

基于差和共阵的新型高自由度互质阵

陈禹蒲 马晓川* 李璇

(中国科学院声学研究所水下航行器信息技术重点实验室 北京 100190)

(中国科学院大学 北京 100049)

摘要: 针对均匀线列阵自由度(DOF)受限于阵元数的问题, 该文提出一种基于差和共阵的新型互质阵, 称为放置互质阵(DCA), 其借助由接收信号的时域和空域信息组合成的共轭增广矩阵得到等价的差和共阵来进行波达方向(DOA)估计。DCA将广义互质阵放置在与原点处单阵元相隔一定距离的位置, 实现了和共阵与差共阵的阵元位置互补, 从而最大限度上利用和共阵带来的自由度增幅。该文给出了DCA阵元位置和放置距离的闭式表达, 随后分别对DCA的差共阵及和共阵的连续阵元及孔洞位置进行了理论分析, 同时给出了两者间的关系, 说明了DCA的高自由度特性。多个仿真实验验证了所提阵型DOA估计的有效性。

关键词: 波达方向估计; 互质阵; 差和共阵; 高自由度

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)03-0717-10

DOI: [10.11999/JEIT200505](https://doi.org/10.11999/JEIT200505)

A New Coprime Array with High Degree of Freedom Based on the Difference and Sum Co-array

CHEN Yupu MA Xiaochuan LI Xuan

(Key Laboratory of Information Technology for Autonomous Underwater Vehicles,

Institute of Acoustics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: To deal with the problem that the Degree Of Freedom(DOF) of uniform linear array is limited by the number of elements, a new type of coprime array is proposed called Displaced Coprime Array(DCA).It takes use of the conjugate augmented matrix which is formed by the time and space information of the received signal to obtain the equivalent difference and sum co-array and to estimate the Direction Of Arrival(DOA). DCA places the generalized coprime array at a certain distance from the single array element at the coordinate origin so that the elements of the sum co-array and the difference co-array are complemented. As a result, the use of DOF provided by the sum co-array can be maximized. In this paper, the closed-form expressions of the element positions and the placement distance of DCA are given. Then, the performance of the sum co-array and the difference co-array including the continuous elements and the hole positions is theoretically analyzed, the relationship between the two is given and high DOF of DCA is presented. Multiple simulations verify the effectivity of DOA estimation using DCA.

Key words: Direction Of Arrival (DOA) estimation; Coprime array; Difference and sum co-array; High Degree Of Freedom (DOF)

1 引言

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计作为阵列信号处理的一大热点问题, 在雷达、通信和声呐等研究领域都有着广泛应用^[1-3], 而阵列自由度(Degree Of Freedom, DOF)限制了一个阵列DOA估计时所能分辨的最大信号个数。对于一个

长度为 N 的均匀线列阵(Uniform Linear Array, ULA)其自由度往往受限于阵元个数, 因此能否获得比阵元个数更多的自由度成为学者的研究焦点。人们发现, 从共阵的角度对稀疏阵进行处理, 可以获得远大于阵元个数的自由度^[4-6], 并在共阵的基础上给出了合理的处理方法^[7], 后文称为共阵MUSIC算法, 使用该算法时, 共阵中最长的ULA段直接决定了稀疏阵的最大自由度。最小冗余阵(Minimum Redundancy Array, MRA)作为稀疏阵的一

大代表, 在要求共阵全为ULA的条件下对阵列结构进行优化^[5], 具有最大的无孔洞共阵。最小孔洞阵(Minimum Hole Array, MHA)则把最小化孔洞数目当作优化目标, 同时要求共阵的权重系数为1^[8]。MRA和MHA都能在 N 个阵元下获得 $O(N^2)$ 的自由度, 使得自由度较相同阵元数下的ULA有大幅度提高。然而, 它们都没有阵元位置的闭式解, 且大阵元下的阵元位置求解复杂度高。因此嵌套阵(Nested Array, NA)应运而生, 它由两个子阵形成嵌套结构^[9], 同样能在 N 个阵元下获得 $O(N^2)$ 的自由度, 并且阵元位置清晰明了, 易于计算。但嵌套阵有一个半波长间距的子阵, 该子阵较密的阵元排布导致嵌套阵的互耦效应较其他稀疏阵更强, 会影响DOA的估计效果^[10-12]。

互质阵(Coprime Array, CA)既有闭式解, 其互耦效应也优于嵌套阵, 它由两个阵元数分别为 M 和 N 的子阵构成, M 与 N 互质, 子阵阵元间距分别为 Nd 和 Md , 可以获得的自由度为 $O(MN)$ ^[13], 其中 d 为半波长间距。借助互质阵进行DOA估计的算法有很多, 如共阵MUSIC类算法^[7,14]和压缩感知类算法^[15,16], 但估计类算法都无法弥补互质阵的共阵中存在孔洞的问题, 相较NA, 共阵中的连续线阵不够长, 使得它的自由度逊色于嵌套阵, 因此学者在提高互质阵共阵中的ULA段长度方面进行了大量研究。最为简单的方法是将一个子阵的阵元个数改为 $2M$, 其余条件不变, 使得共阵在 $-MN$ 到 MN 内均是连续的^[7], 为了方便区分, 将这种阵型称为扩展互质阵, 同时将原始的互质阵称为原型互质阵。在此之上, 又出现了广义互质阵, 广义互质阵包括两种阵型结构, 一种是CACIS(Coprime Array with Compressed Inter-element Spacing), 一种是CADiS(Coprime Array with Displaced Subarrays)^[17], CACIS压缩了某一子阵的阵元间距, 且压缩因子越大, 共阵ULA越长, 前述的扩展互质阵仅是CACIS的一个特例, CADiS则是将互质阵的某一子阵移至距另一子阵一定距离的位置。放置多级级联子阵的稀疏阵也尝试构建新的阵列结构, 它将多个相同的稀疏阵级联在一起, 并给出了各子阵间的放置距离, 稀疏子阵的自由度越高, 获得的级联阵自由度就越高^[18]。精简互质阵(Thinned Coprime Array, TCA)讨论了扩展互质阵的共阵冗余, 提出即使删掉 $[M/2]$ 个阵元, 扩展互质阵的性质依旧不会改变^[19], 也就意味着同等阵元总数下, TCA的自由度会高于扩展互质阵。还有一种借助矩阵填充理论, 通过重构Toeplitz协方差矩阵来使共阵ULA变长的方法^[20]。

前面所提的方法都是基于差分共阵来提高互质阵的自由度, 那么和共阵对于原型互质阵自由度的提高是否有帮助? 针对这一问题已有文献进行了解答, 文中借助矢量化由时域与空域信息共同构成的共轭增广协方差矩阵(Vectorize Conjugate Augmented MUSIC, VCAM), 在虚拟域构建了差分阵与和共阵共存的差和共阵^[21], 和共阵不但能填补差分阵的部分孔洞, 还能提供一段额外的ULA, 致使原型互质阵在差和共阵下拥有远超出仅使用差分阵的自由度。但是仔细观察原型互质阵和共阵与差共阵阵元位置, 可以发现两者的阵元除了互补关系外, 还存在重叠关系, 即有不少的和共阵阵元与差共阵阵元重叠, 从而导致阵元冗余, 无形中丢失了一部分的自由度。

