

信号相关杂波背景中极化雷达发射波形优化

孙挺^① 程旭^{*②}

^①(周口师范学院网络工程学院 周口 466000)

^②(中山大学电子与通信工程学院 深圳 518107)

摘要: 波形优化可有效抑制干扰, 显著改善雷达探测性能。针对全极化雷达, 考虑发射波形满足能量和相似性双重约束, 以最大化信杂噪比为准, 对发射波形和接收滤波器进行联合优化。该文设计了一种波形和滤波器的迭代优化算法, 该方法序贯提高输出信杂噪比。算法的每一次迭代需要分别解决一个凸问题和隐凸问题, 整个算法的计算量与迭代次数和接收滤波器长度分别呈线性和多项式关系。最后, 通过仿真实验分析了算法的收敛性、优化波形的模糊度函数方面的性质, 与其他算法进行了对比, 结果表明: 与现有方法相比, 该文方法可实现信杂噪比的有效提升。

关键词: 极化雷达; 波形优化; 波形设计; 相似性约束

中图分类号: TN958

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)05-1275-07

DOI: [10.11999/JEIT200138](https://doi.org/10.11999/JEIT200138)

Transmit Waveform Optimization of Polarimetric Radar in Signal-dependent Clutter

SUN Ting^① CHENG Xu^②

^①(College of Network Engineering, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466000, China)

^②(School of Electronic and Communication Engineering, Sun Yat-Sen University, Shenzhen 518107, China)

Abstract: Waveform optimization can effectively suppress the interference, and improve significantly radar performance. With considering polarimetric radars as the object of study and to maximize the output Signal-to-Clutter plus Noise Ratio (SCNR) as the merit of figure, an optimization problem of joint transmit waveform and receive filter design under both the energy and similarity constraints is constructed. Then, an optimization procedure for transmit signal and receive filter which improves sequentially the SCNR is exploited. Each iteration of the algorithm requires the solution of both a convex and a hidden convex optimization problem, and the resulting computational complexity is linear with the number of iterations and polynomial with the receive filter length. Finally, the convergence of the algorithm and the property of the optimized waveform in the ambiguous domain are analyzed through numerical experiments. Results show that, compared to the existing methods, the proposed approach improves significantly the SCNR.

Key words: Polarimetric radar; Waveform optimization; Waveform design; Similarity constraint

1 引言

极化反映了电磁波的矢量性, 作为电磁波的基

本参量之一, 极化信息的利用可显著提高雷达的探测性能。自20世纪50年代诞生以来, 极化雷达在导弹防御、地理信息遥感、气象监测等方面的表现日益突出, 成为微波感知领域的重要力量^[1-4]。近年来, 数字任意波形发生器、固态发射机以及高速信号处理硬件等先进技术的大力发展, 促使现代雷达系统能够摆脱传统固定波形的束缚, 取而代之的是采用更加灵活的波形设计, 从而适应不同目标和环境的变化。通过对波形进行优化, 雷达根据当前照射得到的目标和干扰知识, 优化调整下一次波形的发射参数, 提高其在目标检测、参数估计以及抗干扰等方面的性能。在雷达学术界, 雷达波形优化/

收稿日期: 2020-02-28; 改回日期: 2020-10-18; 网络出版: 2020-11-16

*通信作者: 程旭 chengx95@mail.sysu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61801527), 深圳市科技计划项目(KQTD20190929172704911), 电子信息系统复杂电磁环境效应国家重点实验室开放基金(CEMEE2021K0201B)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61801527), Shenzhen Science and Technology Program (KQTD20190929172704911), China State Key Laboratory of Complex Electromagnetic Environment Effects on Electronic and Information System (CEMEE2021K0201B)

设计已经成为包括多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output, MIMO)雷达和认知雷达在内的多种新体制雷达的重要研究方向之一^[5-7]。

虽然从数学模型上看,全极化雷达可看作具有两个发射通道和两个接收通道的集中式MIMO雷达^[8],但全极化雷达利用电磁波的矢量性,挖掘目标和干扰在极化特性上的差异,所以有着和MIMO雷达不同的特异性,因此,需要开展全极化雷达波形设计的专门研究。在这方面,提高滤波器输出的信干噪比(Signal Interference-plus-Noise Ratio, SINR)是其中具有典型意义的代表性工作。特别地,针对发射波形功率约束的信号相关杂波背景中波形优化问题,文献[9]从最大化SINR的角度,提出了一种发射波形-接收滤波器联合优化设计方法(以作者姓氏命名,称为Pillai方法)。由于文献[9]提出的迭代方法不具有收敛性,文献[10]提出了一种新的迭代优化算法(称为Chen方法),实现了目标函数的单调递增和收敛性。文献[11]和文献[12]则分别研究了波形在能量和峰值旁瓣比、能量和频谱耦合度双重约束条件下的最优波形设计问题,所提出的数值优化方法均能保证优化结果的收敛性。

不难理解,单纯给发射波形施加能量约束,而不施加其他条件限制,将无法保证波形在距离分辨率、峰值旁瓣比和模糊函数等方面的特性,而通过对优化波形施加相似性约束条件可以较好地解决这一问题,也就是使得待优化波形与一个具有优良属性(比如恒定幅度、合适的距离分辨率和峰值旁瓣比)的已知波形保持一定相似度。为此,除能量约束之外,本文对发射波形施加相似性约束,研究相应的发射波形和接收滤波器联合优化方法。将提出一种发射信号和接收滤波器迭代优化流程(算法),该流程逐次改善滤波器输出SCNR。采用实测目标数据设计的实验证实本文方法的有效性,结果表明,通过共同优化发射端和接收端,可以获得显著的SCNR改善。

