

# 基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法

孙兵 阮怀林\* 吴晨曦 钟华

(国防科技大学电子对抗学院 合肥 230037)

**摘要:** 针对基于互质阵列的欠定DOA估计方法对于虚拟阵元非连续部分利用率不高的问题, 该文提出一种基于Toeplitz协方差矩阵重构的DOA估计方法。首先, 从互质阵列差联合阵的角度分析虚拟阵元分布特性, 结合其与协方差矩阵中各元素得到的波程差存在对应关系, 将协方差矩阵进行扩展得到一个数据缺失的高维协方差矩阵; 然后, 根据矩阵填充理论, 用迹范数代替秩范数进行松弛, 对缺失元素进行填充; 最后, 利用现有root-MUSIC方法进行DOA估计。理论分析和仿真结果表明, 该方法提升了虚拟阵元的利用率, 从而增加了虚拟孔径和可估计信号数, 同时无需对角度域进行离散化处理, 有效消除了模型失配的影响, 并且避免了正则化参数选取问题, 提高了估计精度和分辨率。

**关键词:** 波达方向估计; 互质阵列; 差联合阵列; 矩阵重构

中图分类号: TN911.23

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)08-1924-07

DOI: 10.11999/JEIT181041

## Direction of Arrival Estimation with Coprime Array Based on Toeplitz Covariance Matrix Reconstruction

SUN Bing RUAN Huailin WU Chenxi ZHONG Hua

(College of Electronic Engineering, National University of Defense Technology, Hefei 230037, China)

**Abstract:** In order to improve the utilization of non-contiguous virtual array elements in the underdetermined DOA estimation of the coprime array, a DOA estimation method based on Toeplitz covariance matrix reconstruction is proposed. First, the virtual array element distribution characteristics of the matrix are analyzed from the perspective of the difference coarray. Additionally, according to the correspondence between the difference coarray and the wave path difference, the covariance matrix is extended to a Toeplitz array covariance matrix, of which some elements are zero. Then, the Toeplitz matrix is recovered to the full covariance matrix according to the low rank matrix completion theory. Finally, the root-MUSIC method is employed for the DOA estimation. Theoretical analysis and simulation results show that this method can increase the number of the resolvable signals by increasing the number of virtual array elements, eliminate the effect of the off-grid effect without discretization of the angle domain, and avoid regularization parameter selection. Therefore, the estimation accuracy and resolution are improved.

**Key words:** Direction Of Arrival (DOA); Coprime array; Difference coarray; Matrix reconstruction

### 1 引言

波达方向(Direction Of Arrival, DOA)估计在数字通信、信号处理、目标检测方面都有着广泛的应用, 是阵列信号处理领域的核心研究内容之一。现代电磁环境中, 信源密集且复杂多变, 往往需要

利用有限的阵元对多信源精确测向, 经典的超分辨率算法大多数是针对均匀线阵设计的, 存在着阵列孔径小、测向精度低和分辨率差等缺点, 并且均匀线阵的测向自由度受阵元个数限制, 导致均匀线阵很难对数目多于阵元数量的辐射源角度进行估计, 难以适应现代复杂的战场电磁环境, 欠定DOA估计成为当前的研究热点和难点问题。

互质阵列与相同阵元数目的常规满秩阵列相比, 拥有更大的合成孔径, 更高的阵列自由度, 更大的分辨率等优点, 为欠定条件下DOA估计问题提供了一个新的思路。目前针对欠定条件下的互质阵列DOA估计方法大致可分为两大类: 一是子空

收稿日期: 2018-11-14; 改回日期: 2019-03-14; 网络出版: 2019-04-13

\*通信作者: 阮怀林 13721052122@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61171170), 安徽省自然科学基金(1408085QF115)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61171170), The Anhui Province Natural Science Foundation (1408085QF115)

间类方法<sup>[1,2]</sup>, 这一类方法对虚拟阵元的使用仅限于差联合阵列中的连续部分, 对存在空洞的非连续部分并没有使用, 造成了虚拟孔径和最大可估计信号数的损失。二是基于稀疏重构的方法<sup>[3-9]</sup>, 该方法对噪声的鲁棒性及信源数没有严格的要求, 并且具有较高的分辨率。然而, 不足也很明显, 需要将连续的角度空间划分为一组离散网格, 并假定信源的真实方位恰好位于预定义的有限离散网格下, 这种离散化的方法可能会降低稀疏类方法的性能, 因为信源的真实方位和假定的网格之间经常存在不可避免的基不匹配问题<sup>[10]</sup>。为了消除基不匹配的影响, 文献<sup>[11]</sup>采用了一种结构化矩阵填充的方法, 将问题转化为结构化的Toeplitz矩阵填充问题。然而, 此方法在进行优化求解时要求设置合适的正则化参数, 而实际应用中对其选取存在较大的困难。文献<sup>[12]</sup>研究了在线性移动的非均匀阵列中, 利用信号相干性来增加自由度, 从而填补缺失阵元对应的测量值, 但是其对于阵列运动状态的要求限制了实际应用中的价值。文献<sup>[13]</sup>通过多频率工作的方式得到不同位置的虚拟阵元, 填充虚拟阵元空洞部分, 但多频率工作条件下使得频带展宽进而引入了信号源起伏特性, 产生额外的估计误差。文献<sup>[14]</sup>采用基于稀疏的外推方法对差联合阵的可用部分进行扩展, 从而填补虚拟阵元非连续部分的空洞, 然而该方法存在基不匹配问题, 影响估计性能。