为了最大限度上利用和共阵所提供的阵元, 希望和共阵能够在填补差共阵孔洞的同时产生与差共阵之间尽量少甚至没有的阵元重叠。借此, 本文提出了一种新的阵型, 在广义互质阵CACIS的基础上添加一个位于原点处的单阵元, 并将CACIS整体放置在与该单阵元相隔一定距离的位置, 文中将这种阵型命名为放置互质阵(Displaced Coprime Array, DCA)。通过一定的放置距离, 让阵型的和共阵与差共阵相互错开, 使它们正好互补, 又没有多余的阵元重叠, 最大限度上利用了和共阵带来的自由度。之所以选用CACIS结构, 是因为它相较普通互质阵连续阵元更加集中, 在两者错开一定距离后, 更便于和共阵与差共阵之间的性质互补。文中给出了DCA的放置距离以及阵元位置的闭式表达, 并对和共阵与差共阵的连续阵元和孔洞位置以及两者之间的关系进行了理论推导。此外, 还给出了DCA所能提供的最大自由度的理论表达式, 并借助仿真实验验证了放置互质阵的有效性。

2 放置互质阵

放置互质阵的阵型结构如图1所示, DCA在CACIS的基础上添加一个阵元, 两子阵除了共用CACIS结构的第1个阵元外, 还共用位于坐标原点的首阵元。子阵阵元数分别为 $N+1$ 和 $M+1$, 总阵元数为 $M+N$ 。可以把放置互质阵看作两部分, 第I部分是单独位于坐标原点的首阵元, 第II部分是广义互质阵CACIS^[17], CACIS压缩了某一子阵的阵元间距, 压缩因子为 $p(2 \leq p \leq M)$, 使得 $\tilde{M} = M/p$, 两子阵的阵元间距变为 $\tilde{M}d$ 和 Nd , d 为半波长间距, 则放置互质阵是把CACIS放置在了与首阵元相隔 Ld 的位置, $L = (MN - \tilde{M}(N-1))/2$ 。

以半波长为基本单位描述阵元位置, 子阵1和子阵2的阵元位置 \mathbf{S}_1 和 \mathbf{S}_2 分别表示为

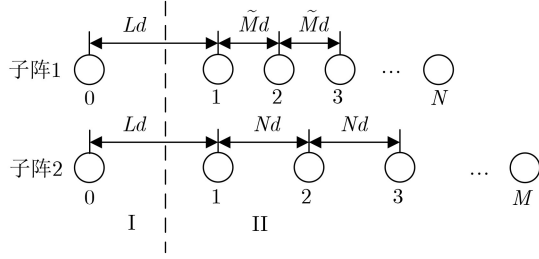


图1 放置互质阵

$$\mathbf{S}_1 = \{0\} \cup \{L + \tilde{M}n | n = 0, 1, \dots, N-1\} \quad (1)$$

$$\mathbf{S}_2 = \{0\} \cup \{L + Nm | m = 0, 1, \dots, M-1\} \quad (2)$$

则放置互质阵的阵元位置为

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{S}_1 \cup \mathbf{S}_2 \\ &= \{0\} \cup \{L + \tilde{M}n | n = 0, 1, \dots, N-1\} \cup \\ &\quad \{L + Nm | m = 0, 1, \dots, M-1\} \end{aligned} \quad (3)$$

设有 K 个不相关远场信号入射，第 k ($1 \leq k \leq K$)个信号的解析表达式为 $s_k(t) = u_k e^{jw_k t}$ ，其中 u_k 是信号幅度， w_k 是信号角频率，该信号从 θ_k 方向入射，能量为 σ_k^2 。定义 $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_i, \dots, g_P)^T$ ， g_i 为阵元位置， $(\cdot)^T$ 为转置， $g_i \in \mathbf{S}$ ，不妨设 $0 = g_1 < g_2 < \dots < g_i < \dots < g_P$ ， P 为阵元总个数。伴随信号一起被阵列接收的还有噪声向量 $\mathbf{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_i(t), \dots, n_P(t))^T$ ， $n_i(t)$ 为第 i 个阵元接收到的噪声，噪声是与信号无关的加性复高斯白噪声，其期望为0，方差为 σ_n^2 。则接收信号模型为^[3]

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^K \mathbf{a}(\theta_k) s_k(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

其中， $\mathbf{A} = (\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K))$ 为阵列流形矩阵，其列向量为阵列流形向量写作 $\mathbf{a}(\theta_k) = (1, e^{j\pi g_2 \sin \theta_k}, \dots, e^{j\pi g_P \sin \theta_k})^T$ ，定义 $\mathbf{s}(t) = (s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t))^T$ 为信号向量。

3 VCAM算法

不同于数据协方差矩阵只关心空域信息的相关性，共轭增广估计器^[22]将时域信息与空域信息联合起来讨论，求第1个阵元在 t 时刻的接收信号 $x_1(t)$ 与第 i 个阵元在 $t + \tau$ 时刻的接收信号 $x_i(t + \tau)$ 在 N_s 个时域快拍下得到的相关函数 $R_{x_1^* x_i}$ 为

$$\begin{aligned} R_{x_1^* x_i}(\tau) &= \frac{1}{N_s} \sum_{t=1}^{N_s} x_1^*(t) x_i(t + \tau) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K (\mathbf{a}_1^*(\theta_k) \mathbf{a}_m(\theta_l) u_k^* u_l e^{jw_l \tau} \\ &\quad \cdot \frac{1}{N_s} \sum_{t=1}^{N_s} e^{j(w_l - w_k)t}) + R_{n_1^* n_i}(\tau) \end{aligned} \quad (5)$$

其中， $(\cdot)^*$ 为共轭， $R_{n_1^* n_i}(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau) \delta(i-1)$ ，在

$\tau \neq 0$ 的条件下，一定有 $R_{n_1^* n_i}(\tau) = 0$ 。当样本数 N_s 足够大，且 $w_l \neq w_k$ 时， $\frac{1}{N_s} \sum_{t=1}^{N_s} e^{j(w_l - w_k)t} \approx 0$ ，则有

$$R_{x_1^* x_i}(\tau) = \sum_{k=1}^K e^{j\pi g_i \sin \theta_k} R_{s_k^* s_k}(\tau) \quad (6)$$

其中， $R_{s_k^* s_k}(\tau) = \frac{1}{N_s} \sum_{t=1}^{N_s} s_k^*(t) s_k(t + \tau) = |u_k|^2 e^{jw_k \tau}$ 。将第1个阵元在 t 时刻的接收信号 $x_1(t)$ 与其他各阵元在 $t + \tau$ 时刻的接收信号得到的自相关函数组成向量有 $\mathbf{h}_x(\tau) = (R_{x_1^* x_1}(\tau), R_{x_1^* x_2}(\tau), \dots, R_{x_1^* x_P}(\tau))^T$ ，同时记 $\mathbf{h}_s(\tau) = (R_{s_1^* s_1}(\tau), R_{s_2^* s_2}(\tau), \dots, R_{s_K^* s_K}(\tau))^T$ ，根据式(6)有

$$\mathbf{h}_x(\tau) = \mathbf{A} \mathbf{h}_s(\tau) \quad (7)$$

用 $-\tau$ 代替 τ ，再同时对式(7)取共轭得到 $\mathbf{h}_x^*(-\tau) = \mathbf{A}^* \mathbf{h}_s(\tau)$ ，为了避免重复计算量，去掉 \mathbf{A}^* 的第1行，记为 $(\mathbf{A}')^*$ ，其列向量为 $(\mathbf{a}'(\theta_k))^* = (e^{-j\pi g_P \sin \theta_k}, \dots, e^{-j\pi g_2 \sin \theta_k})^T$ ，修改 \mathbf{A}^* 后，式(7)可重写为

$$(\mathbf{h}_x'(-\tau))^* = (\mathbf{A}')^* \mathbf{h}_s(\tau) \quad (8)$$

组合式(7)、式(8)，得到共轭增广相关向量

$$\mathbf{h}(\tau) = \begin{bmatrix} (\mathbf{h}_x'(-\tau))^* \\ \mathbf{h}_x(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}')^* \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{h}_s(\tau) \quad (9)$$