2 系统模型

考虑雷达系统发射全极化波形 \mathbf{s} ,在快时间域,上述波形经 N 次数字采样后为式(1)所示的 $2N$ 维复矢量

$$\mathbf{s} \triangleq [(s_{H,0}, s_{V,0}), \dots, (s_{H,N-1}, s_{V,N-1})]^T \quad (1)$$

其中,符号 \triangleq 表示“定义为”,符号“H”和“V”分别表示水平极化和垂直极化, $(\cdot)^T$ 为矩阵转置操作。

当给定视线角为 θ ,距离单元为 n 时,全极化目标散射矩阵 $\mathbf{T}_n(\theta)$ 为目标脉冲响应矩阵(Target

Impulse Response Matrix, TIRM)的一部分,即有

$$\mathbf{T}_n(\theta) \triangleq \begin{bmatrix} T_{HH,n}(\theta) & T_{HV,n}(\theta) \\ T_{VH,n}(\theta) & T_{VV,n}(\theta) \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi) \quad (2)$$

其中, $T_{XY,n}(\theta)$ 表示当雷达相对目标视线角度为 θ 、发射极化为“Y”、接收极化为“X”(X, Y \in {H, V})时目标第 n 个距离单元的复散射系数。相似地

$$\mathbf{C}_n \triangleq \begin{bmatrix} C_{HH,n} & C_{HV,n} \\ C_{VH,n} & C_{VV,n} \end{bmatrix} \quad (3)$$

为杂波的第 n 个距离单元极化散射矩阵。

取TIRM的支撑区间长度为 Q ¹⁾,回波观测样本数目为 M ,令 $M = Q + N - 1$,以使目标的回波信息在一次雷达接收中完全采样。则TIRM和杂波的脉冲响应矩阵(Clutter Impulse Response Matrix, CIR)分别表示为^[9]

$$\mathbf{T}(\theta) \triangleq \sum_{n=0}^{Q-1} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{T}_n(\theta), \quad \mathbf{C} \triangleq \sum_{n=-N+1}^{M-1} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{C}_n \quad (4)$$

其中,符号“ \otimes ”表示Kronecker乘积, \mathbf{J}_n 为 $M \times N$ 维转移矩阵,即

$$\mathbf{J}_n(\ell_1, \ell_2) \triangleq \begin{cases} 1, & \ell_1 - \ell_2 = n \\ 0, & \ell_1 - \ell_2 \neq n \end{cases} \\ \ell_1 \in \{1, 2, \dots, M\}, \ell_2 \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (5)$$

将接收回波样本放入 $2M$ 维矢量 $\mathbf{r} \triangleq [(r_{H,0}, r_{V,0}), (r_{H,1}, r_{V,1}), \dots, (r_{H,M-1}, r_{V,M-1})]^T$,则全极化雷达回波信号为

$$\mathbf{r} = \alpha_T \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s} + \mathbf{c} + \mathbf{v} = \alpha_T \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s} + \mathbf{C} \mathbf{s} + \mathbf{v} \quad (6)$$

其中, α_T 是雷达方程等决定的(已知)复系数, \mathbf{c} 为(发射波形相关)杂波矢量, \mathbf{v} 为 $2M$ 维加性噪声矢量,有 $\mathbf{v} \triangleq [(v_{H,0}, v_{V,0}), (v_{H,1}, v_{V,1}), \dots, (v_{H,M-1}, v_{V,M-1})]^T$ 。

对于噪声的统计特性,取复噪声矢量 \mathbf{v} 是均值为0(即 $\mathbb{E}[\mathbf{v}] = \mathbf{0}$)、2阶协方差矩阵等于 $\mathbf{M}_v = \sigma_v^2 \mathbf{I}$ 的圆对称矢量,其中 σ_v^2 为单个极化通道的噪声功率。对于杂波的统计特性,首先,根据互易性定理有 $C_{HV,n} = C_{VH,n}$, $n \in \{-N+1, -N+2, \dots, M-1\}$;其次,对于单个距离单元 n ,假定杂波的均值为0,即 $\mathbb{E}[\mathbf{C}_n] = \mathbf{0}$,于是有 $\mathbb{E}[\mathbf{C}] = \mathbf{0}$ 。此外,定义第 n 个距离单元“ j ”极化通道杂波和第 n' 个距离单元“ k ”极化通道杂波的相关系数为

$$r_{jk}(n, n') \triangleq \frac{\mathbb{E}[C_{j,n} C_{k,n'}^*]}{\sqrt{\mathbb{E}[|C_{j,n}|^2]} \sqrt{\mathbb{E}[|C_{k,n'}|^2]}} \\ j, k \in \{HH, HV, VV\} \quad (7)$$

