

## 基于极化敏感阵列均匀线阵的二维DOA估计

刘鲁涛\* 王传宇

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院 哈尔滨 150001)

**摘要:** 针对残缺电磁矢量传感器的极化敏感阵列多参数联合估计问题, 该文提出一种基于正交偶极子的均匀线阵的2维波达方向(Direction-Of-Arrival, DOA)估计算法。首先, 对极化敏感阵列的接收数据矢量的协方差矩阵进行特征分解, 然后将信号子空间划分成4个子阵, 根据旋转不变子空间(ESPRIT)算法分别求出其中1个子阵与其它3个子阵的相位差, 再对不同子阵间的相位差进行配对, 最后根据相位差求出信号的DOA估计和极化参数。由正交偶极子组成的均匀线阵使用极化MUSIC算法和传统ESPRIT算法无法进行2维DOA估计, 该文提出的算法解决了这个问题, 并且相较于极化MUSIC算法降低了算法的复杂度。仿真结果验证了该文算法的有效性。

**关键词:** 信号处理; DOA估计; 极化敏感阵列; 正交偶极子; 均匀线阵

中图分类号: TN971

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)10-2350-08

DOI: 10.11999/JEIT180832

## Two Dimensional DOA Estimation Based on Polarization Sensitive Array and Uniform Linear Array

LIU Lutao WANG Chuanyu

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

**Abstract:** To solve the problem that polarization sensitive array of defective electromagnetic vector sensor estimate multi parameter, a two-dimensional DOA estimation algorithm based on orthogonal dipole is proposed in this paper. First, eigendecomposition of the covariance matrix is produced by the received data vectors of the polarization sensitive array. Then the signal subspace is divided into four subarrays, and the phase difference between one of the subarray and the others is obtained according to the ESPRIT algorithm. Then the phase difference between different subarrays is paired. Finally, the DOA estimation and polarization parameters of the signal are calculated according to the phase difference. The uniform linear array composed by orthogonal dipoles can not be two-dimensional DOA estimated by using the MUSIC algorithm and the traditional ESPRIT algorithm. The algorithm proposed in this paper solves this problem, and compared with the polarization MUSIC algorithm greatly reduces the complexity of the algorithm. The simulation results verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Signal processing; Direction Of Arrival (DOA) estimation; Polarization sensitive array; Orthogonal dipole; Uniform linear array

### 1 引言

阵列信号处理是现代信号处理的一个重要分支, 主要研究空间传播波携带信号处理的基本理论和方法。极化敏感矢量阵列<sup>[1]</sup>信号处理是阵列信号

处理的一个前沿领域和最新发展, 在通信、雷达、声呐和生物医学等众多领域有着广阔的应用前景。

极化敏感阵列天线被称为电磁矢量传感器, 矢量传感器由中心位置重合的3个电偶极子和3个电流环组成, 分别测量入射电磁场的3个电场矢量和3个磁场矢量, 这种可以获取入射电磁波全部信息的传感器被称为全电磁矢量传感器<sup>[2]</sup>, 全电磁矢量传感器主要应用于通信领域, 例如美国Flame and Russell, Inc公司生产的SuperCART天线。但是这种天线阵元互耦效应明显且制作成本高。若去除全电磁矢量传感器中的某些电磁感应单元, 则可以得

收稿日期: 2018-08-24; 改回日期: 2019-02-12; 网络出版: 2019-03-13

\*通信作者: 刘鲁涛 huangxiangsong@hrbeu.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61571146), 中央高校基本科研业务费专项资金(HEUCFP201769)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61571146), The Fundamental Research Funds for the Central Universities (HEUCFP201769)

到不能感应磁场信息的低维矢量天线, 即残缺矢量传感器, 目前宽带信号处理领域主要使用残缺电磁矢量传感器。与全电磁矢量传感器相比, 低维残缺矢量传感器使用了更少通道数, 阵元互耦效应低, 在降低数据量和运算量的同时兼顾了极化信息。

在文献[3-6]中, 将MUSIC算法移植到极化敏感阵列, 对数据进行4维联合DOA估计即可求出信号的空域参数和极化参数。但由于该算法需要进行4维搜索, 所以需要进行大量计算, 计算复杂度非常高; 文献[7]提出了一种基于极化MUSIC的快速DOA估计方法。该算法使用正交偶极子天线进行估计, 避免了极化MUSIC算法的高复杂度, 并且具有较高的估计精度和分辨力, 但是该算法无法对均匀线阵进行DOA估计。文献[8,9]在极化MUSIC基础上研究了基于多项式求根技术的极化敏感矢量阵列信号参数估计闭式方法, 该算法适用于均匀线阵, 但是当天线为残缺电磁矢量传感器时无法进行2维的DOA估计。文献[10-12]提出了基于极化敏感阵列的旋转不变子空间算法(ESPRIT), 实现了多个信号DOA和极化参数的闭式估计。虽然ESPRIT算法计算复杂度低, 但是在传统ESPRIT算法中, 残缺电磁矢量传感器同样只能进行1维的DOA估计。

