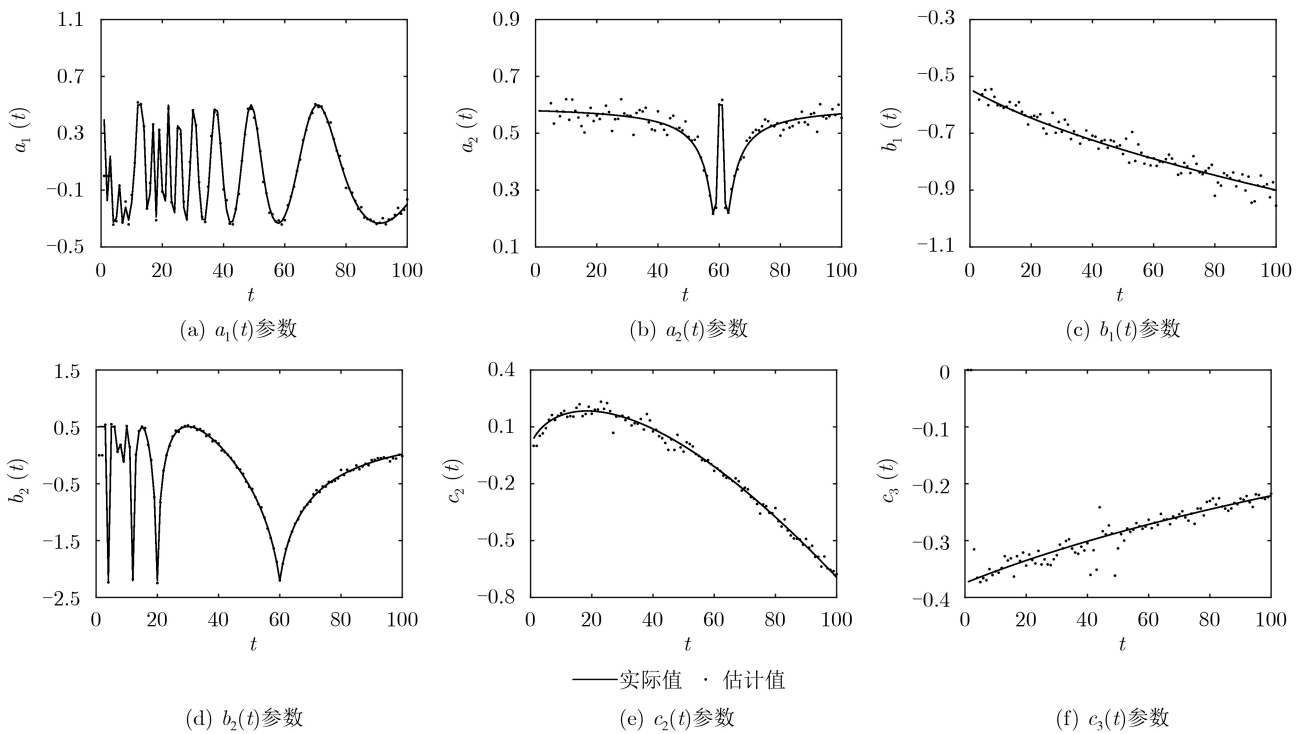


图2 采用W-ILG算法辨识参数结果

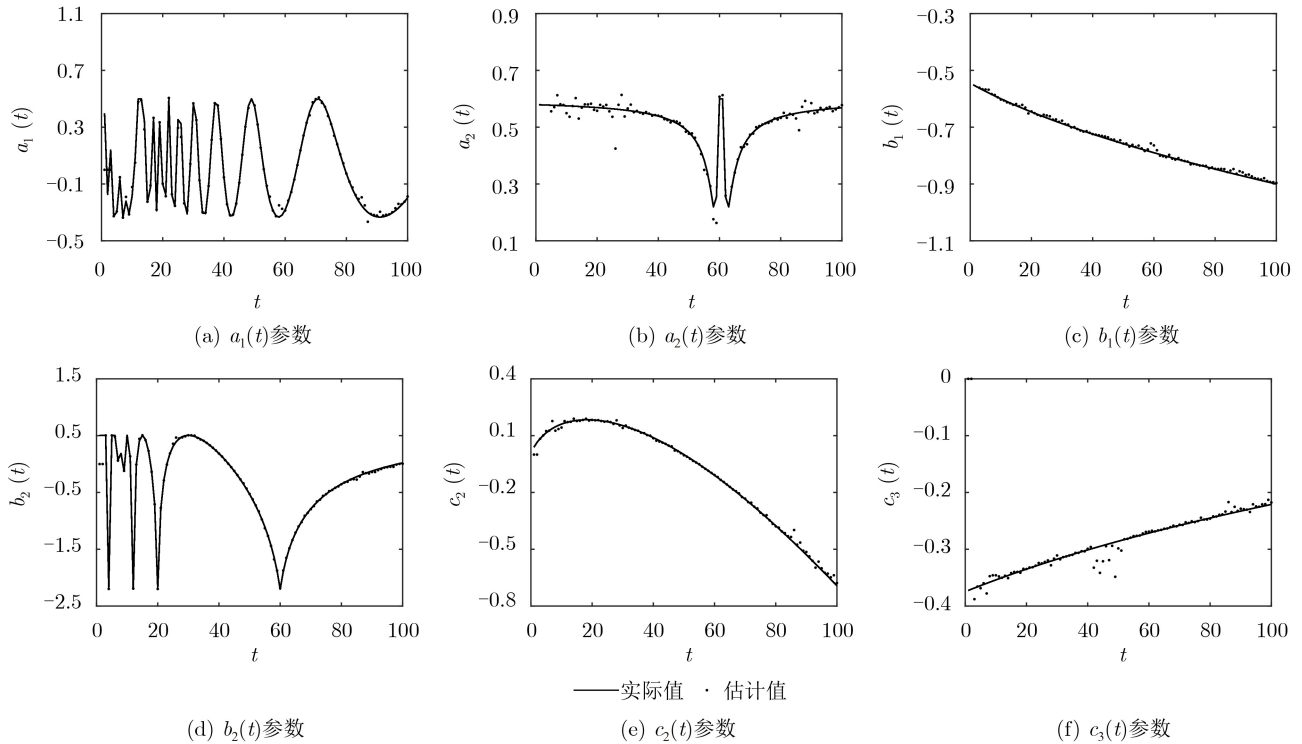


图3 采用W-ILLS算法辨识参数结果

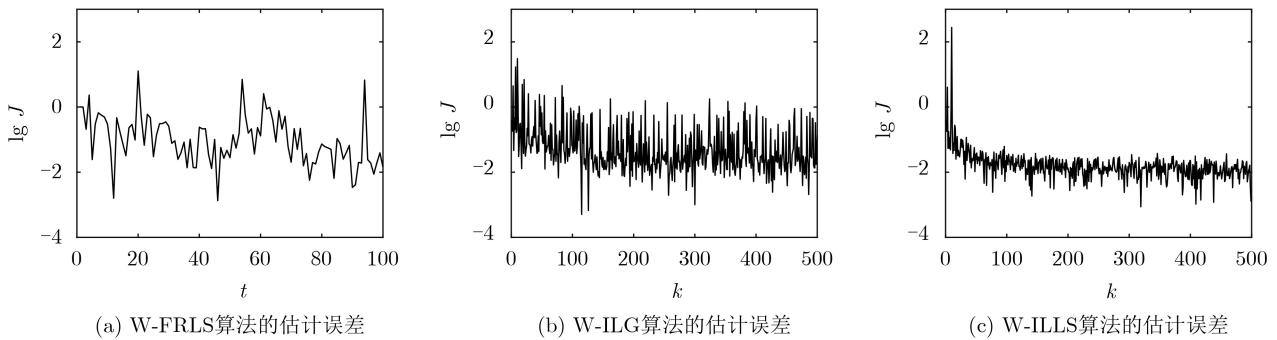


图4 采用3类不同算法的估计误差比较

较大。迭代学习梯度算法(W-ILG)和迭代学习最小二乘算法(W-ILLS)可实现对维纳非线性系统时变参数的一致估计,且收敛误差随迭代次数增加而减小。对比迭代学习最小二乘算法和梯度算法,相同系统、相同信号输入和噪声输入条件下,迭代学习最小二乘算法收敛误差小,且波动性小,验证了该算法的有效性。

### 5 结束语

本文提出的方法可用于解决Wiener非线性重复时变系统的参数估计问题。文中推导了有限区间上重复作业下迭代学习梯度算法和迭代学习最小二乘算法。在重复持续激励的条件下,当Wiener系统非线性输出部分可逆,两种算法均能实现时变参数的完全估计,仿真结果验证了迭代学习辨识方法的有效性,并给出了迭代学习最小二乘算法的辨识

效果。可借鉴其中的结果,进一步开展后续研究,包括Hammerstein系统,以及其组合形式Hammerstein-Wiener(N-L-N)模型和Wiener-Hammerstein(L-N-L)模型。

### 参考文献

- [1] 丁锋. 系统辨识新论[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 37-38.
- [2] GIRI F and BAI Erwei. Block-oriented Nonlinear System Identification[M]. London: Springer, 2010: 3-11. doi: 10.1007/978-1-84996-513-2\_1.
- [3] DING Feng, LIU Ximei, and LIU Manman. The recursive least squares identification algorithm for a class of wiener nonlinear systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2016, 353(7): 1518-1526. doi: 10.1016/j.jfranklin.2016.02.013.
- [4] JIN Xing, HUANG Biao, and SHOOK D S. Multiple model LPV approach to nonlinear process identification with EM