¹⁾ Q 的值由雷达视线方向上目标径向长度和雷达的距离分辨率决定。

不难看出, 式(7)表征了杂波在极化域和距离域两个维度的相关性。

将式(5)进一步展开得到 $\mathbf{C} = \sum_{n=-N+1}^{M-1} [C_{\text{HH},n} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_1 + C_{\text{HV},n} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_2 + C_{\text{VV},n} \mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_3]$, 其中 $\mathbf{A}_1 \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。又记 $\{1, 2, 3\} \triangleq \{\text{HH}, \text{HV}, \text{VV}\}$, 则 $2M \times 2M$ 维杂波协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_c(\mathbf{s}) &= \mathbb{E}[\mathbf{c}\mathbf{c}^\dagger] = \mathbb{E}[\mathbf{C}\mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger\mathbf{C}^\dagger] \\ &= \sum_{n=-N+1}^{M-1} \sum_{n'=-N+1}^{M-1} [\sqrt{\sigma_n}\sqrt{\sigma_{n'}}r_{11}(n, n') (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_1) \\ &\quad \cdot \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger (\mathbf{J}_{n'}^\dagger \otimes \mathbf{A}_1) + \sqrt{\epsilon_n\sigma_n}\sqrt{\epsilon_{n'}\sigma_{n'}}r_{22}(n, n') \\ &\quad \cdot (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_2) \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger (\mathbf{J}_{n'}^\dagger \otimes \mathbf{A}_2) + \sqrt{\sigma_n}\sqrt{\sigma_{n'}\chi_{n'}} \\ &\quad \cdot r_{13}(n, n') (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_1) \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger (\mathbf{J}_{n'}^\dagger \otimes \mathbf{A}_3) + \sqrt{\sigma_n\chi_n} \\ &\quad \cdot \sqrt{\sigma_{n'}r_{13}^*(n', n)} (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_3) \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger (\mathbf{J}_{n'}^\dagger \otimes \mathbf{A}_1) \\ &\quad + \sqrt{\sigma_n\chi_n}\sqrt{\sigma_{n'}\chi_{n'}}r_{33}(n, n') (\mathbf{J}_n \otimes \mathbf{A}_3) \\ &\quad \cdot \mathbf{s}\mathbf{s}^\dagger (\mathbf{J}_{n'}^\dagger \otimes \mathbf{A}_3)] \end{aligned} \quad (8)$$

其中, σ_n , ϵ_n 和 χ_n 为引入文献[8]中的参数, 分别有 $\sigma_n \triangleq \mathbb{E}[|C_{\text{HH},n}|^2]$, $\epsilon_n \triangleq \frac{\mathbb{E}[|C_{\text{HV},n}|^2]}{\mathbb{E}[|C_{\text{HH},n}|^2]}$, $\chi_n \triangleq \frac{\mathbb{E}[|C_{\text{VV},n}|^2]}{\mathbb{E}[|C_{\text{HH},n}|^2]}$ 。

3 问题描述

首先, $2M$ 维接收矢量 \mathbf{r} 包括目标回波 $\alpha_T \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s}$ 、系统噪声 \mathbf{v} 和信号相关杂波 $\mathbf{C}\mathbf{s}$, 则将 \mathbf{r} 经过滤波器 $\mathbf{w} \triangleq [w(0), w(1), \dots, w(2M-1)]^\top$ 处理的输出为 $y = \mathbf{w}^\dagger \mathbf{r} = \alpha_T \mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s} + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{C}\mathbf{s} + \mathbf{w}^\dagger \mathbf{v}$, 相应的 SCNR 为

$$\text{SCNR}_\theta(\mathbf{s}, \mathbf{w}) \triangleq \frac{|\alpha_T|^2 |\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s}|^2}{\mathbb{E}[|\mathbf{w}^\dagger \mathbf{C}\mathbf{s}|^2] + \mathbb{E}[|\mathbf{w}^\dagger \mathbf{v}|^2]} \quad (9)$$

约束条件方面, 要求发射波形满足功率和相似性双重约束。功率约束方面, 不失一般性, 取 $\|\mathbf{s}\|^2 = 1$, 其中 $\|\cdot\|$ 表示 Frobenius 范数。相似性约束方面, 令 $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \gamma$, 其中 γ 为相似性参数, 它给定了相似度的可行域, \mathbf{s}_0 为满足 $\|\mathbf{s}_0\|^2 = 1$ 的给定已知波形。不难发现, $\gamma \leq 2$, 且 $\gamma = 2$ 对应于无相似性约束的情形。

综上, 在发射波形的功率和相似性约束下, 以最大化滤波器输出 SCNR 为准则的波形和滤波器联合优化问题归结为

$$\left. \begin{aligned} \max_{\mathbf{s}, \mathbf{w}} \frac{|\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s}|^2}{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{M}_c(\mathbf{s})\mathbf{w} + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w}} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{s}\|^2 = 1, \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \gamma \end{aligned} \right\} \mathcal{P} \quad (10)$$

其中由于不影响优化问题的求解, 式(10)的目标函数部分省去了式(9)中的常数项 $|\alpha_T|^2$ 。

然而, 由于式(10)的目标函数是非凸函数, 约束条件是非凸集, 因此 \mathcal{P} 是一个非凸优化问题。在继续求解 \mathcal{P} 之前, 给出引理1如下(证明过程可通过套用文献[13]第2章定理2得到, 限于篇幅, 不再赘述)。

引理1 优化问题 \mathcal{P} 可解且对于任意 γ , \mathcal{P} 等价于

$$\left. \begin{aligned} \max_{\mathbf{s}, \mathbf{w}} \frac{\Re(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s})}{\sqrt{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{M}_c(\mathbf{s})\mathbf{w} + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} \|\mathbf{s}\|^2}} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{s}\|^2 \leq 1, \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \gamma \end{aligned} \right\} \mathcal{P}_1 \quad (11)$$

其中, $\Re(\cdot)$ 指取实部操作。换句话说, 给定问题 \mathcal{P} 的最优解, 可以相应得到 \mathcal{P}_1 的解, 反之亦然。

可以看出, 由于目标函数非凸, 所以 \mathcal{P}_1 依然是一个非凸优化问题。但与 \mathcal{P} 不同的是, 问题 \mathcal{P}_1 的目标函数是准凹(quasi-concave)的, 且其约束条件为凸集。