在以上算法的基础上, 一系列改进算法相继出现。在2016年, 文献[13]提出了一种基于偏振敏感均匀阵列的改进的极化和DOA估计算法, 该方法将多维全空间的搜索区域缩小到更小的尺寸, 并且有效地降低了计算复杂度。在2016年, 文献[14]提出了具有稀疏并置环和偶极子交叉阵列的到达方向(DOA)和极化参数估计算法。在2017年, 文献[15]将交叉偶极子的线性阵列扩展到了2维矩形阵列, 解决了交叉偶极子只能估计1个DOA值和两个极化参数的问题。在2017年, 文献[16]提出了一种基于L型阵列的快速DOA估计方法, 该算法允许阵元间距大于半波长, 有效提高了阵列孔径。根据上述文献可以看出, 极化敏感阵列的研究热点主要集中在降低算法的复杂度和解决2维阵列DOA估计的问题, 目前缺少对于极化敏感阵列1维线阵解决2维DOA估计问题的研究。在现代电子战中, 布阵空间是影响被动雷达阵列的一个重要因素, 使用面阵或圆阵这种2维阵列做信号的2维DOA估计时, 需要大量的布阵空间; 当阵列改为线阵时可以有效节省布阵空间。

为了解决天线布阵空间有限的问题, 本文提出了基于残缺电磁矢量传感器组成的均匀线阵的2维DOA估计, 提出了一种新型阵列和针对该阵列的算法, 通过使用线阵有效节省了布阵空间。算法首

先对阵列接收的数据在空域和极化域进行子阵划分, 然后通过不同子阵间极化域的相位差对信号进行有模糊的DOA估计, 最后通过不同子阵间空域的相位差对信号的DOA估计进行解模糊, 阵列使用位正交偶极子, 降低了天线通道数, 避免了极化MUSIC计算的复杂度, 同时解决了残缺电磁矢量传感器基于均匀线阵的2维DOA估计问题。

## 2 阵列结构与信号模型

天线使用正交偶极子天线, 这种天线有两个输出通道, 两个通道相互垂直, 可以输出两个垂直方向的信息, 能够接受电磁波的电场信息。如图1所示, 阵列使用上述正交偶极子,  $2N$ 个阵元均匀摆放, 阵元间距为信号的半波长。第1, 3,  $\dots$ ,  $2N-1$ 为X-Z方向的天线, 天线可以接收X和Z方向的信息。第2, 4,  $\dots$ ,  $2N$ 为Y-Z方向的天线, 可以接收Y和Z方向的信息。其中, 第1, 3,  $\dots$ ,  $2N-1$ 个阵元的X方向的天线为子阵1, 第1, 3,  $\dots$ ,  $2N-1$ 个阵元的Z方向的天线为子阵2, 第2, 4,  $\dots$ ,  $2N$ 个阵元的Y方向的天线为子阵3, 第2, 4,  $\dots$ ,  $2N$ 个阵元的Z方向的天线为子阵4。

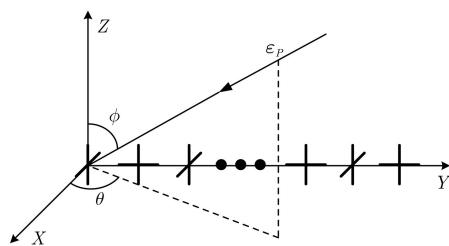


图1 天线的位置

假设有 $M$ 个远场信号, 投射到 $2N$ 个极化敏感阵元组成的阵列上, 角 $\theta$ 和 $\phi$ 分别为信号入射的方位角和俯仰角。向量 $\epsilon_p$ 为信号的入射方向。信号的电场接收数据矢量为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N(t)]^T \\ &= \sum_{i=1}^M \mathbf{a}_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)} \mathbf{s}_m(t) + \mathbf{n}(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t) \quad s_2(t) \quad \cdots \quad s_M(t)]^T$ 为 $M$ 个输出信号矢量, 各信号之间相互独立;  $\mathbf{n}(t)$ 为噪声矢量, 噪声为加性零均值高斯白噪声且噪声之间相互独立; 入射信号与噪声之间也相互独立;  $\mathbf{A}$ 为空间阵列的流型矩阵且 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{(\theta_1, \phi_1, \gamma_1, \eta_1)} \quad \mathbf{a}_{(\theta_2, \phi_2, \gamma_2, \eta_2)} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{(\theta_M, \phi_M, \gamma_M, \eta_M)}]$ , 其 $m$ 列矢量 $\mathbf{a}_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)}$ 称为信号的导向矢量

