

基于有限元的区域分解方法在永磁聚焦系统仿真中的应用

谢鹏 徐立* 尹俊辉 杨中海 李斌

(电子科技大学电子科学与工程学院 成都 610054)

摘要: 随着计算机技术以及并行求解技术的发展, 区域分解方法越来越多地应用于计算电磁学的各个领域。针对微波管中的永磁聚焦系统仿真, 该文提出一种基于有限元的非重叠区域分解方法, 其引入一种新型传输条件, 并采用内罚的方式推导出有限元弱形式。该区域分解法的最大优势是不需要引入多余的未知量, 并且最终集成的有限元矩阵满足对称正定性, 适合采用预处理共轭梯度法进行矩阵方程的求解。该文仿真了多个微波管永磁聚焦系统, 并与商业软件Maxwell进行了详细的对比, 结果表明所提出的区域分解方法和Maxwell精度相当, 却拥有着更加优越的计算性能。

关键词: 微波管; 永磁聚焦系统; 区域分解法; 有限元; 传输条件

中图分类号: TN124

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2021)02-0488-07

DOI: 10.11999/JEIT190706

Application of Finite Element-Based Domain Decomposition Method to the Simulation for Permanent Magnet Focusing System

XIE Peng XU Li YIN Junhui YANG Zhonghai LI Bin

(School of Electronic Science and Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

Abstract: With the development of computer technology and parallel solving technology, domain decomposition method has been increasingly applied to various fields of computational electromagnetics. For the simulation of microwave tube permanent magnet focusing system, this paper proposes a finite element-based non-overlapping domain decomposition method, and introduces a novel transmission condition. Then the interior penalty formulation is used to derive the finite element weak form. The biggest advantage of the proposed domain decomposition method is that no extra unknowns are introduced, and the final finite element matrix is symmetric and positive definite, which makes the matrix equation suitable to be solved by the preconditioned conjugate gradient method. In this paper, several microwave tube permanent magnet focusing systems are simulated and compared with the commercial software Maxwell in detail. The results show that the proposed domain decomposition method has the same accuracy as Maxwell, but has a more superior computational performance.

Key words: Microwave tube; Permanent magnet focusing system; Domain decomposition method; Finite element; Transmission condition

1 引言

微波管广泛应用于卫星通信、雷达系统、电子对抗以及科学研究领域^[1-3], 其中永磁聚焦系统常作为外部磁场用于电子束聚焦^[4]。目前, 在大量的

科学及工程应用中, 有限元方法针对复杂结构仍然是主流的数值分析工具^[5,6]。在永磁聚焦系统仿真设计领域, 国外Maxwell^[7]是最流行的3维有限元仿真设计商业软件, 国内电子科技大学开发的微波管模拟器套装^[8]里面的永磁聚焦模拟器^[4]则是具有自主知识产权的3维磁场仿真设计软件。它们都拥有永磁聚焦系统仿真能力, 但是当求解大规模和多尺度问题时, 其有限元矩阵求解通常会花费大量的时间和内存, 有时甚至由于缺少有效的预处理导致矩阵无法求解。

非重叠区域分解法采用“分而治之”的思想,

收稿日期: 2019-09-10; 改回日期: 2020-08-24; 网络出版: 2020-12-10

*通信作者: 徐立 lixu@uestc.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61301054, 61771105, 61921002), 中央高校基本科研业务费专项资金(2672018ZYGX2018J037)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61301054, 61771105, 61921002), The Fundamental Research Funds for Central Universities (2672018ZYGX2018J037)

将原求解域划分成若干个互不重叠的子区域进行求解,其具有天然的并行性,非常适合仿真大型复杂结构^[9]。本文采用基于磁标势有限元的非重叠区域分解方法来进行永磁聚焦系统的仿真计算。归根结底,基于磁标势的永磁聚焦系统仿真属于求解泊松方程边值问题。在这类边值问题的基于有限元的区域分解方法中,目前的处理方式主要有两种,一种是拉格朗日乘子类型的区域分解法^[10,11];一种是基于内罚方式的区域分解法^[12,13]。前者会有两种不同类型的推导过程:一是保留拉格朗日乘子的方式,这种方式会额外增加未知量个数,并且会生成一个对称不定的鞍点矩阵系统,不利于方程的求解;二是在推导过程中消去拉格朗日乘子,这种方式会生成一个对称正定的系数矩阵,但是这种方式有可能会因为巨大的计算代价而不能显式地计算系数矩阵^[14]。基于内罚的区域分解方法则不需要引入诸如拉格朗日乘子类型的辅助变量,只需要将传输条件引入基于内罚方式的有限元弱形式推导过程中,目前采用的主要是Robin传输条件,由Lions^[15]首次提出,但目前基于Robin传输条件的内罚区域分解法需要考虑法向偏导项的计算,并且最终形成的有限元矩阵是非对称的。