选择满足奈奎斯特采样率的伪采样周期 T_p ，对应伪采样快拍为 N_p ，则采样 $\mathbf{h}(\tau)$ 所得伪数据矩阵为

$$\mathbf{H} = (\mathbf{h}(T_p), \mathbf{h}(2T_p), \dots, \mathbf{h}(N_p T_p)) = \mathbf{Q} \mathbf{U} \mathbf{E} \quad (10)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}')^* \\ \mathbf{A} \end{bmatrix}, \text{ 其列向量为 } \mathbf{q}(\theta_k) = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}'(\theta_k))^* \\ \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix},$$

$\mathbf{U} = \text{diag}(|u_1|^2, |u_2|^2, \dots, |u_K|^2)$ 为入射信号幅度的模平方形成的对角矩阵， \mathbf{E} 为 $K \times N_p$ 维矩阵，其第 a 行第 b 列的元素为 $(\mathbf{E})_{ab} = e^{jw_a b T_p}$ 。求数据 \mathbf{H} 的协方差矩阵 \mathbf{R}_H

$$\mathbf{R}_H = \frac{1}{N_p} \mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{Q} \mathbf{U} \left(\frac{1}{N_p} \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right) \mathbf{U}^H \mathbf{Q}^H \quad (11)$$

令 $\mathbf{R}_{h_s} = \mathbf{U} \left(\frac{1}{N_p} \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right) \mathbf{U}^H$ ，其中 $\left(\frac{1}{N_p} \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right)_{kl} = \sum_{n=1}^{N_p} \frac{e^{j(w_k - w_l)n T_p}}{N_p}$ ， $k = l$ 时， $\left(\frac{1}{N_p} \mathbf{E} \mathbf{E}^H \right)_{kl} = 1$ ，若 N_p 足够大，有 $\sum_{n=1}^{N_p} \frac{e^{j(w_k - w_l)n T_p}}{N_p} \approx 0$ ，则 $\mathbf{R}_{h_s} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \text{diag}(|u_1|^4, |u_2|^4, \dots, |u_K|^4)$ ，对矩阵 \mathbf{R}_H 做拉直处理有

$$\mathbf{z} = \text{vec}(\mathbf{R}_H) = \mathbf{B} \mathbf{p} \quad (12)$$

其中， $\text{vec}(\cdot)$ 为拉直算子，式(12)给出了DCA虚拟域接收信号模型，其中 $\mathbf{p} = (|u_1|^4, |u_2|^4, \dots, |u_K|^4)^T$ 代表虚拟域入射信号，拉直得到的 \mathbf{z} 为虚拟域的接

收信号, $\mathbf{B} = \mathbf{Q}^* \odot \mathbf{Q}$ 代表虚拟域的阵列流形矩阵, 符号 \odot 为KR积, 矩阵 \mathbf{B} 的列向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\theta_k) &= \mathbf{q}^*(\theta_k) \otimes \mathbf{q}(\theta_k) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}'(\theta_k) \\ \mathbf{a}^*(\theta_k) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} (\mathbf{a}'(\theta_k))^* \\ \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}'(\theta_k) \otimes (\mathbf{a}'(\theta_k))^* \\ \mathbf{a}'(\theta_k) \otimes \mathbf{a}(\theta_k) \\ \mathbf{a}^*(\theta_k) \otimes (\mathbf{a}'(\theta_k))^* \\ \mathbf{a}^*(\theta_k) \otimes \mathbf{a}(\theta_k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

虚拟阵列在 \mathbf{B} 中体现为差和共阵, 其拥有比差分共阵更多的连续虚拟阵元^[21], 由于 \mathbf{p} 为单快拍信号, 在后续的处理中, 采用共阵MUSIC算法进行DOA估计, 即先用空间平滑增秩, 再使用MUSIC算法^[7]. 阵列的最大自由度取决于共阵中的最长连续整数段, 假设最长连续整数段位于 $[-l_c, l_c]$, 从 \mathbf{z} 中提取对应该整数段的数据进行处理, 空间平滑的次数为 $l_c + 1$, 空间平滑后得到的满秩矩阵为 $\mathbf{R}_z = \frac{1}{l_c + 1} \sum_{j=1}^{j=l_c+1} \mathbf{R}_{z_j}$, \mathbf{R}_{z_j} 为 $[-l_c + j - 1, j - 1]$ 段对应虚拟数据 \mathbf{z}_j 所得协方差矩阵, 在 \mathbf{R}_z 上使用MUSIC^[23] 算法就能得到最终的DOA估计结果, 此时阵列的自由度为 l_c .

4 放置互质阵的差和共阵特性

4.1 差和共阵的定义

差和共阵包含差共阵与和共阵, 它们的阵元位置分别由差集与和集给出, 这两个集合都是由阵列各阵元相互加减得来的, 根据相加减的阵元所属子阵不同, 将差集与和集进一步分为互差集、自差集、互和集与自和集, 具体定义如下所述, m 和 n 取值范围均为 $0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1$.

将两子阵阵元相互间的差称为互差集 $\bar{\mathbf{L}}_{cd}$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{cd} &= \{\bar{l}_{cd} | \bar{l}_{cd} = u - v, u \in \mathbf{S}_2, v \in \mathbf{S}_1\} \\ &= \{Nm - \tilde{M}n\} \cup \{L + Nm\} \cup \{-(L + \tilde{M}n)\} \end{aligned} \quad (14)$$

其镜像为 $\bar{\mathbf{L}}_{cd}^- = \{-\bar{l}_{cd} | \bar{l}_{cd} \in \bar{\mathbf{L}}_{cd}\}$, 子阵内部阵元之间的差称为自差集 $\bar{\mathbf{L}}_{sd}$, 写作

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{sd} &= \{\bar{l}_{sd} | \bar{l}_{sd} = u - v, u > v, u, v \in \mathbf{S}_1\} \\ &\cup \{\bar{l}_{sd} | \bar{l}_{sd} = u - v, u > v, u, v \in \mathbf{S}_2\} \\ &= \{Nm\} \cup \{\tilde{M}n\} \cup \{L + Nm\} \cup \{L + \tilde{M}n\} \end{aligned} \quad (15)$$

同理镜像为 $\bar{\mathbf{L}}_{sd}^- = \{-\bar{l}_{sd} | \bar{l}_{sd} \in \bar{\mathbf{L}}_{sd}\}$, 相应的差集可写为 $\bar{\mathbf{L}}_d = \bar{\mathbf{L}}_{cd} \cup \bar{\mathbf{L}}_{cd}^- \cup \bar{\mathbf{L}}_{sd} \cup \bar{\mathbf{L}}_{sd}^-$.

和集同样包括互和集 $\bar{\mathbf{L}}_{cs}$ 与自和集 $\bar{\mathbf{L}}_{ss}$, 分别写作

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{cs} &= \{\bar{l}_{cs} | \bar{l}_{cs} = u + v, u, v \in \mathbf{S}\} \\ &= \{2L + Nm + \tilde{M}n\} \cup \{L + Nm\} \cup \{L + \tilde{M}n\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_{ss} &= \{\bar{l}_{ss} | \bar{l}_{ss} = u + v, u, v \in \mathbf{S}_1\} \\ &\cup \{\bar{l}_{ss} | \bar{l}_{ss} = u + v, u, v \in \mathbf{S}_2\} \\ &= \{2L + Nm | 0 \leq m \leq 2(M - 1)\} \\ &\cup \{2L + \tilde{M}n | 0 \leq n \leq 2(N - 1)\} \\ &\cup \{L + Nm\} \cup \{L + \tilde{M}n\} \end{aligned} \quad (17)$$

同样存在镜像 $\bar{\mathbf{L}}_{cs}^-$ 及 $\bar{\mathbf{L}}_{ss}^-$, 相应得到和集为 $\bar{\mathbf{L}}_s = \bar{\mathbf{L}}_{cs} \cup \bar{\mathbf{L}}_{cs}^- \cup \bar{\mathbf{L}}_{ss} \cup \bar{\mathbf{L}}_{ss}^-$.