针对上述问题, 本文引入矩阵填充理论<sup>[15-20]</sup>, 研究了一种Toeplitz协方差矩阵重构方法(Covariance Matrix Reconstruction Approach, CMRA)进行DOA估计。该方法可以对差联合阵中非连续部分的虚拟阵元空洞进行填充从而加以利用, 提高了虚拟阵元利用率, 同时无需对连续角度域进行离散化处理, 确保了估计精度和分辨率。

## 2 互质阵列模型

互质阵列如图1所示, 该阵列由两个子阵组成, 子阵1中包含 $N$ 个均匀分布的阵元, 子阵2中包含 $2M-1$ 个均匀分布的阵元, 其中,  $M$ 与 $N$ 是两个互质的整数。子阵1各阵元位置分别为 $\{nMd_0, 0 \leq n \leq N-1\}$ , 子阵2各阵元位置分别为 $\{mNd_0, 1 \leq m \leq 2M-1\}$ ,  $d_0 = \lambda/2$ ,  $\lambda$ 为入射信号波长。

假设有 $K$ 个窄带信号分别入射至图1所示的互

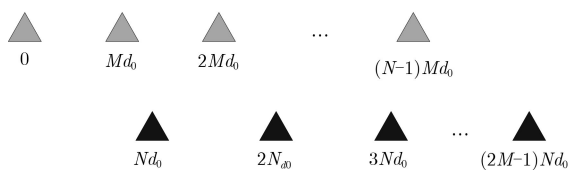


图1 互质阵列示意图

质阵列, 到达角为:  $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$ , 则阵列输出数据可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t), t \in [L] \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2M+N-1}(t)]^T$ 为互质阵列的输出数据,  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$ 为 $K$ 个入射信号数据,  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_{2M+N-1}(t)]^T$ 为噪声,  $L$ 为接收信号的采样点数目,  $[L]$ 表示1到 $L$ 的整数集,  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1), \mathbf{a}(\theta_2), \dots, \mathbf{a}(\theta_K)]$ 为流型矩阵,  $\mathbf{a}(\theta_k) = \left[ 1, e^{-j\frac{2\pi d_0}{\lambda} \sin \theta_k}, \dots, e^{-j\frac{2(2M+N-2)\pi d_0}{\lambda} \sin \theta_k} \right]^T$ 为导向矢量。

假设各入射信号之间相互独立并且是不相关的, 背景噪声是高斯白噪声, 则可以得到输出数据的协方差矩阵:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} &= \mathbf{E} \left\{ \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t)^H \right\} \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_K^2 \end{bmatrix} \mathbf{A}^H + \sigma_n^2 \mathbf{I} \\ &= \mathbf{A} \text{diag}(\boldsymbol{p}) \mathbf{A}^H + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (2)$$

式中,  $\sigma_k^2$ 为第 $k$ 个入射信号的功率,  $\sigma_n^2$ 为背景噪声功率。

## 3 基于Toeplitz协方差矩阵重构的DOA估计方法

为了更加直观地分析虚拟阵元的构成, 这里首先给出差联合阵概念, 定义式(3)所示集合:

$$D = \{d_n - d_{n'}\}, d_n, d_{n'} \in C \quad (3)$$

其中,  $C$ 为互质阵列各个阵元位置构成的集合,  $d_n, d_{n'}$ 为不同阵元的位置,  $D$ 为各阵元位置之差构成的集合。 $D$ 中存在相同的元素, 定义集合中所有不相同位置差构成的集合为 $D_u$ , 集合 $D_u$ 中的位置差 $d_u$ 在集合 $D$ 中出现的次数定义为权重系数 $\omega_d(d_u)$ 。

图1中互质阵列包含有 $N+2M-1$ 个实际阵元, 其形成的差联合阵中各个虚拟阵元位置表示为

$$\begin{aligned} S_d &= \{\pm(Mnd_0 - Nm'd_0)\}, 0 \leq n \leq N-1, \\ &1 \leq m \leq 2M-1 \end{aligned} \quad (4)$$