本文提出的区域分解方法同样是基于内罚方式的,但是引入了一种新型传输条件,其来源于接触热阻的定义。相比于现有的方法,该区域分解方法的主要优势包括:(1)不需要引入多余的未知量,使得有限元矩阵维数更少;(2)有限元矩阵集成过程更加简单,只需要考虑区域交界面上的物理量,而且不需要进行法向偏导项的计算,更重要的是最终产生的有限元矩阵满足对称正定性,矩阵性质更好,非常适合采用共轭梯度法进行求解。通过对多个永磁结构的仿真计算可以发现,相比于商业软件Maxwell,本文所提出的区域分解方法在保证求解精度的同时,可以更加高效地实现对微波管永磁聚焦系统的仿真。

2 基于有限元的区域分解方法

2.1 基于内罚的区域分解有限元弱形式

永磁磁场的磁标势有限元分析的边值问题为

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \cdot \mu \nabla \varphi &= \nabla \cdot \mu \mathbf{H}_c, & \text{in } \Omega \\ \varphi &= 0, & \text{on } \Gamma_v \\ -\mu \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} &= \mu \mathbf{H}_c \cdot \mathbf{n}, & \text{on } \Gamma_m \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中, μ 为磁导率, φ 为标量磁位, \mathbf{H}_c 为永磁材料的矫顽场强, \mathbf{n} 为永磁边界的外法向矢量, Ω 为求解域, Γ_v 为真空的边界, Γ_m 为永磁材料的边界。

为了便于推导区域分解有限元弱形式,将求解域分成2个子区域,如图1所示,其中 Ω_1 、 Ω_2 代表

2个子区域, Γ_{v1} 、 Γ_{v2} 为2个子区域的真空边界, Γ_{m1} 、 Γ_{m2} 为2个子区域的永磁边界, Γ 为2个子区域的交界面, \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 为交界面上的外法向矢量。

扩展单个区域的边值问题式(1)到2个子区域,可以得到

$$-\nabla \cdot \mu_1 \nabla \varphi_1 = \nabla \cdot \mu_1 \mathbf{H}_{c1}, \quad \text{in } \Omega_1 \quad (2)$$

$$-\nabla \cdot \mu_2 \nabla \varphi_2 = \nabla \cdot \mu_2 \mathbf{H}_{c2}, \quad \text{in } \Omega_2 \quad (3)$$

$$-\mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2}, \quad \text{on } \Gamma \quad (4)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \text{on } \Gamma \quad (5)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{on } \Gamma_{v1} \quad (6)$$

$$\varphi_2 = 0, \quad \text{on } \Gamma_{v2} \quad (7)$$

$$-\mu_1 \nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \mu_1 \mathbf{H}_{c1} \cdot \mathbf{n}_1, \quad \text{on } \Gamma_{m1} \quad (8)$$

$$-\mu_2 \nabla \varphi_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mu_2 \mathbf{H}_{c2} \cdot \mathbf{n}_2, \quad \text{on } \Gamma_{m2} \quad (9)$$

其中,式(4)和式(5)用来保证区域交界面上物理量的连续性,但是其收敛性很差,常用的Robin传输条件也是通过两式的线性变换得到的。本文抛弃了之前的传输条件构造方式,而是从接触热阻的定义^[16]出发,开创性地提出了一种新型传输条件,其具体表达式为

$$-\mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} = \gamma (\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{on } \Gamma \quad (10)$$

$$-\mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} = \gamma (\varphi_2 - \varphi_1), \quad \text{on } \Gamma \quad (11)$$

其中, γ 表示区域交界面上物理量连续程度的物理量,理论上当 γ 无穷大时,区域交界面上的物理量就会完全连续^[17],在实际应用过程中,只需要取一个比较大的值, 10^6 量级基本可以满足需求。