$$\mathbf{a}_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{m,1} & & & \\ & u_{m,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{m,2N} \end{bmatrix}}_{2N \times 2N} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{l}^1)^T \\ (\mathbf{l}^2)^T \\ \vdots \\ (\mathbf{l}^{2N})^T \end{bmatrix}}_{2N \times 6} \cdot \underbrace{\Psi_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)}}_{6 \times 1} \quad (2)$$

其中： $\mathbf{K}_{(\theta_m, \phi_m)}$ 为阵元空间相位矩阵，它描述了输出信号的空域相干结构。 $\mathbf{K}_{(\theta_m, \phi_m)}$ 的第 $n$ 个对角线元素 $u_{m,n} = \exp(-j2\pi d_n \sin \theta_m \sin \phi_m / \lambda)$ 为第 $m$ 个信号位于第 $n$ 个阵元的空间相位因子，其中， $d_n$ 表示第 $n$ 个阵元与参考阵元之间的距离； $2N \times 6$ 维的矩阵 $\mathbf{V}$ 称为极化敏感矩阵，其中，矩阵 $\mathbf{V}$ 的第 $n$ 行矢量称为第 $n$ 个阵元的极化敏感矢量 $\mathbf{l}^n = \begin{bmatrix} g_{X,n}^{(e)} & g_{Y,n}^{(e)} \\ g_{Z,n}^{(e)} & g_{X,n}^{(h)} & g_{Y,n}^{(h)} & g_{Z,n}^{(h)} \end{bmatrix}^T$ ，其中， $\{g_{k,n}^{(e)}\}_{k=X,Y,Z}$ 分别表示第 $n$ 个阵元对 $X, Y, Z$ 方向单位电场的增益， $\{g_{k,n}^{(h)}\}_{k=X,Y,Z}$ 分别表示第 $n$ 个阵元对 $X, Y, Z$ 方向单位磁场的增益，本文默认为1。

$$\underbrace{\Psi_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)}}_{6 \times 1} = \mathbf{J}_{(\theta_m, \phi_m)} \mathbf{h}_{(\gamma_m, \eta_m)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta_m & \cos \phi_m \cos \theta_m \\ \cos \theta_m & \cos \phi_m \sin \theta_m \\ 0 & -\sin \varphi_m \\ \cos \phi_m \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ \cos \phi_m \sin \theta_m & -\cos \theta_m \\ -\sin \varphi_m & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{(\theta_m, \phi_m)}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma_m \\ \sin \gamma_m \exp\{j\eta_m\} \end{bmatrix} = [\psi(1) \ \psi(2) \ \cdots \ \psi(6)]^T \quad (3)$$

式(3)为极化-角度域导向矢量，它描述了信号的极化-角度域相干结构，并与矢量阵元的空间位置无关； $\mathbf{h}_{(\gamma_m, \eta_m)}$ 称为极化矢量， $\gamma$ 称为极化幅角， $\eta$ 称为极化相位角，与阵列响应特性与空间结构无关，式(3)为全电磁矢量传感器的信号模型。如果使用残缺电磁矢量传感器，将无法获得信号的磁场信息，信号模型将变为

$$\underbrace{\Psi_{(\theta_m, \phi_m, \gamma_m, \eta_m)}}_{3 \times 1} = \mathbf{J}_{(\theta_m, \phi_m)} \mathbf{h}_{(\gamma_m, \eta_m)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\sin \theta_m & \cos \phi_m \cos \theta_m \\ \cos \theta_m & \cos \phi_m \sin \theta_m \\ 0 & -\sin \varphi_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_{(\theta_m, \phi_m)}} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma_m \\ \sin \gamma_m \exp\{j\eta_m\} \end{bmatrix} = [\psi(1) \ \psi(2) \ \psi(3)]^T \quad (4)$$

### 3 算法介绍

#### 3.1 算法原理

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n} = [\mathbf{A}_1 \ \mathbf{A}_2 \ \mathbf{A}_3 \ \mathbf{A}_4]^T \mathbf{s} + \mathbf{n} \quad (5)$$

式(5)为信号的接收数据矢量， $\mathbf{A}$ 为流型阵， $\mathbf{A}_1$ 为图1中子阵1的流型阵， $\mathbf{A}_2$ 为图1中子阵2的流型阵， $\mathbf{A}_3$ 为图1中子阵3的流型阵， $\mathbf{A}_4$ 为图1中子阵4的流型阵； $\mathbf{s}$ 为信号矢量， $\mathbf{n}$ 为噪声矢量。根据ESPRIT算法原理可知不同子阵间存在一个固定相位差