根据式(4)可知, 差联合阵中各虚拟阵元位置分布如图2所示。

根据图2差联合阵示意图可知, 差联合阵可以分成3个子联合阵, 一个是连续子联合阵, 两个是存在空洞的非连续子联合阵。其中, 连续差联合子阵中 $2MN+2M-1$ 个虚拟阵元以等间距 $d_0$ 分布, 而非连续差联合子阵中存在空洞且呈非均匀分布。现有的大部分方法都舍弃非连续差联合子阵造成最大可估计信号数损失。

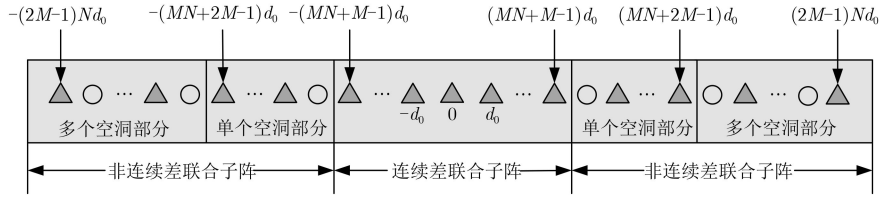


图2 差联合阵示意图

根据式(2)，可以得到图1所示互质阵列的协方差矩阵为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jO} & \dots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jP} \\ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jO} & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 & \dots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{-jQ} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jP} & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 e^{jQ} & \dots & \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \end{bmatrix} + \mathbf{n} \\
 &= \begin{bmatrix} R(0) & R(-M) & \dots & R(-(2M-1)N) \\ R(M) & R(0) & \dots & R(M-(2M-1)N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R((2M-1)N) & R((2M-1)N-M) & \dots & R(0) \end{bmatrix} + \mathbf{n} \quad (5)
 \end{aligned}$$

式中， $O = \pi M \sin \theta_k$ ;  $P = \pi(2M-1)N \sin \theta_k$ ;  $Q = \pi((2M-1)N - M) \sin \theta_k$ ;  $\{R(d_u) | d_u = -(2M-1)N, \dots, (2M-1)N\}$  表示  $3MN + M - N$  个不同的波程差。

根据式(4)可知，该互质阵列得到的差联合阵各个虚拟阵元位置表示为

$$D_u = \{-(2M-1)N, -(2M-2)N, \dots, (2M-1)N\} \quad (6)$$

由式(6)和式(5)可知，差联合阵列表示了该阵列所有阵元位置之差，各阵元位置差与协方差矩阵得到的波程差存在对应关系。

考虑到信噪比和快拍数对输出数据协方差矩阵影响，式(5)中同一波程差对应的各个协方差矩阵元素不完全相等，因此进行平均运算：

$$\hat{R}(d_u) = \frac{1}{\omega_d(d_u)} \sum_{i=1}^{\omega_d(d_u)} R_i(d_u) \quad (7)$$

式中， $R_i(d_u)$  表示同一波程差对应的第  $i$  个协方差矩阵元素。

对于图2所示差联合阵列，若直接利用差联合阵中连续差联合子阵部分的虚拟阵元结合 MUSIC 算法进行估计，只能利用  $2MN + 2M - 1$  个连续的差联合阵列元素，如果能够实现对其非连续部分虚拟阵元间的空洞进行填充，则更多的虚拟阵元可以得到充分利用。例如，填充位于  $-(MN + M)d$

和  $(MN + M)d$  的两个空洞，则可以利用的连续差联合阵元数上升到  $2MN + 4M - 1$  个，增加了  $2M$  个。本文对差联合阵所有空洞进行填充，将协方差矩阵  $\mathbf{R}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$  扩展成一个  $(2MN - N + 1) \times (2MN - N + 1)$  的 Toeplitz 矩阵，从而可以利用的虚拟阵元数为  $4MN - 2N + 1$  个。

对于互质阵列，为了更好地说明，将实际阵元位置定义为集合  $\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_T\} \subset \{0, 1, \dots, (2M-1)N\}$ 。在此定义  $|\Omega| = T$ ，表示阵元个数。互质阵列各实际阵元之间的间距构成集合  $\{0, d_0, Md_0, Nd_0, \dots, (N-1)Md_0, (2M-1)Nd_0\}$ ，假定  $\Omega_1 = 0$ ， $\Omega_T = (2M-1)N$ ，和均匀阵列相似，第  $k$  个信号对应的导向矢量表示为  $\mathbf{a}_\Omega(\theta_k) = [1, e^{j2\pi f_0 \tau_k, \Omega_1}, \dots, e^{j2\pi f_0 \tau_k, \Omega_T}]^T$ ，定义  $\mathbf{\Gamma}_\Omega \in \{0, 1\}^{T \times (2MN - N + 1)}$  为选择矩阵， $\mathbf{\Gamma}_\Omega$  的第  $i$  行只有  $\Omega_i$  对应的位置为 1，其他位置全为 0。例如，设互质阵列  $M=2, N=3$ ，则  $\Omega = \{0, 2, 3, 4, 6, 9\}$ ，可以得到