为了推导2个区域的磁标势有限元弱形式,用式(10)和式(11)代替式(4)和式(5),可以得到残差表达式

$$R_1^{\Omega_1} = \nabla \cdot \mu_1 \nabla \varphi_1 + \nabla \cdot \mu_1 \mathbf{H}_{c1}, \quad \text{in } \Omega_1 \quad (12)$$

$$R_2^{\Omega_2} = \nabla \cdot \mu_2 \nabla \varphi_2 + \nabla \cdot \mu_2 \mathbf{H}_{c2}, \quad \text{in } \Omega_2 \quad (13)$$

$$R_3^\Gamma = \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} + \gamma (\varphi_1 - \varphi_2), \quad \text{on } \Gamma \quad (14)$$

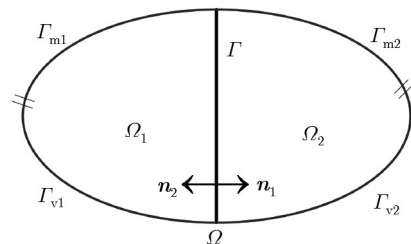


图1 单个区域分成2个子区域示意图

$$R_4^\Gamma = \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} + \gamma(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \text{on } \Gamma \quad (15)$$

$$R_5^{\Gamma_{v1}} = \varphi_1, \quad \text{on } \Gamma_{v1} \quad (16)$$

$$R_6^{\Gamma_{v2}} = \varphi_2, \quad \text{on } \Gamma_{v2} \quad (17)$$

$$R_7^{\Gamma_{m1}} = \mu_1 \nabla \varphi_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mu_1 \mathbf{H}_{c1} \cdot \mathbf{n}_1, \quad \text{on } \Gamma_{m1} \quad (18)$$

$$R_8^{\Gamma_{m2}} = \mu_2 \nabla \varphi_2 \cdot \mathbf{n}_2 + \mu_2 \mathbf{H}_{c2} \cdot \mathbf{n}_2, \quad \text{on } \Gamma_{m2} \quad (19)$$

首先定义体积分和面积分如式(20)

$$\left. \begin{aligned} (u, v)_\Omega &= \int_\Omega (u \cdot v) dv \\ \langle u, v \rangle_\Gamma &= \int_\Gamma (u \cdot v) ds \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中, u 是权函数, v 为残差项。由式(12)–式(19)可以得到如式(21)所示的线性组合方程

$$\begin{aligned} & \left(w_1, R_1^{\Omega_1} \right)_{\Omega_1} + \left(w_2, R_2^{\Omega_2} \right)_{\Omega_2} + c_1 \langle w_1, R_3^\Gamma \rangle_\Gamma \\ & + c_2 \langle w_2, R_4^\Gamma \rangle_\Gamma + c_3 \langle w_1, R_5^{\Gamma_{v1}} \rangle_{\Gamma_{v1}} \\ & + c_4 \langle w_2, R_6^{\Gamma_{v2}} \rangle_{\Gamma_{v2}} + c_5 \langle w_1, R_7^{\Gamma_{m1}} \rangle_{\Gamma_{m1}} \\ & + c_6 \langle w_2, R_8^{\Gamma_{m2}} \rangle_{\Gamma_{m2}} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 和 c_6 为待定系数。

由格林公式, 式(21)中的前两项可以写为

$$\begin{aligned} \left(w_i, R_i^{\Omega_i} \right)_{\Omega_i} &= -(\nabla w_i, \mu_i \nabla \varphi_i)_{\Omega_i} \\ & + \left\langle w_i, \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} \right\rangle_{\Gamma + \Gamma_{vi} + \Gamma_{mi}} \\ & - (\nabla w_i, \mu_i \mathbf{H}_{ci})_{\Omega_i} \\ & + \langle w_i, \mu_i \mathbf{H}_{ci} \cdot \mathbf{n}_i \rangle_{\Gamma_{mi}}, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (22)$$

对于式(22)中第1类边界条件项, 由于基函数 w_i 具有任意性, 令 $w_i = 0$, 有

$$\left\langle w_i, \mu_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n_i} \right\rangle_{\Gamma_{vi}} = 0 \quad (23)$$