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(1)}{\psi_1(3)} \ \frac{\psi_2(1)}{\psi_2(3)} \ \cdots \ \frac{\psi_M(1)}{\psi_M(3)} \right] = \mathbf{A}_2 \Phi \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 \cdot \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(2)}{\psi_1(3)} \Delta \mathbf{u} \ \frac{\psi_2(2)}{\psi_2(3)} \Delta \mathbf{u} \ \cdots \ \frac{\psi_M(2)}{\psi_M(3)} \Delta \mathbf{u}_M \right] = \mathbf{A}_2 \mathbf{\Lambda} \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_2 \text{diag} \left[ \Delta \mathbf{u}_1 \ \Delta \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \Delta \mathbf{u}_M \right] = \mathbf{A}_2 \mathbf{\Omega} \quad (8)$$

式(6)–式(8)中 $M$ 为信号个数，对角阵 $\Phi$ 表示子阵1和子阵2之间形成的极化域相位差；对角阵 $\mathbf{\Lambda}$ 表示子阵2和子阵3之间形成的空域和极化域之间的相位差；对角阵 $\mathbf{\Omega}$ 中对角线上的元素为 $\Delta \mathbf{u}_m = \exp(-j2\pi \Delta d \sin \theta_m \sin \phi_m / \lambda)$ ，表示第 $m$ 个信号在子阵2和子阵4之间形成的空间相位差。对式(6)中 $\Phi$ 的对角线元素进行化简为

$$\frac{\psi_m(1)}{\psi_m(3)} = \frac{-\sin \theta_m \cos \gamma_m + \cos \phi_m \cos \theta_m \sin \gamma_m e^{j\eta_m}}{-\sin \phi_m \sin \gamma_m e^{j\eta_m}} = \frac{\sin \theta_m}{\sin \phi_m \tan \gamma_m} e^{-j\eta_m} - \frac{\cos \theta_m}{\tan \phi_m} = \Phi_m \quad (9)$$

对式(7)中矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 的对角线元素进行化简整理如下：

$$\frac{\psi_m(2)}{\psi_m(3)} \Delta \mathbf{u}_m = \frac{\cos \theta_m \cos \gamma_m + \cos \phi_m \sin \theta_m \sin \gamma_m e^{j\eta_m}}{\sin \phi_m \tan \gamma_m e^{j\eta_m}} \Delta \mathbf{u}_m = - \left( \frac{\cos \theta_m}{\sin \phi_m \tan \gamma_m} e^{-j\eta_m} + \frac{\sin \theta_m}{\tan \phi_m} \right) \Delta \mathbf{u}_m = \mathbf{\Lambda}_m \quad (10)$$

将式(9)和式(10)化简为

$$\frac{\sin \theta_m}{\sin \phi_m \tan \gamma_m} e^{-j\eta_m} = \frac{\Phi_m \tan \phi_m + \cos \theta_m}{\tan \phi_m} \quad (11)$$

$$\frac{\cos \theta_m}{\sin \phi_m \tan \gamma_m} e^{-j\eta_m} = -\frac{\Lambda_m \tan \phi_m + \sin \theta_m}{\tan \phi_m} \quad (12)$$

将式(11)和式(12)相除可得

$$\tan \theta_m = -\frac{\Phi_m \tan \phi_m + \cos \theta_m}{\frac{\Lambda_m}{\Delta \mathbf{u}_m} \tan \phi_m + \sin \theta_m} \quad (13)$$

式(13)的等号左边是个实数, 但是等式右边的分子分母都是虚数。根据复数运算可知, 当两个复数相除等于一个实数时, 两个复数的实部之比等于两个虚部之比。由此可知

$$\begin{aligned} & \frac{\text{real}(\Phi_m) \tan \phi_m + \cos \theta_m}{\text{real}\left(\frac{\Lambda_m}{\Delta \mathbf{u}_m}\right) \tan \phi_m + \sin \theta_m} \\ &= \frac{\text{imag}(\Phi_m) \tan \phi_m}{\text{imag}\left(\frac{\Lambda_m}{\Delta \mathbf{u}_m}\right) \tan \phi_m} = \frac{\text{imag}(\Phi_m)}{\text{imag}\left(\frac{\Lambda_m}{\Delta \mathbf{u}_m}\right)} \\ &= -\tan \theta_m \end{aligned} \quad (14)$$