$$\mathbf{\Gamma}_\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

因此，第  $k$  个信号对应的导向矢量可以表示为  $\mathbf{a}_\Omega(\theta_k) = \mathbf{\Gamma}_\Omega \mathbf{a}(\theta_k)$ ，在  $t$  时刻互质阵列的输出数据表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_\Omega(t) &= \mathbf{A}_\Omega \mathbf{S}(t) + \mathbf{N}_\Omega(t) \\ &= \mathbf{\Gamma}_\Omega \mathbf{A} \mathbf{S}(t) + \mathbf{\Gamma}_\Omega \mathbf{N}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{A}_\Omega = [\mathbf{a}_\Omega(\theta_1), \dots, \mathbf{a}_\Omega(\theta_K)]$ 。因此, 协方差矩阵可以表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\Omega &= \mathbf{\Gamma}_\Omega \mathbf{T}(\mathbf{u}) \mathbf{\Gamma}_\Omega^T + \mathbf{\Gamma}_\Omega \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{\Gamma}_\Omega^T \\ &\triangleq \mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) + \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_\Omega) \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{p}) \mathbf{A}^H$ ,  $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) \triangleq \mathbf{\Gamma}_\Omega \mathbf{T}(\mathbf{u}) \mathbf{\Gamma}_\Omega^T$ ,  $\text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_\Omega) \triangleq \mathbf{\Gamma}_\Omega \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{\Gamma}_\Omega^T$ 。

假设实际采样快拍数为 $L$ ,  $\mathbf{R}_\Omega$ 可以由协方差矩阵估计值等效, 即

$$\hat{\mathbf{R}}_\Omega = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}_\Omega(t_l) \mathbf{X}_\Omega^H(t_l) \quad (11)$$

可以得到误差矩阵为

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{R}}_\Omega - \mathbf{R}_\Omega = \hat{\mathbf{R}}_\Omega - \mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) - \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}_\Omega) \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{E}$ 由信号和信号, 信号和噪声的交叉相关项组成, 由于快拍数有限,  $\mathbf{E}$ 不为零。如果能获得 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})$ 值, 信源方向可以利用传统的估计方法很好地估计出来。因此, 先用低秩恢复来估计 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})$ , 紧接着利用root-MUSIC算法从恢复的协方差矩阵中估计DOA。

首先利用低秩矩阵恢复理论(LRMR), 协方差矩阵可以通过式(13)优化问题来进行恢复:

$$\min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_\Omega > \mathbf{0}} \text{rank}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})], \text{ s.t. } \|\mathbf{E}\|_2^2 \leq \beta, \mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0} \quad (13)$$

其中,  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega \succ \mathbf{0}$ 表示 $\boldsymbol{\sigma}_\Omega$ 中每一项元素都是非负的,  $\beta$ 是设定的阈值, 但是 $\beta$ 的选取困难, 如果直接使用 $\|\mathbf{E}\|_2^2$ 的期望值作为 $\beta$ 的值可能会出现 $\|\mathbf{E}\|_2^2 \geq \beta$ 。在接下来的分析中, 给出一个可以约束的条件, 使得真解以高概率落在可行区域内。

根据文献[21],  $\mathbf{E}$ 的矢量形式满足渐近正态分布:

$$\text{vec}(\mathbf{E}) \sim \text{AsN}(0, \mathbf{W}) \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{W} = \frac{1}{L} \mathbf{R}_\Omega^T \otimes \mathbf{R}_\Omega$ ,  $\mathbf{W}$ 可以通过 $\hat{\mathbf{W}} = \frac{1}{L} \hat{\mathbf{R}}_\Omega^T \otimes \hat{\mathbf{R}}_\Omega$ 近似估计。由式(14)可以推导出

$$\hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathbf{E}) \sim \text{AsN}(0, \mathbf{I}_{N^2}) \quad (15)$$

可得

$$\left\| \hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathbf{E}) \right\|_2^2 \sim \text{As}\chi^2(N^2) \quad (16)$$

式中,  $\text{As}\chi^2(N^2)$ 表示卡方分布, 自由度为 $N^2$ 。这里引入参数 $\eta$ , 定义置信区间 $[0, \eta]$ , 真解落入此区间的概率为 $1 - p$ , 使 $1 - p$ 尽可能地大。

$$\left\| \hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathbf{E}) \right\|_2^2 \leq \eta \quad (17)$$