也就是说, 第1类边界条件项在有限元弱形式推导过程中可以不考虑, 但需要采用强加的方式添加到最终的有限元矩阵方程里。接下来, 对于区域交界面上的项有

$$\left. \begin{aligned} \langle w_1, R_3^\Gamma \rangle_\Gamma &= \left\langle w_1, \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} \right\rangle_\Gamma \\ & + \langle w_1, \gamma(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_\Gamma \\ \langle w_2, R_4^\Gamma \rangle_\Gamma &= \left\langle w_2, \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right\rangle_\Gamma \\ & + \langle w_2, \gamma(\varphi_2 - \varphi_1) \rangle_\Gamma \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

对于永磁的边界项有

$$\left. \begin{aligned} \left\langle w_1, R_7^{\Gamma_{m1}} \right\rangle_{\Gamma_{m1}} &= \left\langle w_1, \mu_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n_1} \right\rangle_{\Gamma_{m1}} \\ & + \langle w_1, \mu_1 \mathbf{H}_{c1} \cdot \mathbf{n}_1 \rangle_{\Gamma_{m1}} \\ \left\langle w_2, R_8^{\Gamma_{m2}} \right\rangle_{\Gamma_{m2}} &= \left\langle w_2, \mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_2} \right\rangle_{\Gamma_{m2}} \\ & + \langle w_2, \mu_2 \mathbf{H}_{c2} \cdot \mathbf{n}_2 \rangle_{\Gamma_{m2}} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

令 $c_1 = -1, c_2 = -1, c_5 = -1, c_6 = -1$, 可以得到如式(26)所示的有限元弱形式表达式

$$\begin{aligned} & (\nabla w_1, \mu_1 \nabla \varphi_1)_{\Omega_1} + (\nabla w_2, \mu_2 \nabla \varphi_2)_{\Omega_2} + \langle w_1, \gamma \varphi_1 \rangle_\Gamma \\ & + \langle w_2, \gamma \varphi_2 \rangle_\Gamma - \langle w_1, \gamma \varphi_2 \rangle_\Gamma - \langle w_2, \gamma \varphi_1 \rangle_\Gamma \\ & = -(\nabla w_1, \mu_1 \mathbf{H}_{c1})_{\Omega_1} - (\nabla w_2, \mu_2 \mathbf{H}_{c2})_{\Omega_2} \end{aligned} \quad (26)$$

不难发现式(26)可以扩展到任意多个子区域的情形。

2.2 有限元离散

由于四面体单元在处理复杂边界时具有良好的适应性, 同时为了使用较少的网格和自由度得到较高的计算精度, 本文采用了基于四面体单元的2阶叠层标量基函数进行有限元离散。首先定义体积坐标, 四面体内的体积坐标满足式(27)

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (27)$$

2阶叠层标量基函数则从体积坐标出发, 由1阶基函数构造出2阶基函数, 包括了4个顶点基函数和6个边基函数^[18], 构造形式为

$$\begin{aligned} W_{10}^2 &= \{L_1, L_2, L_3, L_4, L_1 L_2, L_1 L_3, L_1 L_4, \\ & L_2 L_3, L_2 L_4, L_3 L_4\} \end{aligned} \quad (28)$$

用2阶基函数去离散式(26), 便可以得到式(29)所示的矩阵方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

由于式(29)的系数矩阵是对称正定的, 本文采用了包括块雅可比和多波前块不完全楚列斯基分解^[19]的两层预处理的共轭梯度算法来进行矩阵方程的求解, 相比于传统有限元法, 可以大幅提高求解效率和减少内存消耗。经过有限元分析得到标量磁位 φ 的值, 就可以根据式(30)得到磁感应强度 \mathbf{B} 的值

$$\mathbf{B} = \mu(-\nabla \varphi + \mathbf{H}_c) \quad (30)$$

2.3 区域划分

本文使用METIS软件包^[20]进行区域的划分, 经过大量的对比分析, 区域划分过程需要考虑以下几点:

(1) 区域划分的个数对并行效率的影响很大, 随着子区域数目的增加, 并行计算效率会逐步增加, 虽然理论上子区域数目可以随意取值, 但是实际上随着区域数目的进一步增加, 线程之间的资源竞争会更加激烈, 并且线程切换花销也随之增大, 会使得并行效率降低。