观察由式(14)–式(17)给出的4个集合的表达式, 自差集、互和集与自和集都包含了集合 $\{L + Nm\} \cup \{L + \tilde{M}n\}$, 互差集包含了集合 $\{L + Nm\} \cup \{-(L + \tilde{M}n)\}$. 结合 L 的表达式, L 取值不会恒为整, 当其取值为小数时, 会使得前述集合的元素变成小数, 然而共阵MUSIC算法所能提供的最大自由度取决于差和共阵连续整数段的最长长度, 也就意味着前述集合所对应虚拟阵元对阵列的自由度没有贡献. 因此, 在后续的讨论中忽略这几个集合, 并重新定义放置互质阵的差集 \mathbf{L}_d 与和集 \mathbf{L}_s 为

互差集 $\mathbf{L}_{cd} = \{Nm - \tilde{M}n | 0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1\}$;

自差集 $\mathbf{L}_{sd} = \{Nm | 0 \leq m \leq M - 1\} \cup \{\tilde{M}n | 0 \leq n \leq N - 1\}$;

互和集 $\mathbf{L}_{cs} = \{2L + Nm + \tilde{M}n | 0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1\}$;

自和集 $\mathbf{L}_{ss} = \{2L + Nm | 0 \leq m \leq 2(M - 1)\} \cup \{2L + \tilde{M}n | 0 \leq n \leq 2(N - 1)\}$.

它们的镜像分别为 \mathbf{L}_{cd}^- , \mathbf{L}_{sd}^- , \mathbf{L}_{cs}^- 和 \mathbf{L}_{ss}^- , 则差集 \mathbf{L}_d 与和集 \mathbf{L}_s 分别写为 $\mathbf{L}_d = \mathbf{L}_{cd} \cup \mathbf{L}_{cd}^- \cup \mathbf{L}_{sd} \cup \mathbf{L}_{sd}^-$, $\mathbf{L}_s = \mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{cs}^- \cup \mathbf{L}_{ss} \cup \mathbf{L}_{ss}^-$, 相应的差和共阵的阵元位置集合 \mathbf{D} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{L}_d \cup \mathbf{L}_s \\ &= \mathbf{L}_{cd} \cup \mathbf{L}_{cd}^- \cup \mathbf{L}_{sd} \cup \mathbf{L}_{sd}^- \cup \mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{cs}^- \cup \mathbf{L}_{ss} \cup \mathbf{L}_{ss}^- \end{aligned} \quad (18)$$

4.2 差和共阵的性质

要想得知差和共阵的性质, 有必要先讨论差集与和集的性质, 放置互质阵的差集 \mathbf{L}_d 与广义互质阵CACIS的差集定义一样, 除了满足文献[17]中证明过的几个性质外, 差集还满足命题1中的性质.

命题1 互差集 \mathbf{L}_{cd} 在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内的孔洞为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{cd} &= \{h_{cd} | h_{cd} = aN + b\tilde{M}, h_{cd} < MN - N, \\ &a \geq M - \tilde{M}, b \geq 1\}. \end{aligned}$$

命题2 和集满足以下性质:

(1) 集合 \mathbf{L}_{cs} 的连续整数范围为 $[MN - N + 1, 2MN - \tilde{M}(N - 1) - 1]$.

(2) 在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内, 集合 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{cs_1} &= \{h_{cs_1} | h_{cs_1} = 2L + aN - b\tilde{M}, \\ &h_{cs_1} \geq MN - \tilde{M}(N - 1), \\ &1 \leq a \leq \tilde{M} - 1, b \geq 1\}; \end{aligned}$$

在范围 $[2MN - \tilde{M}(N - 1), 2MN - N]$ 内, 集合 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{cs_2} &= \{2L + aN | M \leq a \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/N\} \\ &\cup \{2L + b\tilde{M} | pN \leq b \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/\tilde{M}\}. \end{aligned}$$

(3) 正和集 $\mathbf{L}_{s+} = \mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{ss}$ 的连续整数范围为 $[MN - N + 1, 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ 。

命题3 差集与和集之间存在如下性质:

(1) 在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内, 互差集与互和集可以互相填补孔洞, 即 $\mathbf{H}_{cs_1} \subseteq \mathbf{L}_{cd}$, $\mathbf{H}_{cd} \subseteq \mathbf{L}_{cs}$ 。

(2) 差和共阵 \mathbf{D} 在 $[-(2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1), 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ 范围内连续。

3个命题的证明略。图2给出了 $(M, N) = (6, 5)$, 压缩因子 $p = 2$ 时DCA的4个重要集合与共阵 \mathbf{D} 的结构, 黑点代表阵元, \times 代表孔洞。从图中可以看到, 自和集能够延长和集整体的连续段范围, 且互差集与互和集间存在互补关系, 通过让CACIS整体与原点阵元相隔 L , 和集整体后移了 $2L$, 在这里 $2L = 18$, 这一放置操作既让互差集与互和集的孔洞互补, 也避免了两者连续段的重叠而导致的自由度损失, 能够最大限度上利用和集带来的自由度增益, 最终得到的差和共阵 \mathbf{D} 如图2(e)所示。

4.3 自由度分析

根据命题3性质(2)给出的范围, 由于 $2 - N \leq 0$, 因此当 $\tilde{M} = 1$ 时, 差和共阵 \mathbf{D} 能得到最长的连续整数段为 $[-(2MN - N + 1), 2MN - N + 1]$, 此时DCA

能获得最大自由度, 取值为 $2MN - N + 1$ 。以往稀疏阵的算法中较多的都是借助矢量化数据协方差矩阵得到差分共阵来进行DOA处理, 所以它们所提供的自由度不会超过物理孔径^[24], 但差和共阵的使用能够突破这个限制, 因此使用差和共阵的阵列所得到的自由度会远大于仅仅使用差分共阵得到的自由度, 下面对使用差和共阵的两种阵型, DCA与原型互质阵^[21]进行自由度的比较, 将后者记为CA(VCAM)。在相同阵元数 P 下, 两者子阵阵元数的最优选择以及所能获得的最大自由度如表1所示, 为使两者都能获得最大的自由度, 默认DCA的 $\tilde{M} = 1$, CA(VCAM)的 $M > 2$ 。

在满足 M 与 N 互质的条件下, 借助算术平均几何平均不等式(Arithmetic Mean-Geometric Mean (AM-GM) inequality)^[25], 根据两阵型DOF的表达式可以得到不同阵元总数 P 下的阵列最优配置。互质阵的子阵阵元数至少为2个, 要想DCA存在, 则 $P \geq 7$, 对表1中DCA和CA(VCAM)以 P 为表达式的自由度进行比较, 根据 P 的取值情况, 通过简单的作差计算不难得出结论: DCA的自由度不小于CA(VCAM)且当 P 为 $P \geq 12$ 的偶数或 P 为 $P \geq 9$ 的奇数时, DCA能获得比CA(VCAM)更高的自由度。

5 仿真实验

前文从理论分析证明中给出了DCA的诸多性质, 这一节将讨论包括NA, CACIS, CADiS, CA(VCAM)和DCA在内的几种阵型的性能, 为保证各阵型都能获得最大的自由度, 涉及压缩子阵间距的阵型都令压缩后的子阵间距为1, CADiS两子阵间的距离为 $L_{Dis} = N + 1$, DCA的放置距离为