用式(17)代替式(13)中的约束条件, 转而求解式(18)来对协方差矩阵进行恢复:

$$\left. \begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_\Omega > \mathbf{0}} \text{rank}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})] \\ &\text{s.t. } \left\| \hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathbf{E}) \right\|_2^2 \leq \eta, \mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

然而式(18)依然是NP-hard问题。为了避免非凸性, 利用凸松弛将伪秩范数放宽到核范数或等价于半正定矩阵的迹范数, 即利用 $\text{tr}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})]$ 代替 $\text{rank}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})]$ 。 $\text{tr}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})]$ 表示矩阵 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})$ 的迹。则式(18)的凸松弛形式为

$$\left. \begin{aligned} &\min_{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_\Omega > \mathbf{0}} \text{tr}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})] \\ &\text{s.t. } \left\| \hat{\mathbf{W}}^{-\frac{1}{2}} \text{vec}(\mathbf{E}) \right\|_2^2 \leq \eta, \mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}) \geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

这个约束最小化问题可以通过优化工具箱解决, 例如CVX或SeDuMi。通过获得最优解 $\mathbf{u}^*$ , 继而获得 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})$ 的估计值 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}^*)$ , 至于信源数量, 由于 $\text{rank}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u})] = K$ , 因此 $\hat{K}$ 可以由 $\hat{K} = \text{rank}[\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}^*)]$ 计算获得, 实际应用中,  $\hat{K}$ 可以通过 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}^*)$ 的特征值数目确定。在获得 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}^*)$ 和 $\hat{K}$ 值后, 采用root-MUSIC算法进行DOA估计。由于 $\mathbf{T}_\Omega(\mathbf{u}^*)$ 具有Toeplitz结构, 对半正定Toeplitz矩阵使用范德蒙分解引理, 可以有效地进行DOA估计。

在计算复杂度方面, 本文方法的计算复杂度近似为 $O(L(2MN - N + 1)^2 + (2MN - N + 1)^3 + (2M + N - 1)^3)$ 。子空间类MUSIC方法复杂度近似为 $O(L(MN + M)^2 + (MN + M)^3)$ , 对于CO-Lasso方法, 其计算复杂度近似为 $O((KJ)^3 + \max((2M + N - 1)^2 K, (2M + N - 1) K^2))$ ,  $J$ 为空间网格划分个数。通常情况下 $L > J \gg 2M + N - 1 > K$ , 由此可知, MUSIC方法具有最低的计算复杂度, 而本文方法的计算复杂度小于CO-Lasso方法。

#### 4 仿真实验

本节对MUSIC方法、CO-Lasso方法以及本文方法进行仿真实验, 进而验证本文方法的有效性, 设置MUSIC方法的角度搜索间隔为 $0.1^\circ$ , CO-Lasso方法的完备字典间隔设置为 $0.1^\circ$ 。选用 $M = 3$ ,  $N = 4$ 的互质阵列作为接收阵列。

(1)可行性分析: 设有12个信号功率相等的远场窄带信号, 信号到达角为 $-82.12^\circ, -65.00^\circ, -50.34^\circ, -40.33^\circ, -30.02^\circ, -10.25^\circ, 10.65^\circ, 30.46^\circ, 40.00^\circ, 50.12^\circ, 61.24^\circ, 71.00^\circ$ , 信噪比SNR=10 dB, 快拍数 $L=2048$ 。3种方法的实验结果如图3所示。

由图3可以得到结论：MUSIC方法由于阵元数小于信号数目，对部分信号的DOA估计存在较大误差，本文方法通过对空洞部分进行填充，可以获得较CO-Lasso方法更高的自由度，因此本文方法使用9个阵元对12个信号进行了较准确的DOA估计，而CO-Lasso方法无法准确估计所有信号。

(2)分辨率比较：设有2个信号功率相等的远场窄带信号，信号到达角为 $30.25^\circ, 32.76^\circ$ ，信噪比 $SNR=5\text{ dB}$ ，快拍数 $L=500$ 。图4为3种方法的具体实验结果。

由图4可以得出结论：当两个信号的入射角度相近时，MUSIC方法和CO-Lasso方法无法对两个信号进行分辨，而本文方法分辨率性能较好。因此，

在相同仿真条件下，本文方法在分辨率性能上要优于其他2种对比方法。这是因为，一方面本文方法通过对空洞部分进行填充，获得更多的虚拟阵元，具有更大的阵元孔径，分辨力得到提高。另一方面，本文方法较CO-Lasso方法无需对角度域进行离散化处理，有效避免了基不匹配问题带来的影响。