(2) 考虑到求解过程中每个子区域矩阵都需要进行预处理, 为了避免线程等待, 划分区域时应尽量使得每个子区域大小相当。

(3) 划分区域时应尽量使得区域交界面数量少, 可以加快矩阵求解过程收敛速度, 从而提高计算效率。

3 仿真实例

本节通过仿真多个微波管永磁聚焦系统, 并与商业软件 Maxwell 对比, 来验证所提出的基于有限元的区域分解方法的准确性和高效性。区域分解法中的因子 γ 取值为 10^8 , 多波前块不完全楚列斯基分解残差为 10^{-4} , 预处理共轭梯度法收敛残差和 Maxwell 一样为 10^{-6} 。所有的仿真计算都是在一台小型工作站 (Windows 10, Intel Xeon 5122 3.60 GHz 3.59 GHz 双处理器, 16 threads, 128 GB RAM) 上完成的。

3.1 单周期结构仿真

如图 2, 选取了一个典型的单周期结构^[4], 采用的区域划分方式为沿着 Z 轴方向并尽量使得每个子区域的大小相当。首先与商业软件 Maxwell 进行精度上的比较, 图 3 绘制了本文提出的区域分解法和 Maxwell 软件轴切面上的磁感应强度云图分布, 可以看到其磁感应强度云图分布趋势一致。由于磁钢、极靴与真空交界处磁场变化比较剧烈, 此处的

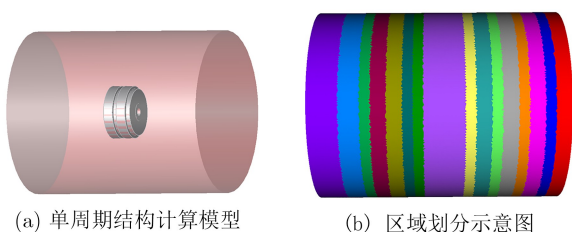


图 2 单周期结构计算模型及区域分解示意图

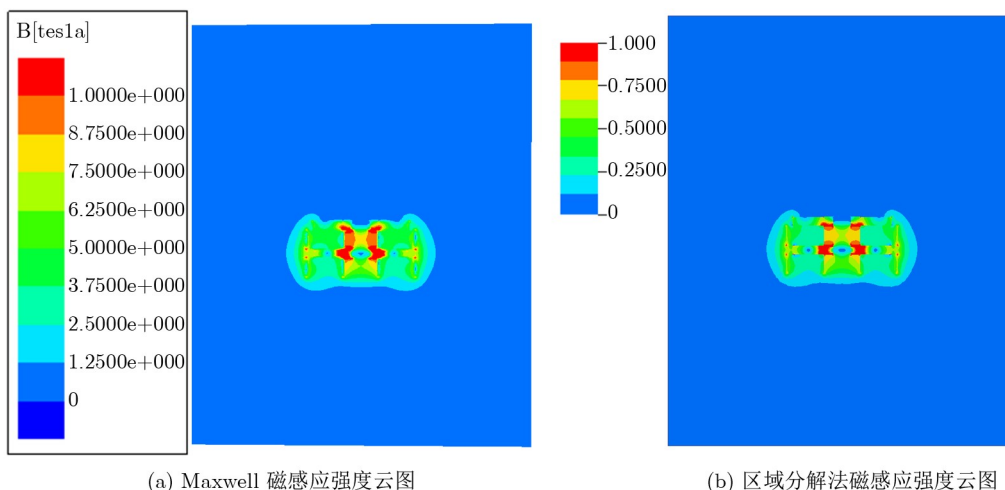


图 3 区域分解法与 Maxwell 软件轴切面磁感应强度云图对比

磁感应强度由于网格因素会产生奇异值, 所以将显示范围固定为 $0 \sim 1$ T。

如图 4 所示, 将轴线上的磁场与 Maxwell 进行对比, 可以看到其吻合情况很好, 在两个峰值点处的相对误差分别为 0.12% 和 0.06%。此外还与 Maxwell 进行了计算性能对比, 如表 1 所示, 随着子区域个数的增加, 计算时间和内存相比于 Maxwell 的优势越来越大, 当划分为 20 个子区域时, 时间加速比达到了 11.4 倍, 而内存只有 Maxwell 的 53.5%。这里需要注意的是: 在线程数更多的计算机上, 区域数的增加会带来更加优越的计算性能, 这里划分到 20 个区域已经足以说明所提出的区域分解方法具有非常好的计算优势。