4 迭代方法求解问题 \mathcal{P}

虽然对 \mathcal{P} 进行了变形, 但直接求解问题 \mathcal{P}_∞ 仍无从下手。针对这一情形, 本文提出一种迭代求解方法, 即迭代优化式

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{w}) \triangleq \frac{\Re(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s})}{\sqrt{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{M}_c(\mathbf{s})\mathbf{w} + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} \|\mathbf{s}\|^2}} \quad (12)$$

具体来说, 若已知第 $m-1$ 步接收滤波器的最优解 $\mathbf{w}^{(m-1)}$, 则搜索第 m 步雷达发射波形 $\mathbf{s}^{(m)}$ 使得函数 $g(\mathbf{s}, \mathbf{w})$ 最大; 一旦解得 $\mathbf{s}^{(m)}$, 搜索第 m 步滤波器 \mathbf{w} 的解 $\mathbf{w}^{(m)}$ 使得函数 $g(\mathbf{s}, \mathbf{w})$ 最大, 以此类推。整个迭代优化的起点为 \mathbf{s}_0 , 即令 $\mathbf{s}^{(0)} = \mathbf{s}_0$ 。从解析的角度看, $\mathbf{s}^{(m)}$ 和 $\mathbf{w}^{(m)}$ 分别是优化问题

$$\left. \begin{aligned} \max_{\mathbf{s}} \frac{\Re(\mathbf{w}^{(m-1)\dagger} \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s})}{\sqrt{\mathbf{w}^{(m-1)\dagger} \mathbf{M}_c(\mathbf{s})\mathbf{w}^{(m-1)} + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2}} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{s}\|^2 \leq 1, \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \gamma \end{aligned} \right\} \mathcal{P}_{\mathbf{s}^{(m)}} \quad (13)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \frac{\Re(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s}^{(m)})}{\sqrt{\mathbf{w}^\dagger \mathbf{M}_c(\mathbf{s}^{(m)})\mathbf{w} + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} \|\mathbf{s}^{(m)}\|^2}} \\ \text{s.t. } \Re(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{T}(\theta)\mathbf{s}^{(m)}) \geq 0 \end{aligned} \right\} \mathcal{P}_{\mathbf{w}^{(m)}} \quad (14)$$

的解。已经证明[14], 上述循环迭代流程的结果具有单调不减性质, 也就是说, 迭代过程每一步的输出 SCNR 均大于等于上一步的输出结果。另外, 需要说明的是, 上述迭代方法求解得到的最优解是全局最优的[15]。根据上述迭代求解方法, 下面将分别求解优化问题 $\mathcal{P}_{\mathbf{s}^{(m)}}$ 和 $\mathcal{P}_{\mathbf{w}^{(m)}}$, 接着给出完整的问题 \mathcal{P}_1 求解方案。

4.1 接收滤波器优化: 解优化问题 $\mathcal{P}_{\mathbf{w}^{(m)}}$

对于优化问题 $\mathcal{P}_{\mathbf{w}^{(m)}}$, 已经证明, 其解为如下形式的 Capon 滤波器[16], 即

$$\mathbf{w}^{(m)} = \frac{\left(\mathbf{M}_c(\mathbf{s}^{(m)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{s}^{(m)}\|^2 \mathbf{I}\right)^{-1} \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s}^{(m)}}{\left\| \left(\mathbf{M}_c(\mathbf{s}^{(m)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{s}^{(m)}\|^2 \mathbf{I}\right)^{-1/2} \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s}^{(m)} \right\|^2} \quad (15)$$

可以看出,接收滤波器 $\mathbf{w}^{(m)}$ 与发射波形 $\mathbf{s}^{(m)}$ 和目标散射矩阵 $\mathbf{T}(\theta)$ 相关。

4.2 发射波形优化: 解优化问题 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$

为解问题 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$,基于分式规划(Fractional Programming, FP)相关知识,首先给出定理1^[17]。

定理1 令 $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^N$ 为凸紧集,函数 $f(\mathbf{x})$ 为定义在 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 上的非负凹函数, $g(\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ 上的凸函数且 $g(\mathbf{x}) \geq 0$,则分式规划问题

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{x}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} \\ \text{s.t. } \mathbf{x} \in \mathcal{X} \end{array} \right\} \mathcal{P}_{\text{FP}} \quad (16)$$

可解,且其解可通过算法1给出的Dinkelbach算法求得,见表1。

表1 算法1: Dinkelbach算法求解 \mathcal{P}_{FP}

已知: $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{C}^N$, $f(\mathbf{x})$ 和 $g(\mathbf{x})$
求: 优化问题 \mathcal{P}_{FP} 的解 \mathbf{x}^*
(1) 令 $m = 0$, $\lambda_m = 0$;
(2) 重复
(3) 计算 $\mathbf{x}_m^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{f(\mathbf{x}) - \lambda_m g(\mathbf{x})\}$;
(4) $F_\lambda = f(\mathbf{x}_m^*) - \lambda_m g(\mathbf{x}_m^*)$;
(5) $m = m + 1$;
(6) $\lambda_m = \frac{f(\mathbf{x}_m^*)}{g(\mathbf{x}_m^*)}$;
(7) 直到 $F_\lambda = 0$;
(8) 输出 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_m^*$ 。

需要说明的是,算法1具有线性收敛率^[17],且对于每一步迭代,它只要求求解一个计算量为多项式时间的凸问题。另外,实际计算时,退出条件 $F_\lambda = 0$ 采用 $F_\lambda \leq \eta$,其中 η 为足够小的预设值。

然后,可以证明,问题 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 属于上述 \mathcal{P}_{FP} 问题。