则可求出

$$\theta_m = \arctan \left[ -\frac{\text{imag}(\Phi_m)}{\text{imag}\left(\frac{\Lambda_m}{\Delta \mathbf{u}_m}\right)} \right] \quad (15)$$

由式(15)可知,  $\theta$ 的估计值范围为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , 但是 $\theta$ 的真实值范围为 $(-\pi, \pi)$ , 由此可知 $\theta$ 的取值存在模糊。由 $\Delta \mathbf{u}_m$ 可求出 $\sin \theta_m \sin \phi_m$ , 因为 $\phi$ 取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以根据 $\sin \theta_m \sin \phi_m$ 和 $\tan \theta$ 的正负判断方位角 $\theta$ 所在的象限, 判别方法如表1。

表1 方位角的判别方法

	$\sin \theta \sin \phi > 0$	$\sin \theta \sin \phi < 0$
$\tan \theta > 0$	第1象限	第3象限
$\tan \theta < 0$	第2象限	第4象限

求出方位角 $\theta$ 即可确定俯仰角 $\phi$

$$\phi_m = \arcsin \left( \frac{\text{angle}(\Delta \mathbf{u}_m) \lambda}{2\pi |\Delta d| \sin \theta_m} \right) \quad (16)$$

再根据式(11)可求出信号的极化幅角和极化相位角

$$\gamma_m = \arctan \left( \left| \frac{\sin \theta_m \tan \phi_m}{(\Phi_m \tan \phi_m + \cos \theta_m) \sin \phi_m} \right| \right) \quad (17)$$

$$\eta_m = \text{angle} \left( \frac{\sin \theta_m \tan \phi_m}{(\Phi_m \tan \phi_m + \cos \theta_m) \sin \phi_m} \right) \quad (18)$$

综合上述, 只要求出 $\Phi, \Lambda, \Omega$  3个对角阵, 就可求出信号的到达角和极化参数。

对式(5)中矩阵 $\mathbf{X}$ 的协方差矩阵 $\mathbf{R}$ 特征值分解, 令 $\mathbf{E}_s$ 为 $\mathbf{R}$ 的 $M$ 个主特征矢量组成的矩阵, 由于大特征矢量张成的信号子空间与阵列流型阵张成的信号子空间是相等的。所以存在唯一非奇异矩阵 $\mathbf{T}_c$ 满足

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{A} \mathbf{T}_c \quad (19)$$

定义

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_k &= \mathbf{E}_s((k-1)N+1 : kN, :) \\ &= \mathbf{A}_k \mathbf{T}_c, \quad k=1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{A}_k$ 为第 $k$ 个子阵的导向矢量矩阵,  $\mathbf{E}_k$ 为第 $k$ 个子阵的信号子空间。由此

$$\mathbf{E}_{12} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{A}_2 (\mathbf{I}_{M \times M} + \Phi) \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{T}_c \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_{23} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = \mathbf{A}_2 (\mathbf{I}_{M \times M} + \Lambda) \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Lambda_{23} \mathbf{T}_c \quad (22)$$

$$\mathbf{E}_{24} = \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_4 = \mathbf{A}_2 (\mathbf{I}_{M \times M} + \Omega) \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Omega_{12} \mathbf{T}_c \quad (23)$$

式中,  $\mathbf{I}_{M \times M}$ 为单位矩阵且

$$\Phi_{12} = \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(1)}{\psi_1(3)} + 1 \quad \frac{\psi_2(1)}{\psi_2(3)} + 1 \quad \dots \quad \frac{\psi_M(1)}{\psi_M(3)} + 1 \right] \quad (24)$$

$$\Lambda_{23} = \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(2)}{\psi_1(3)} + 1 \quad \frac{\psi_2(2)}{\psi_2(3)} + 1 \quad \dots \quad \frac{\psi_M(2)}{\psi_M(3)} + 1 \right] \quad (25)$$

$$\Omega_{24} = \text{diag} \left[ \frac{\psi_1(4)}{\psi_1(2)} + 1 \quad \frac{\psi_2(4)}{\psi_2(2)} + 1 \quad \dots \quad \frac{\psi_M(4)}{\psi_M(2)} + 1 \right] \quad (26)$$