3.2 Wiggler 结构仿真

本实例考虑两周期 Wiggler 结构^[4]的仿真计算, 磁钢材料为 SmCo28, 为了展示区域分解法的计算效率并兼顾区域划分的方便快捷, 将计算模型固定划分为 20 个子区域, 其计算模型和区域分解示意图如图 5 所示。首先进行磁感应强度云图的对比, 如图 6 所示, 可以看到两者轴切面上的云图分布趋势相同。为了进一步证明所提出的区域分解方法的准确性, 选取了轴线上的磁感应强度与 Maxwell 进行对比, 由图 7 可以看到其吻合程度非常好, 并且其峰值处的相对误差最大不超过 0.14%。

此外, 如表 2 所示, 与 Maxwell 对比了 3 组网格数目相当情况下的计算时间和峰值内存, 可以看到 3 组不同实例下的时间加速比分别为 3.7, 3.2 和 4.2, 但是其峰值内存分别只有 Maxwell 的 77%, 82% 和 73%, 充分证明了所提出的区域分解法的高效性。

4 结束语

本文针对微波管中的永磁聚焦系统仿真, 提出了一种先进的基于有限元的区域分解求解技术, 并

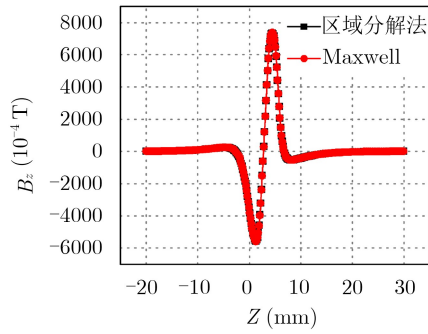


图4 单周期结构轴线磁场 B_z 分布

表1 单周期结构区域分解法与Maxwell软件性能对比

求解方法	子区域数	网格数	计算时间(s)	峰值内存(MB)
Maxwell		2428919	435	10342
区域分解法	8	2718101	291	8129
	12	2718101	135	7111
	16	2718101	132	6461
	20	2718101	38	5532