证明 首先,根据文献[10]式(20),有 $\mathbf{w}^\dagger \mathbf{M}_c(\mathbf{s}) \mathbf{w} + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = \mathbf{s}^\dagger (\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}) + \sigma_v^2 \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} \mathbf{I}) \mathbf{s}$ 。其中 $\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w})$ 为与 $\mathbf{M}_c(\mathbf{s})$ 相似的对称结构。于是,式(13)可以等价变形为

$$\left. \begin{array}{l} \max_{\mathbf{s}} \frac{\Re(\mathbf{w}^{(m-1)\dagger} \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s})}{\sqrt{\mathbf{s}^\dagger (\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}^{(m-1)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2 \mathbf{I}) \mathbf{s}}} \\ \text{s.t. } \|\mathbf{s}\|^2 \leq 1, \|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\| \leq \gamma \end{array} \right\} \mathcal{P}_{s^{(m)}} \quad (17)$$

不难看出,式(17)中目标函数的分子为变量 \mathbf{s} 的仿射函数,因此是 \mathbf{s} 的凹函数。又因分母部分中,矩阵 $(\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}^{(m-1)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2 \mathbf{I})$ 是Hermit矩阵,且

对于任意 $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$,有 $\mathbf{s}^\dagger (\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}^{(m-1)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2 \mathbf{I}) \mathbf{s} > 0$,因此上述Hermit矩阵是正定的。于是,该Hermit矩阵可以等价表示为 $(\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}^{(m-1)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2 \mathbf{I}) \triangleq \mathbf{B}^\dagger \mathbf{B}$,则有 $\mathbf{s}^\dagger (\bar{\mathbf{M}}_c(\mathbf{w}^{(m-1)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{w}^{(m-1)}\|^2 \mathbf{I}) \mathbf{s} = (\mathbf{B} \mathbf{s})^\dagger \mathbf{B} \mathbf{s}$ 。这样,上述目标函数的分母可看作 $2N$ 维矢量 $\mathbf{B} \mathbf{s}$ 的范数,而它是凸的。

又 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 的可行域为凸紧集。这样一来,目标函数和可行域与定理1的 \mathcal{P}_{FP} 一致,于是, $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 可以通过算法1求解。证毕

最终, $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 可以通过算法1求解。

4.3 发射-接收联合优化: 完整迭代流程

在完成了对 $\mathcal{P}_{\mathbf{w}^{(m)}}$ 和 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 的求解之后,结合本节一开始对迭代方法的描述,这里给出发射波形和接收滤波器联合优化的完整迭代流程,如算法2所述,见表2。

表2 算法2: 发射波形-接收滤波器联合优化算法

已知: $\sigma_v^2, \{(r_{ij}(n, n'), \sigma_n, \epsilon_n, \chi_n), \{i, j\} \in \{1, 2, 3\}, \{n, n'\} = -N + 1, \dots, M - 1\}, \mathbf{T}(\theta), \mathbf{s}_0, \gamma$ 和 ζ
求: 优化问题 \mathcal{P} 的解 $(\mathbf{s}^*, \mathbf{w}^*)$
(1) 令 $m := 0, \mathbf{s}^{(m)} = \mathbf{s}_0$,代入式(15)得到 $\mathbf{w}^{(0)}$,对应 $\text{SINR}^{(0)} = (g(\mathbf{s}_0, \mathbf{w}^{(0)}))^2$;
(2) 重复
(3) $m := m + 1$;
(4) 采用 算法1 解 $\mathcal{P}_{s^{(m)}}$ 得到第 m 步的最优发射波形 $\mathbf{s}^{(m)}$;
(5) 将 $\mathbf{s}^{(m)}$ 代入式(15)得到第 m 步的最优接收滤波器 $\mathbf{w}^{(m)}$;
(6) 计算 $\text{SINR}^{(m)} = (g(\mathbf{s}^{(m)}, \mathbf{w}^{(m)}))^2$;
(7) 直到 $ \text{SCNR}^{(m)} - \text{SCNR}^{(m-1)} < \zeta$;
(8) 输出 $\mathbf{s}^* = \mathbf{s}^{(m)}, \mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{(m)}$ 。

计算量方面,算法2的计算量与外层迭代次数 \bar{N} 和每一步迭代所需计算量有关。具体来说,外层计算量与迭代次数 \bar{N} 呈线性关系,而对于每一步迭代,它包括计算协方差项 $(\mathbf{M}_c(\mathbf{s}^{(m)}) + \sigma_v^2 \|\mathbf{s}^{(m)}\|^2 \mathbf{I})^{-1}$ 和求解算法1,前者复杂度在3.2节已分析,后者复杂度与内层迭代次数呈线性关系。对于每一步迭代,其复杂度对应于解2阶锥问题的复杂度,为 $O((2M)^{3.5} \lg(1/\eta))$ ^[18]。

5 性能验证

采用佐治亚理工学院公开的T-72坦克²⁾全极化雷达实测数据作为目标特性数据,有关目标的详细

²⁾根据T-72坦克的长度信息和雷达的距离分辨率选定。

信息可参见文献[13]第2章。在本文仿真中, 取 $|\alpha_T|^2 = 1$, 随机取雷达俯仰角为 31.64° , TIRM的支撑区间²⁾取 $Q = 37$, 为方便接下来设定杂波和噪声功率水平, 对目标散射矩阵进行归一化处理, 即

$$\mathbf{T}_n(\theta) = \frac{\bar{\mathbf{T}}_n(\theta)}{\sqrt{\sum_{n=0}^{Q-1} \|\bar{\mathbf{T}}_n(\theta)\|^2}} \quad (18)$$