定义下述秩为 $M$ 的矩阵 $\mathbf{Q}_{12}$ ,  $\mathbf{Q}_{23}$ 和 $\mathbf{Q}_{24}$ , 其中,  $\mathbf{T}_c$ 为 $M \times M$ 维的满秩矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{A}_2 \Phi_{12} (\mathbf{A}_2^H \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^H = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{A}_2^+ \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{12} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{12} \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{T}_c \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{23} &= \mathbf{A}_2 \Lambda_{23} (\mathbf{A}_2^H \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^H = \mathbf{A}_2 \Lambda_{23} \mathbf{A}_2^+ \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{23} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \Lambda_{23} \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{23} \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Lambda_{23} \mathbf{T}_c \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{24} &= \mathbf{A}_2 \Omega_{24} (\mathbf{A}_2^H \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^H = \mathbf{A}_2 \Omega_{24} \mathbf{A}_2^+ \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{24} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \Omega_{24} \\ &\Rightarrow \mathbf{Q}_{24} \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_c = \mathbf{A}_2 \Omega_{24} \mathbf{T}_c \end{aligned} \quad (29)$$

以矩阵 $\mathbf{Q}_{12}$ 为例进行求解, 根据式(27)进一步有

$$\mathbf{Q}_{12} \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{12} \quad (30)$$



注意到矩阵  $\mathbf{E}_{12}$  是列满秩矩阵, 其行维数大于列维数, 所以式(30)中关于矩阵  $\mathbf{Q}_{12}$  的方程组是欠定的,  $\mathbf{Q}_{MN} = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{A}_2^+$  并不是它们的唯一解。

事实上, 任意  $\mathbf{Q}'_{12} = \mathbf{Q}_{MN} + \Gamma \mathbf{P}_c^\perp$  均是式(30)的解, 其中,  $\mathbf{P}_c^\perp = \mathbf{I}_{N'} - \mathbf{E}_2 \mathbf{E}_2^+$ , 因为矩阵  $\mathbf{P}_c^\perp$  满足  $\mathbf{P}_c^\perp \mathbf{E}_2 = \mathbf{P}_c^\perp \mathbf{A}_2 \mathbf{T}_c = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{P}_c^\perp \mathbf{A}_2 = \mathbf{O}$ , 而  $\Gamma$  为任意矩阵。注意到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Q}'_{12}\|_F^2 &= \|\mathbf{Q}_{MN} + (\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}_{MN})\|_F^2 \\ &= \|\mathbf{Q}_{MN}\|_F^2 + \|\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}_{MN}\|_F^2 \\ &\quad + 2\text{Re}\{\text{tr}[(\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}_{MN})\mathbf{Q}_{MN}^H]\} \end{aligned} \quad (31)$$

式中,  $\text{tr}(\cdot)$  表示矩阵迹;  $\|\cdot\|_F^2$  表示Frobenius范数。由于  $\mathbf{Q}'_{12} \mathbf{A}_2 = \mathbf{Q}_{MN} \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \Phi_{12}$ , 所以有  $\mathbf{Q}_{MN} = \mathbf{Q}'_{12} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^+$ , 由此可得

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}_{MN})\mathbf{Q}_{MN}^H &= (\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}'_{12} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^+) \mathbf{Q}_{MN}^H \\ &= \mathbf{Q}'_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_2^+) \mathbf{Q}_{MN} = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (32)$$

所以  $\|\mathbf{Q}'_{12}\|_F^2 = \|\mathbf{Q}_{MN}\|_F^2 + \|\mathbf{Q}'_{12} - \mathbf{Q}_{MN}\|_F^2 \geq \|\mathbf{Q}_{MN}\|_F^2$ , 这意味着  $\mathbf{Q}_{MN} = \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{A}_2^+$  是式(29)所示方程组的最小Frobenius范数解。所以  $\mathbf{Q}_{MN}$  的  $M$  个非零主特征值  $\{v_m\}_{m=1}^M$  应为

$$\left\{1 + \frac{\psi_m(1)}{\psi_m(3)}\right\}_{m=1}^M \quad (33)$$

同理, 根据式(21)–式(33)可以分别求出矩阵  $\mathbf{Q}_{23}$  的对角阵  $\mathbf{\Lambda}_{23} = \mathbf{I}_{M \times M} + \mathbf{\Lambda}$  和矩阵  $\mathbf{Q}_{24}$  的对角阵  $\mathbf{\Omega}_{24} = \mathbf{I}_{M \times M} + \mathbf{\Omega}$ 。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{A}_2 \Phi_{12} \mathbf{A}_2^+ \\ &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{12}) [(\mathbf{P}_{12})^{-1} \Phi_{12} \mathbf{P}_{12}] (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{12})^+ \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{23} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{\Lambda}_{23} \mathbf{A}_2^+ \\ &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{23}) [(\mathbf{P}_{23})^{-1} \mathbf{\Lambda}_{23} \mathbf{P}_{23}] (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{23})^+ \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{24} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{\Omega}_{24} \mathbf{A}_2^+ \\ &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{24}) [(\mathbf{P}_{24})^{-1} \mathbf{\Omega}_{24} \mathbf{P}_{24}] (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{24})^+ \end{aligned} \quad (36)$$