(3)估计精度比较：设有2个信号功率相等的远场窄带信号，信号到达角为 $29.59^\circ, 60.35^\circ$ 。图5为快拍数 $L=1024$ 条件下，对3种方法分别进行300次蒙特卡洛实验，信噪比变化对角度均方根误差的影响；图6为信噪比 $SNR=5\text{ dB}$ 条件下，对3种方法分别进行300次蒙特卡洛实验，快拍数变化对角度均方根误差的影响。

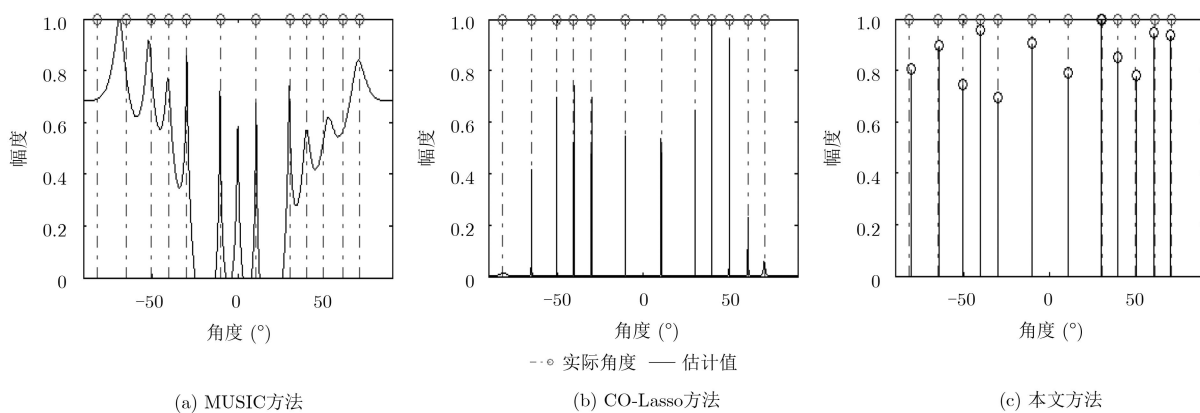


图3 可估计信号数目比较

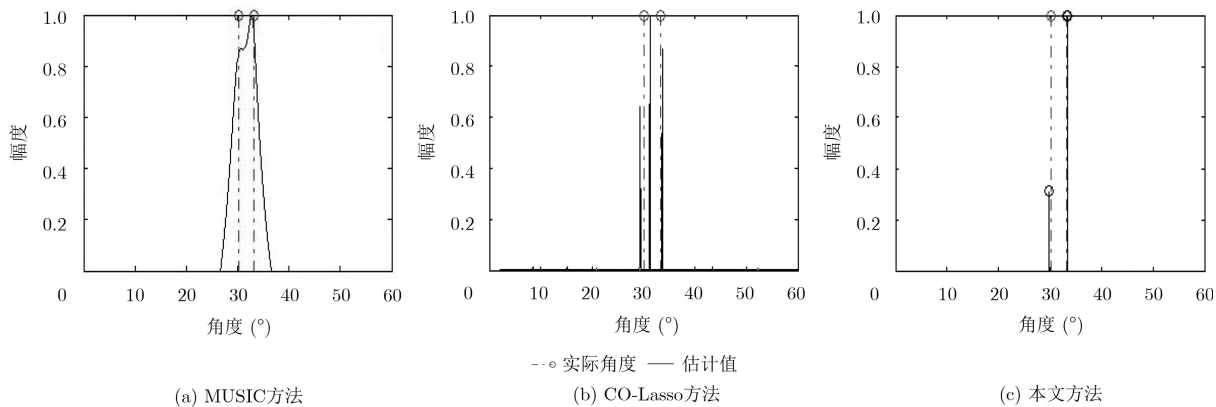


图4 分辨率比较

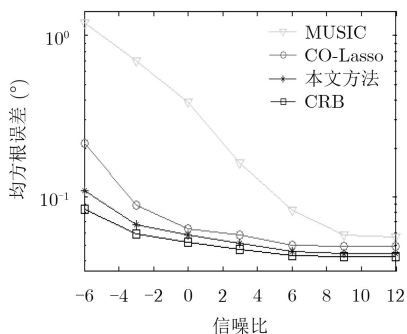


图5 信噪比对角度均方根误差影响

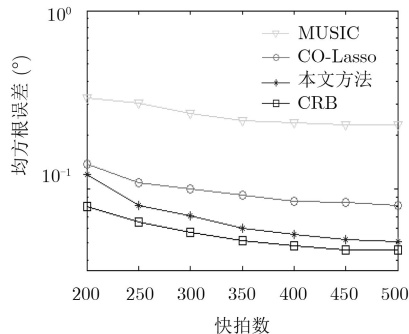


图6 快拍数对角度均方根误差影响

由图5, 图6可以得到结论: 当3种方法信噪比和快拍数相同时, 与MUSIC方法和CO-Lasso方法相比, 本文方法可以得到更高的估计精度。尤其当信噪比较低时, 本文方法效果更加明显。本文方法对非连续差联合子阵中的虚拟阵元空洞进行填充并加以利用, 获得了更多虚拟阵元, 具有更高的阵列自由度, 而CO-Lasso方法存在基不匹配的影响, 因此, 本文方法可以获得更高的估计精度。