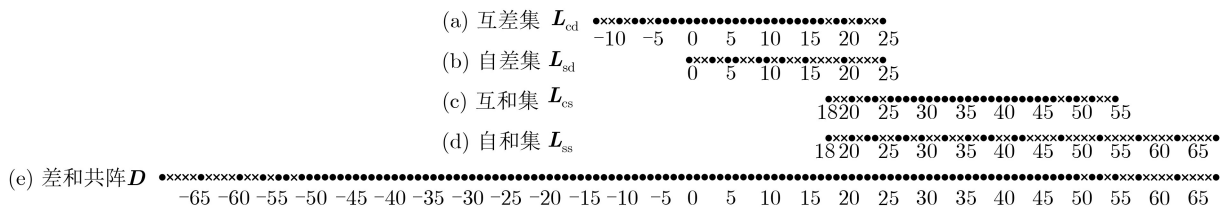


图2 放置互质阵 $(M, N, p) = (6, 5, 2)$

表1 两种阵型的最优设计及最大自由度

阵型	表达式	子阵阵元数最优选择	最大自由度
DCA	$DOF = 2MN - N + 1$	P 为偶, $P/2$ 为偶: $M = P/2 + 1, N = P/2 - 1$	$(P^2 - P)/2$
		P 为偶, $P/2$ 为奇: $M = P/2 + 2, N = P/2 - 2$	$(P^2 - P - 10)/2$
		P 为奇: $M = (P + 1)/2, N = (P - 1)/2$	$(P^2 - P + 2)/2$
CA(VCAM)	$DOF = MN + M + N - 1$	P 为偶: $M = (P + 2)/2, N = P/2$	$(P^2 + 6P)/4$
		P 为奇, $(P + 1)/2$ 为偶: $M = (P + 1)/2 + 1, N = (P + 1)/2 - 1$	$(P^2 + 6P - 3)/4$
		P 为奇, $(P + 1)/2$ 为奇: $M = (P + 1)/2 + 2, N = (P + 1)/2 - 2$	$(P^2 + 6P - 15)/4$

$L_{DCA} = (MN - N + 1)/2$, 子阵阵元数的选取均以最大化自由度为目标。

5.1 自由度比较

以总阵元数 P 为变量, 给出了 P 从7到99变化时, 5种阵型的自由度变化曲线如图3所示。随阵元总数的增大, 各阵型的自由度都越来越高, 且放置互质阵DCA相较其他几种阵型自由度上升速度更快, P 越大, DCA的自由度与其他阵型相隔越大, 从图中可以看出, 使用差和共阵的两种阵型CA(VCAM)和DCA的自由度始终大于其他几种阵型, 由于DCA较CA(VCAM)更加合理地利用了和共阵的阵元位置, 避免了和共阵与差共阵的阵元冗余, 其在所获得的自由度上更占优势, 同时DCA通过一定的放置距离拥有了近似于CACIS两倍的自由度。上文给出的有关DCA自由度比较的结论在图中也得到了验证。

5.2 同阵元数下的蒙特卡罗实验

下面通过蒙特卡罗实验对几种阵型在不同条件变化下DOA估计的均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)进行对比, 假设蒙特卡罗试验次数

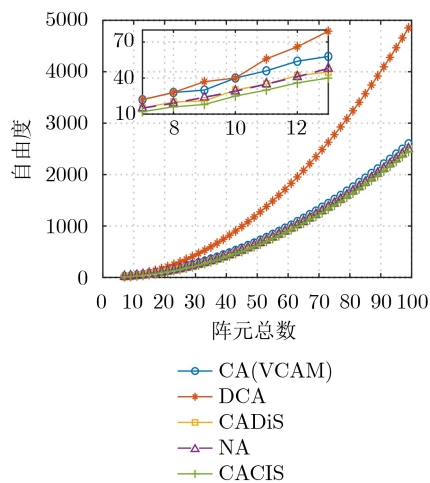
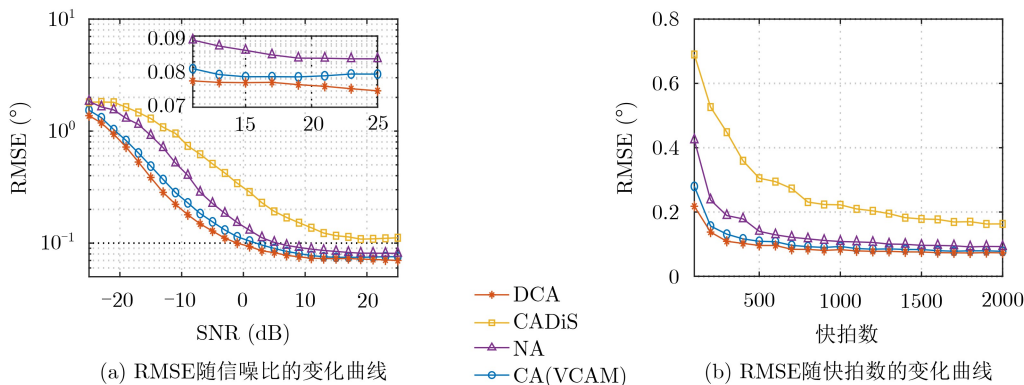


图3 各阵型自由度随阵元总数的变化



(a) RMSE随信噪比的变化曲线

(b) RMSE随快拍数的变化曲线

图4 同阵元数下各阵型的RMSE变化曲线

为 I 次, 则 K 个信号入射时, 阵列DOA估计得到的RMSE定义为

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{IK} \sum_{i=1}^I \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{ik} - \theta_k)^2} \quad (19)$$

其中, θ_k 是第 k 个信号的真实入射方向, $\hat{\theta}_{ik}$ 是第 i 次实验下第 k 个信号的DOA估计值。在同阵元数的实验下, 已有文献说明在使用共阵MUSIC算法进行DOA估计时, 若CACIS与CADiS压缩后的子阵间距均为 $\tilde{M} = 1$, 则前者的RMSE总是高于后者[17]。因此在本蒙特卡罗实验中, 仅对除CACIS外的4种阵型进行RMSE的比对。

观察阵元总数固定为9时, 4种阵型的实验结果, 以最大化自由度为目标, 当 $P = 9$ 时, DCA的子阵阵元数为 $(M, N) = (5, 4)$ 。CADiS和CA(VCAM)的子阵阵元数均为 $(M, N) = (7, 3)$, 嵌套阵子阵的最优配置为 $(N_1, N_2) = (4, 5)$, 4种阵型CADiS, NA, CA(VCAM)和DCA所能获得的最大自由度按序依次为21, 24, 30和37。选定信号入射个数为19个以保证4种阵型均能对入射信号进行正确的DOA估计, 各阵型均以首阵元为坐标原点, 入射信号均匀分布在 $[-60^\circ, 60^\circ]$ 内。首先固定快拍数 N_s 为500, 伪快拍数 $N_p = N_s$, 信噪比在 -25 dB到 25 dB内以步长 2 dB变化, 共阵MUSIC算法扫描间距为 0.25° , 进行500次独立实验得到的RMSE曲线如图4(a)所示。其他条件不变, 将信噪比固定为0, 快拍数 N_s 以步长100从起点100到2000变化, 伪快拍数等于快拍数 $N_p = N_s$, 得到的RMSE曲线如图4(b)所示。在同阵元数的实验中, 随着信噪比和快拍数的增大, 各阵型的估计误差都越来越小, 且自由度越高的阵型得到的估计误差越小, DCA的高自由度使其估计性能总是4种阵型中最优的, 具有最小的RMSE。