- algorithm[J]. *Journal of Process Control*, 2011, 21(1): 182–193. doi: [10.1016/j.procont.2010.11.008](https://doi.org/10.1016/j.procont.2010.11.008).
- [5] ZHOU Lincheng, LI Xiangli, and PAN Feng. Gradient-based iterative identification for MISO Wiener nonlinear systems: Application to a glutamate fermentation process[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2013, 26(8): 886–892. doi: [10.1016/j.aml.2013.03.015](https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.03.015).
- [6] PELCKMANS K. Minlip for the identification of monotone Wiener systems[J]. *Automatica*, 2011, 47(10): 2298–2305. doi: [10.1016/j.automatica.2011.08.026](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.026).
- [7] VÖRÖS J. Parameter identification of Wiener systems with multisegment piecewise-linear nonlinearities[J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(2): 99–105. doi: [10.1016/j.sysconle.2006.08.001](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2006.08.001).
- [8] YU Feng, MAO Zhizhong, and HE Dakuo. Identification of time-varying Hammerstein-Wiener systems[J]. *IEEE Access*, 2020, 8: 136906–136916. doi: [10.1109/ACCESS.2020.3011608](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3011608).
- [9] WANG Dongqing and DING Feng. Least squares based and gradient based iterative identification for Wiener nonlinear systems[J]. *Signal Processing*, 2011, 91(5): 1182–1189. doi: [10.1016/j.sigpro.2010.11.004](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2010.11.004).
- [10] HAGENBLAD A, LJUNG L, and WILLS A. Maximum likelihood identification of Wiener models[J]. *Automatica*, 2008, 44(11): 2697–2705. doi: [10.1016/j.automatica.2008.02.016](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2008.02.016).
- [11] HU Yuanbiao, LIU Baolin, ZHOU Qin, *et al.* Recursive extended least squares parameter estimation for wiener nonlinear systems with moving average noises[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2014, 33(2): 655–664. doi: [10.1007/s00034-013-9652-x](https://doi.org/10.1007/s00034-013-9652-x).
- [12] MZYK G and WACHEL P. Wiener system identification by input injection method[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2020, 34(8): 1105–1119. doi: [10.1002/acs.3124](https://doi.org/10.1002/acs.3124).
- [13] BAI Erwei. A blind approach to the Hammerstein-Wiener model identification[J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 967–979. doi: [10.1016/S0005-1098\(01\)00292-8](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(01)00292-8).
- [14] LACY S L and BERNSTEIN D S. Identification of FIR Wiener systems with unknown, noninvertible, polynomial nonlinearities[C]. Proceedings of 2002 American Control Conference, Anchorage, USA, 2002: 893–898.
- [15] LJUNG L. System Identification[M]. WEBSTER J G. Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering. New York: John Wiley, 1999: 315–311. doi: [10.1002/047134608X.W1046](https://doi.org/10.1002/047134608X.W1046).
- [16] 孙明轩, 毕宏博. 学习辨识: 最小二乘算法及其重复一致性[J]. *自动化学报*, 2012, 38(5): 698–706. doi: [10.3724/SP.J.1004.2012.00698](https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2012.00698).
- SUN Mingxuan and BI Hongbo. Learning identification: Least squares algorithms and their repetitive consistency[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(5): 698–706. doi: [10.3724/SP.J.1004.2012.00698](https://doi.org/10.3724/SP.J.1004.2012.00698).
- [17] 孙明轩, 毕宏博. 最小二乘学习辨识[C]. 第三十届中国控制会议, 烟台, 中国, 2011: 1615–1620.
- SUN Mingxuan and BI Hongbo. Least squares learning identification[C]. Proceedings of the 30th Chinese Control Conference, Yantai, China, 2011: 1615–1620.
- [18] HAMMAR K, DJAMAH T, and BETTAYEB M. Nonlinear system identification using fractional Hammerstein-Wiener models[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2019, 98(3): 2327–2338. doi: [10.1007/s11071-019-05331-9](https://doi.org/10.1007/s11071-019-05331-9).
- [19] DING Feng, LIU P X, and LIU Guangjun. Gradient based and least-squares based iterative identification methods for OE and OEMA systems[J]. *Digital Signal Processing*, 2010, 20(3): 664–677. doi: [10.1016/j.dsp.2009.10.012](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2009.10.012).
- [20] DING Feng, SHI Yang, and CHEN Tongwen. Performance analysis of estimation algorithms of nonstationary ARMA processes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(3): 1041–1053. doi: [10.1109/TSP.2005.862845](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.862845).
- [21] DING Feng, XU Ling, MENG Dandan, *et al.* Gradient estimation algorithms for the parameter identification of bilinear systems using the auxiliary model[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2019, 369: 112575. doi: [10.1016/j.cam.2019.112575](https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112575).
- 仲国民: 男, 1983年生, 博士生, 研究方向为系统辨识与迭代学习控制。
- 孙明轩: 男, 1961年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为系统辨识与迭代学习控制。

责任编辑: 陈倩