(4)运算时间比较: 实验仿真环境为MATLAB 8.4平台, Intel Xeon E3处理器, 16 GB内存。其他实验条件同可行性分析实验。分析比较不同信号数条件下3种估计方法的运算时间, 图7为具体实验结果。

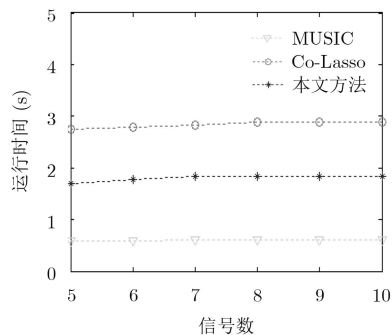


图7 运算时间随信号数变化

由图7可以得出结论: 在相同仿真实验条件下, 本文方法所需的运算时间明显少于CO-Lasso方法, 但是较MUSIC方法运算时间较长, 结合该算法具有更大的可估计信号数以及较好的估计精度和分辨率, 这种运算时间上的性能损失是可以接受的。

## 5 结论

考虑现有基于互质阵列的波达方向估计方法中, 对虚拟阵元利用率不高, 从而造成虚拟孔径和最大可估计信号数损失。针对上述问题, 本文提出了一种基于Toeplitz协方差矩阵重构的互质阵列DOA估计方法。该方法将阵列协方差矩阵进行扩展得到一个数据缺失的高维阵, 根据其Toeplitz性质构造一个低秩矩阵重构问题, 然后用迹范数代替秩范数进行松弛, 最后用CVX求解。本文算法有效解决了互质阵列DOA估计方法中由于差联合阵非连续性导致的虚拟阵元利用率不高问题, 并且该方法避免了传统稀疏算法对角度域离散化处理产生的基不匹配问题, 同时该方法无需进行正则化参数选择, 避免了正则化参数选取难问题。

## 参考文献

- [1] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with

co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: [10.1109/TSP.2010.2089682](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2089682).

- [2] LIU Chunlin and VAIDYANATHAN P P. Remarks on the spatial smoothing step in coarray MUSIC[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(9): 1438–1442. doi: [10.1109/LSP.2015.2409153](https://doi.org/10.1109/LSP.2015.2409153).

- [3] LIU Jing, ZHOU Weidong, HUANG Defeng, et al. Covariance matrix based fast smoothed sparse DOA estimation with partly calibrated array[J]. *AEU International Journal of Electronics and Communications*, 2018, 84: 8–12. doi: [10.1016/j.aeue.2017.10.026](https://doi.org/10.1016/j.aeue.2017.10.026).

- [4] ALQADAH H F and SCHOLNIK D P. Stable DOA estimation with sparse sensor arrays[C]. 2017 IEEE Radar Conference, Washington, USA, 2017: 803–808. doi: [10.1109/RADAR.2017.7944313](https://doi.org/10.1109/RADAR.2017.7944313).

- [5] 赵季红, 马兆恬, 曲桦, 等. 冲击噪声下基于矩阵预处理的稀疏重构DoA估计[J]. *电子与信息学报*, 2018, 40(3): 670–675. doi: [10.11999/JEIT170371](https://doi.org/10.11999/JEIT170371).

ZHAO Jihong, MA Zhaotian, QU Hua, et al. DoA estimation based on matrix preconditioning through sparse reconstruction in impulsive noise[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(3): 670–675. doi: [10.11999/JEIT170371](https://doi.org/10.11999/JEIT170371).

- [6] 蔡晶晶, 宗汝, 蔡辉. 基于空域平滑稀疏重构的DOA估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(1): 168–173. doi: [10.11999/JEIT150538](https://doi.org/10.11999/JEIT150538).

CAI Jingjing, ZONG Ru, and CAI Hui. DOA estimation via sparse representation of the smoothed array covariance matrix[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(1): 168–173. doi: [10.11999/JEIT150538](https://doi.org/10.11999/JEIT150538).

- [7] LV Wanghan, WANG Huali, LIU Feng, et al. Wideband DOA estimation based on co-prime arrays with sub-Nyquist sampling[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(9): 1717–1720. doi: [10.1587/transfun.E99.A.1717](https://doi.org/10.1587/transfun.E99.A.1717).