5.3 同孔径下的蒙特卡罗实验

在相同阵元数的条件下, 各阵型由于阵元排布

方式不同具有不同的阵列孔径，下面观察阵列孔径相同时，各阵型DOA估计的均方根误差，同样进行500次独立实验，对5种阵型进行RMSE的对比，各阵型在同孔径下的阵型配置如表2所示，孔径以 d 为单位，其中DCA用最少的阵元个数获得了最高的自由度。

假设有43个远场信号从 $[-60^\circ, 60^\circ]$ 入射，其他条件不变，RMSE在 -30 dB到 20 dB内随信噪比的变化曲线如图5(a)所示。固定信噪比为 -20 dB，RMSE随快拍数的变化曲线如图5(b)所示。从图5中不难看出同孔径条件下，各阵型的估计误差不会完全一致，这也许是因为共阵MUSIC算法是基于共阵ULA段进行处理的，使用差分共阵的CACIS，CADiS和NA，它们的最长共阵ULA段孔径受限于物理孔径，因此在同孔径条件下的实验中，三者的RMSE近似相等，而DCA在两种变化情况下均展现出了其优越的估计性能。由此可见，对于使用了差和共阵的阵型，物理孔径对其估计性能的影响不起决定性作用。

6 结论

本文提出了一种名为放置互质阵的新型互质阵，并在差和共阵的基础上进行DOA估计，阵型把CACIS与原点处单阵元分开放置一定距离，这样能够让差共阵与和共阵的阵元位置恰好互补，避免差共阵与和共阵的阵元重叠，充分利用和共阵所提供的自由度，使得在相同的阵元数下，DCA所能

获得的自由度近似是CACIS最大自由度的2倍。为了更好地认知DCA的共阵构成，文中分析讨论了DCA差共阵与和共阵的连续阵元及孔洞位置，结合两者关系给出了DCA所能获得自由度的闭式表达，最后的理论分析和仿真实验表明了DCA的高自由度特性及优越的DOA估计特性。

附录1 命题1的证明

使用反证法来证明命题1。假设集合 \mathbf{H}_{cd} 不是 \mathbf{L}_{cd} 的孔洞，则存在 $h \in \mathbf{H}_{cd}, l_{cd} \in \mathbf{L}_{cd}, h = aN + b\tilde{M}, a \geq M - \tilde{M}, b \geq 1, l_{cd} = Nm - \tilde{M}n, 0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1$ ，使得 $h_{cd} = l_{cd}$ 成立，即 $aN + b\tilde{M} = Nm - \tilde{M}n$ 成立，将等式化为

$$N(m - a) = \tilde{M}(n + b) \quad (20)$$

根据 n 和 b 的取值范围，有 $1 \leq n + b \leq N$ ，又 \tilde{M} 与 N 互质，则 $m - a$ 的取值必须为 \tilde{M} 等式才能成立，但 $\tilde{M} - M \leq m - a \leq \tilde{M} - 1$ ，无法满足等式成立条件，因此假设不成立。证毕

附录2 命题2的证明

(1) 设整数 $l_{cs} \in \mathbf{L}_{cs}$ ， l_{cs} 满足

$$MN - N + 1 \leq l_{cs} \leq 2MN - \tilde{M}(N - 1) - 1 \quad (21)$$

结合 $L = (MN - \tilde{M}(N - 1))/2$ ，将式(21)化为

$$2L + \tilde{M}(N - 1) - N + 1 \leq l_{cs} \leq 2L + MN - 1 \quad (22)$$

由 $n \in [0, N - 1]$ ，可得 $0 \leq \tilde{M}n \leq \tilde{M}(N - 1)$ ，根据关系式 $l_{cs} = 2L + Nm + \tilde{M}n$ ，有

$$Nm = l_{cs} - 2L - \tilde{M}n \quad (23)$$

则可得到 Nm 的范围为 $-N + 1 \leq Nm \leq MN - 1$ ，进一步放大为 $-N < Nm < MN$ ，则 $-1 < m < M$ ，因为 m 为整数，可得 $0 \leq m \leq M - 1$ ，符合互和集中 m 的取值范围。证毕

(2) 先证在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内，集合 \mathbf{H}_{cs_1} 内的元素是 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞。使用反证法来证明该性质，假设 \mathbf{H}_{cs_1} 不是 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞，记整数 $h_{cs_1} \in \mathbf{H}_{cs_1}, h_{cs_1} = 2L + aN - b\tilde{M}, 1 \leq a \leq \tilde{M} - 1, b \geq 1$ ，则必

阵型	阵元总数	子阵阵元数	孔径	自由度
CACIS	27	$(M, N) = (15, 13)$	182	182
CA(VCAM)	27	$(M, N) = (15, 13)$	182	222
CADiS	26	$(M, N) = (14, 13)$	182	182
NA	26	$(N_1, N_2) = (13, 13)$	181	181
DCA	23	$(M, N) = (12, 11)$	182	254

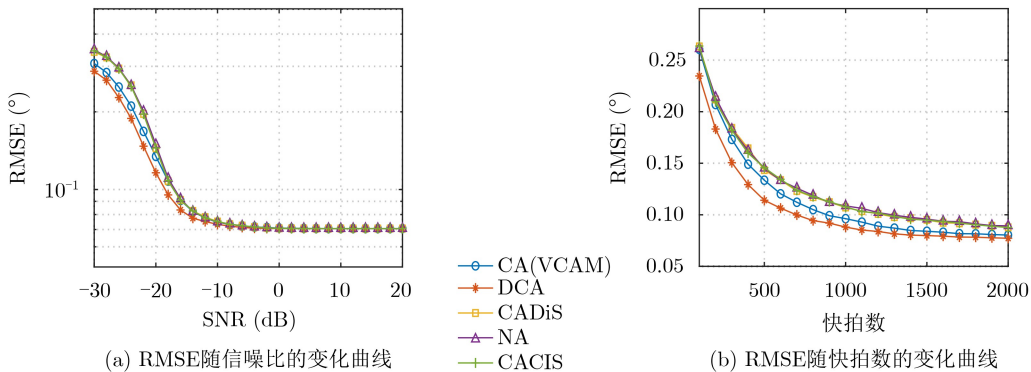


图 5 同孔径下各阵型的RMSE变化曲线

有 h_{cs_1} 与 \mathbf{L}_{cs} 中某元素 $l_{cs} = 2L + Nm + \tilde{M}n$ 相等, 有等式

$$2L + aN - b\tilde{M} = 2L + Nm + \tilde{M}n \quad (24)$$

成立, 其中 $0 \leq m \leq M - 1, 0 \leq n \leq N - 1$, 将式(24)写为

$$\frac{\tilde{M}}{N} = \frac{a - m}{n + b} \quad (25)$$

因为 $-M \leq a - m \leq \tilde{M} - 1$, 则等式(25)无法成立, 所以 \mathbf{H}_{cs_1} 在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内是 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞。

同理证明该性质的后半部分, 在 $[2MN - \tilde{M}(N - 1), 2MN - N]$ 内, 假设 \mathbf{H}_{cs_2} 不是 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞, 则有 $2L + aN = 2L + Nm_1 + \tilde{M}n_1$ 或 $2L + b\tilde{M} = 2L + Nm_2 + \tilde{M}n_2$ 成立, 将两等式化为

$$\frac{N}{\tilde{M}} = \frac{n_1}{a - m_1} \quad (26)$$

$$\frac{N}{\tilde{M}} = \frac{b - n_2}{m_2} \quad (27)$$

其中, $M \leq a \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/N, pN \leq b \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/\tilde{M}, n_1, n_2 \in [0, N - 1], m_1, m_2 \in [0, M - 1]$, 对于等式(26), 由于 $n_1 \in [0, N - 1]$, 故等式无法成立。对于等式(27), $b - n_2 \geq pN - N + 1$, 又压缩因子 $p \geq 2$, 故 $b - n_2 \geq N + 1$, 等式也无法成立, 则 \mathbf{H}_{cs_2} 在范围 $[2MN - \tilde{M}(N - 1), 2MN - N]$ 内是 \mathbf{L}_{cs} 的孔洞。