其中, $\bar{\mathbf{T}}_n(\theta)$ 和 $\mathbf{T}_n(\theta)$ 分别表示归一化前和归一化后的目标散射矩阵。发射波形长度 $2N = 60$, 初始发射波形 \mathbf{s}_0 的H和V极化分量均取式(19)的线性调频信号

$$\mathbf{s}_{H0}(n) = \mathbf{s}_{V0}(n) = \frac{1}{\sqrt{2N}} e^{j\pi \frac{n^2}{2N}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (19)$$

算法1的精度控制参数取 $\eta = 10^{-6}$, 算法2的退出条件门限取 $\zeta = 10^{-3}$ 。此外, 凸优化问题的求解采用Matlab CVX工具包。

杂波参数采用文献[8]报道的草地杂波参数, 即 $\epsilon_n = \epsilon = 0.19$, $\chi_n = \chi = 1.03$ 和 $\rho_n = \rho = 0.52$ 。杂波和噪声功率 σ_n , σ_v^2 分别根据信噪比(Signal Noise Ratio, SNR)和杂噪比(Clutter Noise Ratio, CNR)确定, 其定义分别为

$$\text{SNR} \triangleq \frac{\sum_{n=0}^{Q-1} \|\mathbf{T}_n(\theta)\|^2}{2 \times M \times \sigma_v^2},$$

$$\text{CNR} \triangleq \frac{\sigma_n^2 \times \left(\sum_{n=0}^{M-1} [\mathbb{E}[\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^\dagger]] |_{\sigma_n=1} \right)}{2 \times M \times \sigma_v^2} \quad (20)$$

其中, $[\mathbb{E}[\mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^\dagger]] |_{\sigma_n=1}$ 表示 $\sigma_n = 1$ 时的统计平均值。在整个仿真过程中, 取SNR=5 dB, CNR=10 dB。最后, 有不同距离单元杂波间相互独立。下面从几个不同角度检验本文方法的性能。

5.1 算法的收敛性

随机取目标相对雷达方位角³⁾ $\theta_0 = 26.4^\circ$ 和 116.3° , 图1描述了滤波器输出SCNR随算法2迭代次数的变化曲线, 其中图1(a)、图1(b)分别对应方位角 $\theta_0 = 26.4^\circ$ 和 116.3° , 而每个图中又包括 γ 对应于0.01, 0.10, 0.50和1.00的4条曲线。根据图1(a)和图1(b)可以看出, 随着迭代次数的增加, 本文方法单调增加SCNR。而 γ 越大, 输出SCNR值越大, 这是由于 γ 值的增加提高了目标函数的可行域, 这证实了本文方法的有效性。

5.2 发射波形模糊度函数

取目标相对雷达方位角 $\theta_0 = 116.3^\circ$, 如图2给出了经优化后水平极化通道发射波形的模糊度函数幅度图, 其中图2(a)、图2(b)、图2(c)和图2(d)分别对应于相似性参数 γ 为0(即未作优化处理, $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0$), 0.1, 0.5和1.0时的结果。与5.1节结果相反, 随着 γ 的增加, 其波形的模糊度函数的主峰越来越弱, 纯度越来越低, 而杂散分量越来越多(垂直极化通道的结果也呼应上述情形)。这是由于随着 γ 的增加, 虽然输出SCNR的值提高, 但是因为发射波形的约束降低, 所以偏离原模板波形程度更高, 造成原模板波形所固有的一些特性丢失。因此, 在实际工程中, 需要综合权衡SCNR提高和波形特性损失之间的折中。

5.3 与现有算法的性能比较

对本文方法和现有其他方法进行性能比较。定义

$$\text{SCNR}(\theta) \triangleq \frac{|\alpha_T|^2 |\mathbf{w}_\Delta^\dagger \mathbf{T}(\theta) \mathbf{s}_\Delta|^2}{\mathbb{E}[|\mathbf{w}_\Delta^\dagger \mathbf{C} \mathbf{s}_\Delta|^2] + \mathbb{E}[|\mathbf{w}_\Delta^\dagger \mathbf{v}|^2]} \quad (21)$$

为名义方位角等于 θ_Δ 时(此时雷达发射波形取对应 θ_Δ 的最优发射波形 \mathbf{s}_Δ , 接收滤波器为对应最优接收滤波器 \mathbf{w}_Δ), 实际方位角 θ 处的接收SCNR值。令