式(34)、式(35)和式(36)中, 矩阵  $\mathbf{P}_{12}$ ,  $\mathbf{P}_{23}$  和  $\mathbf{P}_{24}$  均为  $M \times M$  维广义置换矩阵, 并且矩阵每行有且仅有一个非零元素。

### 3.2 参数配对

很显然,  $\mathbf{P}_{12}$ ,  $\mathbf{P}_{23}$  和  $\mathbf{P}_{24}$  并不一定相同, 这意味着  $\mathbf{Q}_{12}$  的第  $m$  个主特征值未必对应着  $\mathbf{Q}_{23}$  和  $\mathbf{Q}_{24}$  的第  $m$  个主特征值, 如果不进行配对处理, 会错误地将对应于不同信号的相位信息进行联合处理导致参数估计错误。

不失一般性, 以  $\mathbf{Q}_{12}$  的主特征值顺序为参考。根据式(34)、式(35)和式(36)可知,  $\mathbf{Q}_{12}$ ,  $\mathbf{Q}_{23}$  和

$\mathbf{Q}_{24}$  的特征矢量分别为  $\mathbf{L}_{12} = \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{12}$ ,  $\mathbf{L}_{23} = \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{23}$  和  $\mathbf{L}_{24} = \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{24}$ , 又因为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{12} &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{23}) [(\mathbf{P}_{23})^{-1} \mathbf{P}_{12}] \\ &= (\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{24}) [(\mathbf{P}_{24})^{-1} \mathbf{P}_{12}] \end{aligned} \quad (37)$$

而  $\mathbf{P}_{23}$ ,  $\mathbf{P}_{24}$ ,  $(\mathbf{P}_{23})^{-1} \mathbf{P}_{12}$  和  $(\mathbf{P}_{24})^{-1} \mathbf{P}_{12}$  仍都是广义矩阵, 这意味着  $\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{23}$  和  $\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{24}$  是  $\mathbf{A}_2 \mathbf{P}_{12}$  的广义列置换, 而对应的广义置换矩阵分别为  $(\mathbf{P}_{23})^{-1} \mathbf{P}_{12}$  和  $(\mathbf{P}_{24})^{-1} \mathbf{P}_{12}$ 。根据式(37)又知

$$(\mathbf{P}_{23})^{-1} \mathbf{P}_{12} = \mathbf{L}_{23}^+ \mathbf{L}_{12} \quad (38)$$

$$(\mathbf{P}_{24})^{-1} \mathbf{P}_{12} = \mathbf{L}_{24}^+ \mathbf{L}_{12} \quad (39)$$

基于这一点, 以  $\Phi_{12}$  和  $\mathbf{\Lambda}_{23}$  为例按下列步骤进行配对处理: (1) 利用并行ESPRIT算法分别得到特征矢量  $\mathbf{L}_{12}$  和  $\mathbf{L}_{23}$ , (2) 计算  $\mathbf{L}_{23}^+ \mathbf{L}_{12}$ , 若其第  $m$  列的第  $k$  个元素绝对值最大, 则矩阵  $\Phi_{12}$  的第  $m$  个主特征值和矩阵  $\mathbf{\Lambda}_{23}$  的第  $k$  个主特征值配成一对, 其中,  $m=1, 2, \dots, M$ 。

### 3.3 算法步骤

(1) 求数据接收矢量  $\mathbf{x}(t)$  的  $K$  次独立快拍计算样本协方差矩阵  $\mathbf{R}$ 。

(2) 对矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征分解, 求大特征值对应的信号子空间  $\mathbf{E}_s$ 。

(3) 根据式(20)把信号子空间  $\mathbf{E}_s$  划分成3个子阵。

(4) 根据式(21)–(29)求矩阵  $\mathbf{Q}_{12}$ ,  $\mathbf{Q}_{23}$  和  $\mathbf{Q}_{24}$ 。

(5) 对矩阵  $\mathbf{Q}_{12}$ ,  $\mathbf{Q}_{23}$  和  $\mathbf{Q}_{24}$  进行特征分解, 并进行配对。然后根据式(15)–式(18)求出信号的DOA信息和极化参数。

### 3.4 复杂度分析

本小节将对本文提出的算法复杂度进行分析, 假设阵列有  $M$  个阵元数,  $N$  个入射信号, 对协方差矩阵做特征值分解的时间复杂度为  $O((2 \times M)^3)$ , 根据式(21)–式(29)求特征值的时间复杂度为  $O(3 \times (M/2)^3)$ , 特征值配对的时间复杂度至多为  $O(N^2)$ 。