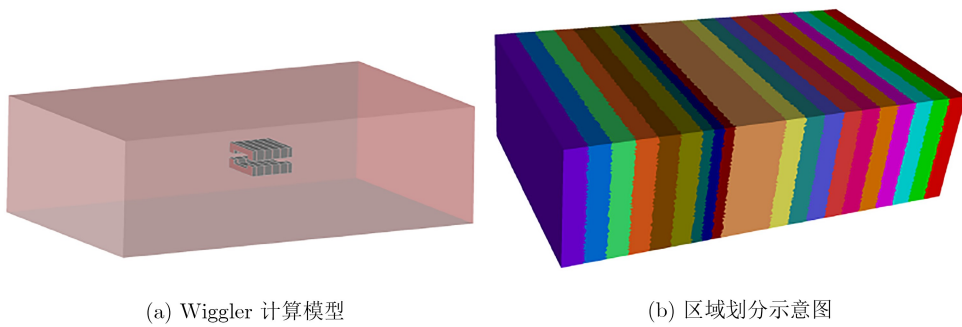


图5 Wiggler计算模型和区域划分示意图

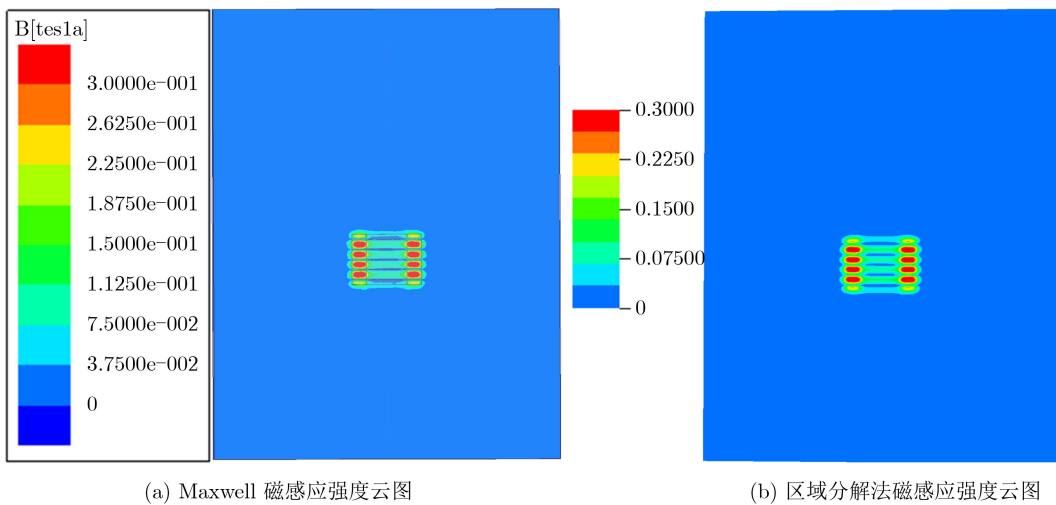


图6 区域分解法与Maxwell轴切面磁感应强度云图分布对比

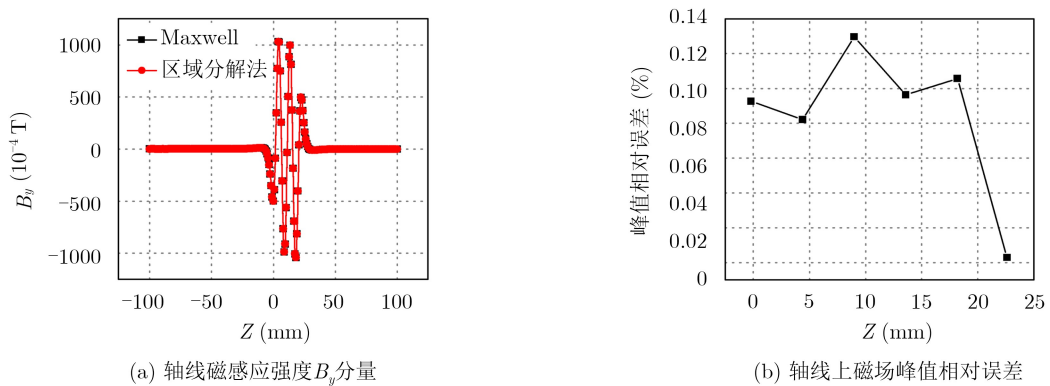


图7 Wiggler结构轴线 B_y 分布和峰值相对误差曲线

表2 Wiggler结构区域分解法与Maxwell性能对比

实例	网格数	求解方法	计算时间(s)	峰值内存(MB)
实例1	5987880	Maxwell	2171	30515
	6476933	区域分解法	589	23407
实例2	7784252	Maxwell	2717	35942
	8200780	区域分解法	858	29387
实例3	9014971	Maxwell	4766	45875
	9158627	区域分解法	1129	33466

对其理论进行了详细的描述, 还给出了实际应用中区域划分的相关原则和技巧。通过对多个永磁结构的建模与仿真计算, 并与商业软件Maxwell进行详细的对比, 验证了本文提出的区域分解方法的准确性和高效性。本文给出的针对永磁聚焦系统仿真的区域分解求解技术后续有望集成到微波管模拟器套装^[8]中, 为管型设计师提供更好的仿真设计平台。