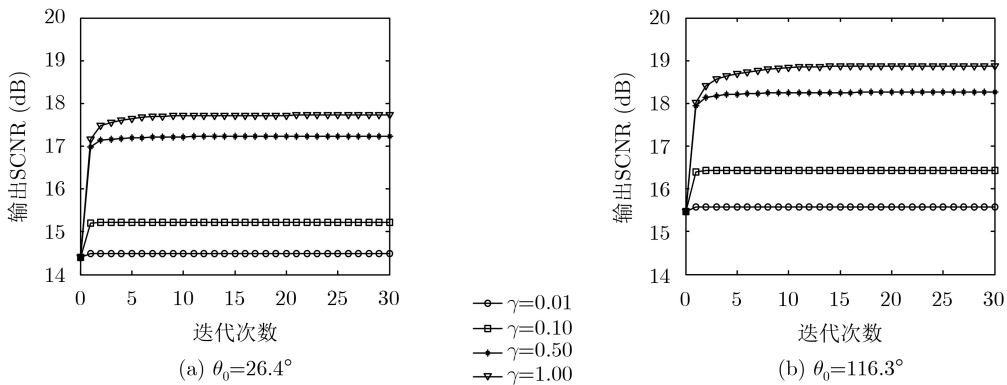


图1 信杂噪比随迭代次数的变化曲线

³⁾可取满足步进条件的 $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ 范围的任一值。

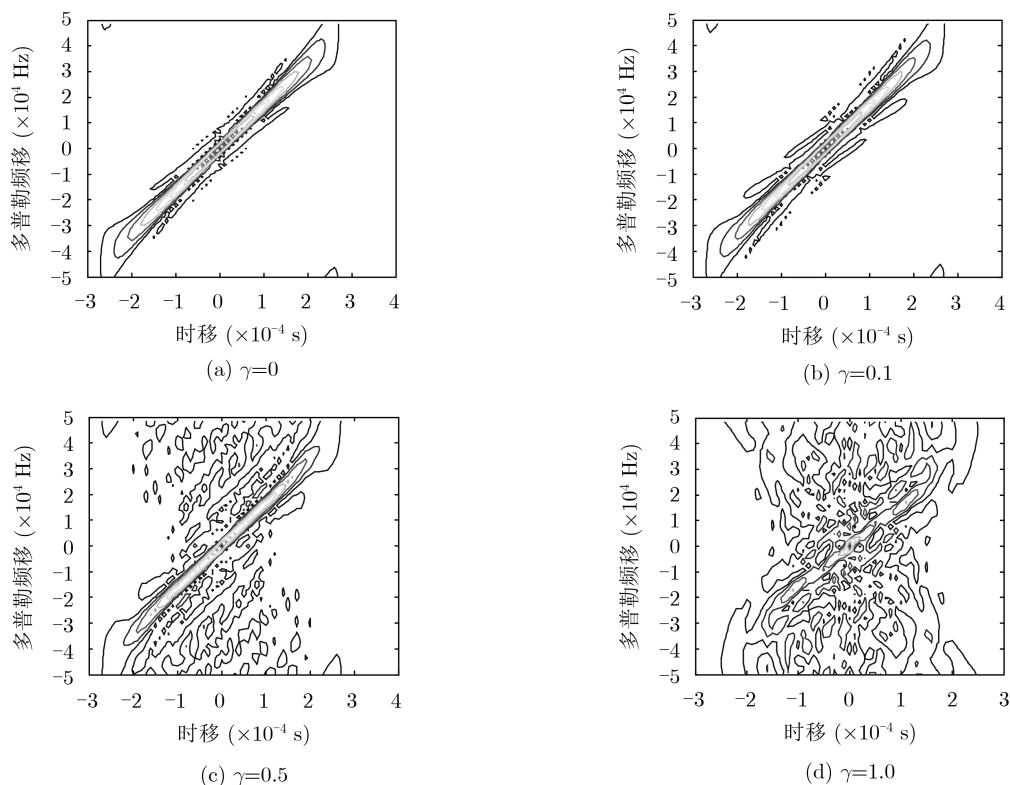


图2 经优化后的全极化雷达水平极化通道发射波形模糊度函数幅度图

$\theta_{\Delta} = 26.4^{\circ}$, $\theta \in [25.9^{\circ}, 26.9^{\circ}]$, 选用 Pillai 方法、Chen 方法, 对比它们与本文方法之间的性能。如图3所示给出不同方法的滤波器输出 SCNR 随方位角 θ 的变化曲线, 其中本文方法分别给出相似性约束参数 $\gamma = 0.01, 0.10$ 和 0.50 的结果 (Pillai 方法和 Chen 方法仅有波形能量约束, 等价于取 $\gamma = 2.0$)。

可以看出, 由于不能保证算法的收敛性, Pillai 方法的性能明显不及 Chen 方法, 而由于施加了相似性约束, 本文方法的输出 SCNR 均小于 Chen 方法, 结合 5.2 节的结果, 不难得出, 施加相似性约束实现了输出 SCNR 与优化波形特性之间的折中,

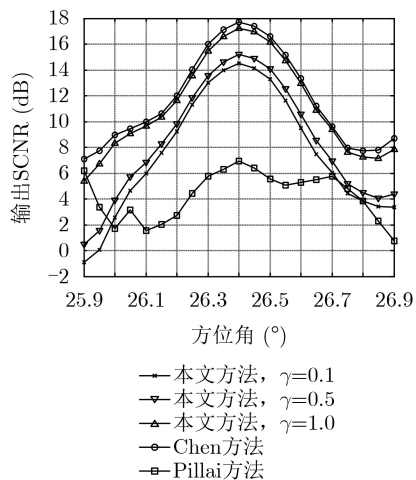


图3 本文方法和 Pillai 方法、Chen 方法的性能对比结果

这也印证了本文最初的设定。另外, 随着相似性参数 γ 值的提高, 输出 SCNR 的水平也相应升高, 这是因为, γ 越大, 相似性约束越宽松。值得一提的是, 当 $\gamma = 0.5$ 时, SCNR 水平已逼近没有相似性约束的情形。最后, 当实际方位角 θ 偏离名义方位角 θ_{Δ} 时, 可以看到显著的 SCNR 性能下降, 这表明, 高分辨条件下全极化雷达目标特性敏感于实现角的改变。

6 结论

以最大化全极化雷达的输出 SCNR 为优化准则, 本文研究了发射波形的能量约束和相似性约束双重约束下, 全极化雷达的发射波形和接收滤波器联合优化问题。提出了一种发射波形-接收滤波器的迭代优化方法。通过解算, 最优接收滤波器具有 Capon 滤波器结构, 最优发射波形的设计通过采用 Dinkelbach 算法解一个典型的分式规划问题求解。在实验环节, 通过采用实测目标数据验证了本文算法的有效性, 证实了波形优化可提高雷达的输出 SCNR, 但同时也展示了其对雷达波形在模糊度函数方面的不利影响, 强调了在实际工程中, 要折中考虑上述因素。最后对比了本文方法和其他两种方法的性能, 印证了本文方法的初始的设计考虑。