(3) 观察范围 $[2MN - \tilde{M}(N - 1), 2MN - N]$ 内孔洞 \mathbf{H}_{cs_2} 的元素, 集合 $\{2L + aN | M \leq a \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/N\}$ 显然是自和集 \mathbf{L}_{ss} 中集合 $\{2L + Nm | 0 \leq m \leq 2(M - 1)\}$ 的子集, 对于集合 $\{2L + b\tilde{M} | pN \leq b \leq (MN + \tilde{M}N - M - N)/\tilde{M}\}$, 当 $b = pN$ 时, 得到该集合的第一个元素 $h_1 = 2L + MN$, $h_1 \in \mathbf{L}_{ss}$ 也显然成立, 但当 $b = pN + 1$ 时, 得到的孔洞为 $h_2 = 2L + \tilde{M}(pN + 1)$, 下面探讨自和集 \mathbf{L}_{ss} 与该孔洞的关系, 给出等式如下

$$2L + \tilde{M}(pN + 1) = 2L + Nm \quad (28)$$

$$2L + \tilde{M}(pN + 1) = 2L + \tilde{M}n \quad (29)$$

化简为

$$\frac{\tilde{M}}{N} = (m - M) \quad (30)$$

$$pN = (n - 1) \quad (31)$$

分析可得在 $m \in [0, M - 1], n \in [0, N - 1]$ 时等式(30)、式(31)均无法成立, 因此 h_2 是自和集 \mathbf{L}_{ss} 的孔洞。同理可得, 当 b 的索引值继续增大, 取 $b = pN + i, i \geq 1$ 时, 对应的孔洞 h_{i+1} 也都是 \mathbf{L}_{ss} 的孔洞。

根据前面的论述可以看出互和集的孔洞 \mathbf{H}_{cs_2} 的一部分是自和集 \mathbf{L}_{ss} 的子集, 有一部分是自和集 \mathbf{L}_{ss} 的孔洞, 由此可以得到一个结论, 即自和集可以填补互和集的部分孔洞, 而剩下的没被填补的孔洞是它与自和集共有的。孔洞总是位于连续阵元的两侧, 互和集连续阵元右侧的孔洞随着 a 和 b 取值的变大而离连续阵元越来越远, 连续阵元的长度会因为孔洞的出现而被截断, 由于自和集 \mathbf{L}_{ss} 无法填补 $b = pN + 1$ 位置的孔洞, 使得正和集 $\mathbf{L}_{s+} = \mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{ss}$ 右侧最大的连续阵元位置出现在 $2L + (pN + 1)\tilde{M} - 1$ 处, 代入 L 为 $2MN + \tilde{M}(N - 2) - 1$, 结合命题的性质1)中互和集的范围可得, 正和集 \mathbf{L}_{s+} 的连续范围为 $[MN - N + 1, 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ 。

附录3 命题3的证明

(1) 要证 $\mathbf{H}_{cs_1} \subseteq \mathbf{L}_{cd}$, 即证对任意整数 $h_{cs_1} \in \mathbf{H}_{cs_1}$, 都有 $h_{cs_1} \in \mathbf{L}_{cd}$ 成立。

已知 $h_{cs_1} = 2L + aN - b\tilde{M}, 1 \leq a \leq \tilde{M} - 1, b \geq 1, h_{cs_1}$ 满足 $h_{cs_1} \geq MN - \tilde{M}(N - 1)$, 代入 L 后将不等式化为

$$aN - b\tilde{M} \geq 0 \quad (32)$$

结合 a 的取值范围, 对式(32)进行缩放, 有 $0 \leq aN - b\tilde{M} \leq (\tilde{M} - 1)N - b\tilde{M}$, 去掉中间式有

$$0 \leq (\tilde{M} - 1)N - b\tilde{M} \quad (33)$$

进一步可写为 $b\tilde{M} \leq (\tilde{M} - 1)N < \tilde{M}N$, 则可得 b 的取值上限为 $b < N$, 因为 b 为整数再结合已知的 b 的范围, 有 $1 \leq b \leq N - 1$ 。将 L 代入 h_{cs_1} 的表达式, 有

$$\begin{aligned} h_{cs_1} &= MN - \tilde{M}(N - 1) + aN - b\tilde{M} \\ &= N(M - \tilde{M} + a) - \tilde{M}(b - 1) \\ &= Nm_1 - \tilde{M}n_1 \end{aligned} \quad (34)$$

其中, $m_1 = M - \tilde{M} + a, n_1 = b - 1$, 根据 a 和 b 的取值范围可得

$$M - \tilde{M} + 1 \leq m_1 \leq M - 1, 0 \leq n_1 \leq N - 2 \quad (35)$$

显然, 当 m_1 与 n_1 在取值范围满足上述条件时, 结合 \mathbf{L}_{cd} 的表达式有 $h_{cs_1} \in \mathbf{L}_{cd}$ 一定成立, 则 $\mathbf{H}_{cs_1} \subseteq \mathbf{L}_{cd}$ 一定成立。

同理证明 $\mathbf{H}_{cd} \subseteq \mathbf{L}_{cs}$, 即证对任意整数 $h_{cd} \in \mathbf{H}_{cd}$, 都有 $h_{cd} \in \mathbf{L}_{cs}$ 成立。对于集合 \mathbf{L}_{cs} , 设整数 $l_{cs} = 2L + Nm + \tilde{M}n$ 属于 \mathbf{L}_{cs} , $m \in [0, M - 1], n \in [0, N - 1]$, 代入 L 有

$$\begin{aligned} l_{cs} &= MN - \tilde{M}(N - 1) + Nm + \tilde{M}n \\ &= N(M - \tilde{M} + m) + \tilde{M}(1 + n) \\ &= a_1N + b_1\tilde{M} \end{aligned} \quad (36)$$

其中, $a_1 = M - \tilde{M} + m, b_1 = 1 + n$, 它们的取值范围分别为 $M - \tilde{M} \leq a_1 \leq 2M - \tilde{M} - 1, 1 \leq b_1 \leq N$,

则可将集合 \mathbf{L}_{cs} 重新写为 $\mathbf{L}_{cs} = \{a_1N + b_1\tilde{M} | M - \tilde{M} \leq a_1 \leq 2M - \tilde{M} - 1, 1 \leq b_1 \leq N\}$ 。

分析孔洞 $h_{cd} = aN + b\tilde{M}$ ，其中 $a \geq M - \tilde{M}$ ， $b \geq 1$ ，由 $h_{cd} < MN - N$ 有