参考文献

- [1] PARKER R K, ABRAMS R H, DANLY B G, *et al.* Vacuum electronics[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 2002, 50(3): 835–845. doi: [10.1109/22.989967](https://doi.org/10.1109/22.989967).
- [2] SRIKRISHNA P, CHANAKYA T, VENKATESWARAN R, *et al.* Thermal analysis of high-average power helix traveling-wave tube[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2018, 65(6): 2218–2226. doi: [10.1109/TED.2017.2786941](https://doi.org/10.1109/TED.2017.2786941).
- [3] LIU Gaofeng, XUE Qianzhong, ZHANG Shan, *et al.* Development and demonstration of a Ka-band gyrotron traveling-wave tube[J]. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2018, 46(6): 1975–1983. doi: [10.1109/TPS.2018.2835843](https://doi.org/10.1109/TPS.2018.2835843).
- [4] CHEN Wenlong, HU Quan, HU Yulu, *et al.* Magnetic focusing simulator: A 3-D finite-element permanent-magnet focusing system design tool[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2015, 62(4): 1319–1326. doi: [10.1109/TED.2015.2400993](https://doi.org/10.1109/TED.2015.2400993).
- [5] YANG Wenying, PENG Fei, DINAHAHI V, *et al.* A generalized parallel transmission line iteration for finite element analysis of permanent magnet axisymmetrical actuator[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2019, 55(3): 7400410. doi: [10.1109/TMAG.2018.2885966](https://doi.org/10.1109/TMAG.2018.2885966).
- [6] FU Dongshan, XU Yanliang, GILLON F, *et al.* Presentation of a novel transverse-flux permanent magnet linear motor and its magnetic field analysis based on Schwarz-Christoffel mapping method[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2018, 54(3): 6000204. doi: [10.1109/TMAG.2017.2756847](https://doi.org/10.1109/TMAG.2017.2756847).
- [7] ANSYS. Maxwell 3D electromagnetic field solver[EB/OL]. <https://www.ansys.com/products/electronics/ansys-maxwell>, 2019.
- [8] LI Bin, YANG Zhonghai, LI Jianqing, *et al.* Theory and design of microwave-tube simulator suite[J]. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 2009, 56(5): 919–927. doi: [10.1109/TED.2009.2015413](https://doi.org/10.1109/TED.2009.2015413).
- [9] LU Jiaqing, CHEN Yongpin, LI Dongwei, *et al.* An embedded domain decomposition method for electromagnetic modeling and design[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2019, 67(1): 309–323. doi: [10.1109/TAP.2018.2874751](https://doi.org/10.1109/TAP.2018.2874751).
- [10] BELGACEM F B. The mortar finite element method with Lagrange multipliers[J]. *Numerische Mathematik*, 1999, 84(2): 173–197. doi: [10.1007/s002110050468](https://doi.org/10.1007/s002110050468).
- [11] KÖPPEL M, MARTIN V, and ROBERTS J E. A stabilized Lagrange multiplier finite-element method for flow in porous media with fractures[J]. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 2019, 10(1): 7. doi: [10.1007/s13137-019-0117-7](https://doi.org/10.1007/s13137-019-0117-7).
- [12] SHAO Yang, PENG Zhen, and LEE J F. Thermal-aware DC IR-drop co-analysis using non-conformal domain decomposition methods[J]. *Proceedings of the Royal Society A*, 2012, 468(2142): 1652–1675. doi: [10.1098/rspa.2011.0708](https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0708).
- [13] RAWAT V. Finite element domain decomposition with second order transmission conditions for time-harmonic electromagnetic problems[D]. [Ph. D. dissertation], The Ohio State University, 2009: 11–19.
- [14] MATSUO T, OHTSUKI Y, and SHIMASAKI M. Efficient linear solvers for mortar finite-element method[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2007, 43(4): 1469–1472. doi: [10.1109/TMAG.2007.891415](https://doi.org/10.1109/TMAG.2007.891415).
- [15] LIONS P L. On the Schwarz alternating method III: A variant for nonoverlapping subdomains[C]. The 3rd International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Philadelphia, USA, 1990: 202–223.
- [16] BLANDFORD G E and TAUCHERT T R. Thermoelastic analysis of layered structures with imperfect layer contact[J]. *Computers & Structures*, 1985, 21(6): 1283–1291. doi: [10.1016/0045-7949\(85\)90182-8](https://doi.org/10.1016/0045-7949(85)90182-8).
- [17] SAVIJA I, CULHAM J R, YOVANOVICH M M, *et al.* Review of thermal conductance models for joints incorporating enhancement materials[J]. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2003, 17(1): 43–52. doi: [10.2514/2.6732](https://doi.org/10.2514/2.6732).
- [18] WEBB J P and FORGAHANI B. Hierarchical scalar and vector tetrahedra[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1993, 29(2): 1495–1498. doi: [10.1109/20.250686](https://doi.org/10.1109/20.250686).
- [19] YIN Junhui, XU Li, WANG Hao, *et al.* Accurate and fast three-dimensional free vibration analysis of large complex structures using the finite element method[J]. *Computers &*

Structures, 2019, 221: 142–156. doi: [10.1016/j.compstruc.2019.06.002](https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2019.06.002).

- [20] KARYPIS G. A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices[EB/OL]. <http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/fetch/sw/metis/manual.pdf>, 2013.

谢 鹏: 男, 1990年生, 博士生, 研究方向为计算电磁学、数值分析以及区域分解算法.

徐 立: 男, 1985年生, 博士, 副教授, 研究方向为真空电子器件和微波器件的建模与仿真技术.

尹俊辉: 男, 1989年生, 博士生, 研究方向为流体力学、计算电磁学、计算结构动力学.

杨中海: 男, 1944年生, 博士, 教授, 研究方向为相对论电子学、真空电子学以及等离子体电子学.

李 斌: 男, 1974年生, 博士, 教授, 研究方向为高功率微波源以及真空电子器件的建模与仿真技术.

责任编辑: 陈 倩