- [8] SHEN Qing, CUI Wei, LIU Wei, et al. Underdetermined wideband DOA estimation of off-grid sources employing the difference co-array concept[J]. *Signal Processing*, 2017, 130: 299–304. doi: [10.1016/j.sigpro.2016.07.022](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2016.07.022).

- [9] CAI Jingjing, LIU Wei, ZONG Ru, et al. Sparse array extension for non-circular signals with subspace and compressive sensing based DOA estimation methods[J]. *Signal Processing*, 2018, 145: 59–67. doi: [10.1016/j.sigpro.2017.11.012](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2017.11.012).

- [10] CHI Yuejie, SCHARF L L, PEZESHKI A, et al. Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2182–2195. doi: [10.1109/TSP.2011.2112650](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2112650).

- [11] LI Yuanxin and CHI Yuejie. Compressive parameter

- estimation with multiple measurement vectors via structured low-rank covariance estimation[C]. 2014 IEEE Workshop on Statistical Signal Processing, Gold Coast, Australia, 2014: 384–387. doi: [10.1109/SSP.2014.6884656](https://doi.org/10.1109/SSP.2014.6884656).
- [12] RAMIREZ J and KROLIK J. Multiple source localization with moving co-prime arrays[C]. 2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Brisbane, Australia, 2015: 2374–2378. doi: [10.1109/ICASSP.2015.7178396](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2015.7178396).
- [13] BOUDAHER E, JIA Yong, AHMAD F, *et al.* Multi-frequency co-prime arrays for high-resolution direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(14): 3797–3808. doi: [10.1109/TSP.2015.2432734](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2432734).
- [14] BOUDAHER E, AHMAD F, and AMIN M G. Sparsity-based extrapolation for direction-of-arrival estimation using co-prime arrays[C]. Proceedings of SPIE 9857, Compressive Sensing V: from Diverse Modalities to Big Data Analytics, Baltimore, USA, 2016: 98570M. doi: [10.1117/12.2225454](https://doi.org/10.1117/12.2225454).
- [15] 王洪雁, 房云飞, 裴炳南. 基于矩阵补全的二阶统计量重构 DOA 估计方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(6): 1383–1389. doi: [10.11999/JEIT170826](https://doi.org/10.11999/JEIT170826).  
WANG Hongyan, FANG Yunfei, and PEI Bingnan. Matrix completion based second order statistic reconstruction DOA estimation method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2018, 40(6): 1383–1389. doi: [10.11999/JEIT170826](https://doi.org/10.11999/JEIT170826).
- [16] CHEN Caihua, HE Bingsheng, and YUAN Xiaoming. Matrix completion via an alternating direction method[J]. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2012, 32(1): 227–245. doi: [10.1093/imanum/drq039](https://doi.org/10.1093/imanum/drq039).
- [17] MA Shiqian, GOLDFARB D, and CHEN Lifeng. Fixed point and Bregman iterative methods for matrix rank minimization[J]. *Mathematical Programming*, 2011, 128(1/2): 321–353. doi: [10.1007/s10107-009-0306-5](https://doi.org/10.1007/s10107-009-0306-5).
- [18] LI Bo and PETROPULU A. Spectrum sharing between matrix completion based MIMO radars and a MIMO communication system[C]. 2015 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Brisbane, Australia, 2015: 2444–2448. doi: [10.1109/ICASSP.2015.7178410](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2015.7178410).
- [19] HU Yao, ZHANG Debing, YE Jieping, *et al.* Fast and accurate matrix completion via truncated nuclear norm regularization[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2013, 35(9): 2117–2130. doi: [10.1109/TPAMI.2012.271](https://doi.org/10.1109/TPAMI.2012.271).
- [20] WU Xiaohuan, ZHU Weiping, and YAN Jun. A Toeplitz covariance matrix reconstruction approach for direction-of-arrival estimation[J]. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2017, 66(9): 8223–8237. doi: [10.1109/TVT.2017.2695226](https://doi.org/10.1109/TVT.2017.2695226).
- [21] LIU Zhangmeng, HUANG Zhitao, and ZHOU Yiyu. Sparsity-inducing direction finding for narrowband and wideband signals based on array covariance vectors[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2013, 12(8): 1–12. doi: [10.1109/TWC.2013.071113.121305](https://doi.org/10.1109/TWC.2013.071113.121305).
- 孙 兵: 男, 1991年生, 博士生, 研究方向为空间信息处理、雷达及雷达对抗理论与技术。
- 阮怀林: 男, 1964年生, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为空间信息处理、雷达及雷达对抗理论与技术、压缩感知理论。
- 吴晨曦: 男, 1988年生, 讲师, 博士生, 研究方向为阵列信号处理、稀疏重构技术。
- 钟 华: 男, 1991年生, 博士生, 研究方向为阵列信号处理。