$$aN + b\tilde{M} < MN - N \quad (37)$$

根据不等式(37)可得 $aN < aN + b\tilde{M} < MN - N < MN$ ，则 a 的取值范围为 $M - \tilde{M} \leq a \leq M - 1$ ，不等式(37)还可写为 $(M - \tilde{M})N + b\tilde{M} \leq aN + b\tilde{M} < MN - N$ ，则 $b\tilde{M} < \tilde{M}N - N < \tilde{M}N$ ，可得 b 的取值范围为 $1 \leq b \leq N - 1$ 。根据 a 和 b 的取值范围，不难看出 $h_{cd} \in \mathbf{L}_{cs}$ 一定成立，则 $\mathbb{H}_{cd} \subseteq \mathbf{L}_{cs}$ 一定成立。(2)定义 $\mathbf{D}_r = \mathbf{L}_{cd} \cup \mathbf{L}_{sd} \cup \mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{ss}$ 为差和共阵的右半段，根据命题2的性质(3)有集合 $\mathbf{L}_{cs} \cup \mathbf{L}_{ss}$ 的连续整数段为 $[MN - N + 1, 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ ，由命题3的性质(1)可知集合 $\mathbf{L}_{cd} \cup \mathbf{L}_{cs}$ 在范围 $[MN - \tilde{M}(N - 1), MN - N]$ 内是连续的，最后再结合差集的性质^[17]，有 $\mathbf{L}_{sd} \subseteq \mathbf{L}_{cd}$ ， \mathbf{L}_{cd} 的连续整数段为 $[-(N - 1), MN - \tilde{M}(N - 1) - 1]$ 。整合以上信息可得，集合 \mathbf{D}_r 在 $[-(N - 1), 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ 范围内是连续的。同理由它们的镜像所组成的差和共阵的左半段 $\mathbf{D}_l = \mathbf{L}_{cd}^- \cup \mathbf{L}_{sd}^- \cup \mathbf{L}_{cs}^- \cup \mathbf{L}_{ss}^-$ ，也具有相似的镜像性质， \mathbf{D}_l 在 $[-(2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1), N - 1]$ 内是连续的，因此差和共阵 \mathbf{D} 在 $[-(2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1), 2MN + \tilde{M}(2 - N) - 1]$ 范围内连续。证毕

参考文献

- [1] YANG Jie, YANG Yixin, LEI Bo, et al. Nonuniform linear array DOA estimation using EM criterion[J]. *Digital Signal Processing*, 2019, 86: 36–41. doi: [10.1016/j.dsp.2018.12.010](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2018.12.010).
- [2] QIN Guodong, AMIN M G, and ZHANG Y D. DOA estimation exploiting sparse array motions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(11): 3013–3027. doi: [10.1109/TSP.2019.2911261](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2911261).
- [3] 鄢社锋. 优化阵列信号处理(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 1–31.
YAN Shefeng. Optimal Array Signal Processing: Beamformer Design Theory and Methods[M]. Beijing: Science Press, 2018: 1–31.
- [4] HOCTOR R T and KASSAM S A. The unifying role of the coarray in aperture synthesis for coherent and incoherent imaging[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1990, 78(4): 735–752. doi: [10.1109/5.54811](https://doi.org/10.1109/5.54811).
- [5] MOFFET A T. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172–175. doi: [10.1109/TAP.1968.1139138](https://doi.org/10.1109/TAP.1968.1139138).
- [6] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Remarks on the spatial smoothing step in coarray MUSIC[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1438–1442. doi: [10.1109/lsp.2015.2409153](https://doi.org/10.1109/lsp.2015.2409153).
- [7] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Coprime sampling and the music algorithm[C]. 2011 Digital Signal Processing and Signal Processing Education Meeting (DSP/SPE), Sedona, USA, 2011: 289–294. doi: [10.1109/DSP-SPE.2011.5739227](https://doi.org/10.1109/DSP-SPE.2011.5739227).
- [8] BLOOM G S and GOLOMB S W. Applications of numbered undirected graphs[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1977, 65(4): 562–570. doi: [10.1109/PROC.1977.10517](https://doi.org/10.1109/PROC.1977.10517).
- [9] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: A novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181. doi: [10.1109/tsp.2010.2049264](https://doi.org/10.1109/tsp.2010.2049264).
- [10] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling—Part I: Fundamentals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(15): 3997–4012. doi: [10.1109/TSP.2016.2558159](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2558159).
- [11] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Super nested arrays: Linear sparse arrays with reduced mutual coupling—Part II: High-order extensions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(16): 4203–4217. doi: [10.1109/TSP.2016.2558167](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2558167).
- [12] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Hourglass arrays and other novel 2-D sparse arrays with reduced mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(13): 3369–3383. doi: [10.1109/TSP.2017.2690390](https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2690390).
- [13] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).
- [14] 李建峰, 沈明威, 蒋德富. 互质阵中基于降维求根的波达角估计算法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(8): 1853–1859. doi: [10.11999/JEIT171087](https://doi.org/10.11999/JEIT171087).
LI Jianfeng, SHEN Mingwei, and JIANG Defu. Reduced-dimensional root finding based direction of arrival estimation for coprime array[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(8): 1853–1859. doi: [10.11999/JEIT171087](https://doi.org/10.11999/JEIT171087).
- [15] AHMED A, ZHANG Y D, and ZHANG Jiankang. Coprime array design with minimum lag redundancy[C]. ICASSP 2019–2019 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), Brighton, United Kingdom, 2019: 4125–4129. doi: [10.1109/ICASSP.2019.8683315](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2019.8683315).
- [16] 冯明月, 何明浩, 陈昌孝, 等. 基于Bessel先验快速稀疏贝叶斯学习的互质阵列DOA估计[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(7): 1604–1611. doi: [10.11999/JEIT170951](https://doi.org/10.11999/JEIT170951).
FENG Mingyue, HE Minghao, CHEN Changxiao, et al.

- DOA estimation for co-prime array based on fast sparse Bayesian learning using Bessel priors[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(7): 1604–1611. doi: [10.11999/JEIT170951](https://doi.org/10.11999/JEIT170951).
- [17] QIN Si, ZHANG Y D, and AMIN M G. Generalized coprime array configurations for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1377–1390. doi: [10.1109/TSP.2015.2393838](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2393838).
- [18] ZHANG Yankui, XU Haiyun, ZONG Rong, et al. A novel high degree of freedom sparse array with displaced multistage cascade subarrays[J]. *Digital Signal Processing*, 2019, 90: 36–45. doi: [10.1016/j.dsp.2019.04.005](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2019.04.005).
- [19] RAZA A, LIU Wei, and SHEN Qing. Thinned coprime array for second-order difference co-array generation with reduced mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2019, 67(8): 2052–2065. doi: [10.1109/TSP.2019.2901380](https://doi.org/10.1109/TSP.2019.2901380).
- [20] 孙兵, 阮怀林, 吴晨曦, 等. 基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
- SUN Bing, RUAN Huailin, WU Chenxi, et al. Direction of arrival estimation with coprime array based on Toeplitz covariance matrix reconstruction[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(8): 1924–1930. doi: [10.11999/JEIT181041](https://doi.org/10.11999/JEIT181041).
- [21] WANG Xinghua, CHEN Zhenhong, REN Shiwei, et al. DOA estimation based on the difference and sum coarray for coprime arrays[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 69: 22–31. doi: [10.1016/j.dsp.2017.06.013](https://doi.org/10.1016/j.dsp.2017.06.013).
- [22] SHAN Zhilong and YUM T S P. A conjugate augmented approach to direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(11): 4104–4109. doi: [10.1109/tsp.2005.857012](https://doi.org/10.1109/tsp.2005.857012).
- [23] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1986, 34(3): 276–280. doi: [10.1109/TAP.1986.1143830](https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143830).
- [24] CHEN Zhenhong, DING Yingtao, REN Shiwei, et al. A novel nested configuration based on the difference and sum co-array concept[J]. *Sensors*, 2018, 18(9): 2988. doi: [10.3390/s18092988](https://doi.org/10.3390/s18092988).
- [25] SHEN Qing, LIU Wei, CUI Wei, et al. Extension of nested arrays with the fourth-order difference co-array enhancement[C]. 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Shanghai, China, 2016: 2991–2995. doi: [10.1109/ICASSP.2016.7472226](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472226).
- 陈禹蒲: 女, 1995年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理。
 马晓川: 男, 1969年生, 研究员, 博士生导师, 研究方向为阵列信号处理、水声信号处理。
 李璇: 女, 1983年生, 副研究员, 硕士生导师, 研究方向为阵列信号处理、水声信号处理。
- 责任编辑: 马秀强