参考文献

- [1] LEE J S and ERIC P. Polarimetric Radar Imaging: Basics

- to Applications[M]. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2020.
- [2] TREUHAFT R N and SIQUEIRA P R. Vertical structure of vegetated land surfaces from interferometric and polarimetric radar[J]. *Radio Science*, 2000, 35(1): 141–177. doi: [10.1029/1999RS900108](https://doi.org/10.1029/1999RS900108).
- [3] 王雪松. 雷达极化技术研究现状与展望[J]. *雷达学报*, 2016, 5(2): 119–131. doi: [10.12000/JR16039](https://doi.org/10.12000/JR16039).
WANG Xuesong. Status and prospects of radar polarimetry techniques[J]. *Journal of Radars*, 2016, 5(2): 119–131. doi: [10.12000/JR16039](https://doi.org/10.12000/JR16039).
- [4] LEI Lei, ZHANG Guifu, DOVIAK R J, *et al.* Comparison of theoretical biases in estimating polarimetric properties of precipitation with weather radar using parabolic reflector, or planar and cylindrical arrays[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(8): 4313–4327. doi: [10.1109/TGRS.2015.2395714](https://doi.org/10.1109/TGRS.2015.2395714).
- [5] CHENG Ziyang, HE Zishu, LIAO Bin, *et al.* MIMO radar waveform design with PAPR and similarity constraints[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2018, 66(4): 968–981. doi: [10.1109/TSP.2017.2780052](https://doi.org/10.1109/TSP.2017.2780052).
- [6] 庞晓娇, 赵永波, 徐保庆, 等. 基于原子范数的MIMO雷达发射波形设计方法[J]. *电子与信息学报*, 2019, 41(9): 2143–2150. doi: [10.11999/JEIT181107](https://doi.org/10.11999/JEIT181107).
PANG Xiaojiao, ZHAO Yongbo, XU Baoqing, *et al.* An atomic norm-based transmit waveform design method in MIMO radar[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2019, 41(9): 2143–2150. doi: [10.11999/JEIT181107](https://doi.org/10.11999/JEIT181107).
- [7] 李慧, 赵永波, 程增飞. 基于线性调频时宽的MIMO雷达正交波形设计[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(5): 1151–1158. doi: [10.11999/JEIT170426](https://doi.org/10.11999/JEIT170426).
LI Hui, ZHAO Yongbo, and CHENG Zengfei. MIMO Radar orthogonal waveform set design based on chirp durations[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(5): 1151–1158. doi: [10.11999/JEIT170426](https://doi.org/10.11999/JEIT170426).
- [8] NOVAK L M, SECHTIN M B, and CARDULLO M J. Studies of target detection algorithms that use polarimetric radar data[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1989, 25(2): 150–165. doi: [10.1109/7.18677](https://doi.org/10.1109/7.18677).
- [9] GARREN D A, ODOM A C, OSBORN M K, *et al.* Full-polarization matched-illumination for target detection and identification[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2002, 38(3): 824–837. doi: [10.1109/TAES.2002.1039402](https://doi.org/10.1109/TAES.2002.1039402).
- [10] CHEN Chunyang and VAIDYANATHAN P P. MIMO radar waveform optimization with prior information of the extended target and clutter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(9): 3533–3544. doi: [10.1109/TSP.2009.2021632](https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2021632).
- [11] YUAN Mengxin, CHENG Xu, ZHANG Jing, *et al.* Adaptive waveform design of polarimetric radar for extended targets in signal-dependent clutter[C]. Web, Artificial Intelligence and Network Applications—Proceedings of the Workshops of the 33rd International Conference on Advanced Information Networking and Applications, Matsue, Japan, 2019: 3–13.
- [12] 包本刚, 朱湘萍, 谭永宏. 极化雷达发射波形和接收滤波器联合优化新方法[J]. *重庆大学学报*, 2019, 42(1): 124–134.
BAO Bengang, ZHU Xiangping, and TAN Yonghong. A novel method to jointly optimize transmit waveform and receive filter of polarimetric radar[J]. *Journal of Chongqing University*, 2019, 42(1): 124–134.
- [13] 程旭. 全极化雷达目标检测与参数估计方法研究[D]. [博士论文], 国防科学技术大学, 2016.
CHENG Xu. Study on target detection and parameter estimation approaches of fully polarimetric radar[D]. [Ph. D. dissertation], National University of Defense Technology, 2016.
- [14] CHENG Xu, AUBRY A, CIUNOZO D, *et al.* Robust waveform and filter bank design of polarimetric radar[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(1): 370–384. doi: [10.1109/TAES.2017.2650619](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2650619).
- [15] TKACENKO A and VAIDYANATHAN P P. Iterative greedy algorithm for solving the FIR paraunitary approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(1): 146–160. doi: [10.1109/TSP.2005.861054](https://doi.org/10.1109/TSP.2005.861054).
- [16] LI Jian, STOICA P, and WANG Zhisong. On robust Capon beamforming and diagonal loading[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2003, 51(7): 1702–1715. doi: [10.1109/TSP.2003.812831](https://doi.org/10.1109/TSP.2003.812831).
- [17] CROUZEIX J P and FERLAND J A. Algorithms for generalized fractional programming[J]. *Mathematical Programming*, 1991, 52(1/3): 191–207.
- [18] BEN-TAL A and NEMIROVSKI A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

孙挺: 男, 1972年生, 教授, 主要研究方向为信号与信息处理技术。
程旭: 男, 1987年生, 博士后, 主要研究方向为统计信号处理、雷达信号处理等。

责任编辑: 马秀强