综上所述, 本文的算法的时间复杂度大致为  $O(8 \times M^3 + 3 \times (M/2)^3 + N^2)$ 。

## 4 算法仿真

阵列设为阵元数为12个的均匀线阵, 阵元使用正交偶极子, 阵元间距为半波长, 阵元摆放如图1所示。入射信号为远场窄带信号, 并且信号之间相互独立; 噪声为相互独立的零均值加性高斯白噪声, 并且信号和噪声之间相互独立。

### 4.1 算法的有效性

为了验证算法的有效性, 在相同条件下分别使用极化MUSIC算法和本文提出的算法对信号进行

DOA估计。入射信号数目为3个，信号的入射方位角分别为 $60^\circ$ 、 $150^\circ$ 和 $220^\circ$ 、俯仰角分别为 $10^\circ$ 、 $20^\circ$ 和 $30^\circ$ 、极化幅角分别为 $10^\circ$ 、 $20^\circ$ 和 $30^\circ$ 、极化相位角分别为 $130^\circ$ 、 $60^\circ$ 和 $300^\circ$ 。噪声为高斯白噪声，信噪比为20 dB，快拍数为5000。

图2为极化MUSIC算法DOA仿真结果，表2为本文算法仿真结果。根据图2可以看出极化MUSIC算法在进行估计时，由于阵列为均匀线阵，所以出现了大量的模糊，无法有效进行DOA估计，表2则验证了本文算法可以进行有效估计，并且具有较高的估计精度。

### 4.2 信噪比对算法的影响

为了测量信噪比对算法的影响。设入射信号数目为1，信号的入射方位角为 $60^\circ$ 、俯仰角为 $10^\circ$ 、极化幅角为 $10^\circ$ 、极化相位角为 $130^\circ$ 。噪声为高斯白噪声，信噪比为5~20 dB，每间隔5 dB进行递

增。信号的快拍数为5000。每个信噪比下做500次蒙特卡洛实验统计结果。

图3(a)为信号的DOA估计测量误差，图3(b)为信号极化参数的测量误差。根据仿真结果可以看出信号的DOA和极化参数估计精度随着信噪比增大而提高。当信噪比高于15 dB时，信号的DOA和极化参数具有较高的估计精度。

### 4.3 快拍数对算法的影响

为了测量快拍数对算法的影响。入射信号数目为1，信号的入射方位角为 $60^\circ$ 、俯仰角为 $10^\circ$ 、极化幅角为 $10^\circ$ 、极化相位角为 $130^\circ$ 。噪声为高斯白噪声，信噪比为20 dB。快拍数为10~5000，每个快拍数下做500次蒙特卡洛实验统计结果。

图4(a)为信号的DOA估计测量误差，图4(b)为信号极化参数的测量误差。根据仿真结果可以看出信号的DOA和极化参数估计精度随着快拍数增大

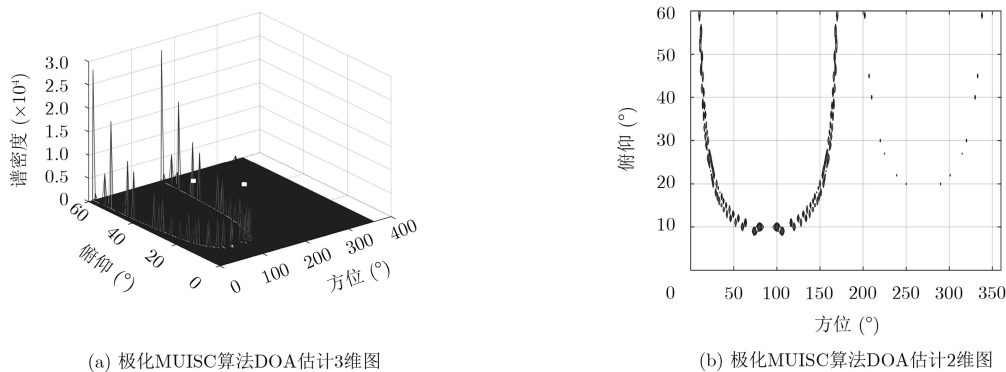


图2 极化MUSIC算法DOA估计仿真结果

表2 本文算法的仿真结果( $^\circ$ )

	方位角		俯仰角		极化幅角		极化相位角	
	实际值	估计值	实际值	估计值	实际值	估计值	实际值	估计值
信号1	60.00	60.17	10.00	9.92	10.00	10.06	130.00	130.10
信号2	150.00	150.00	20.00	20.13	20.00	19.83	60.00	59.68
信号3	220.00	220.00	30.00	29.99	30.00	30.01	300.00	300.00

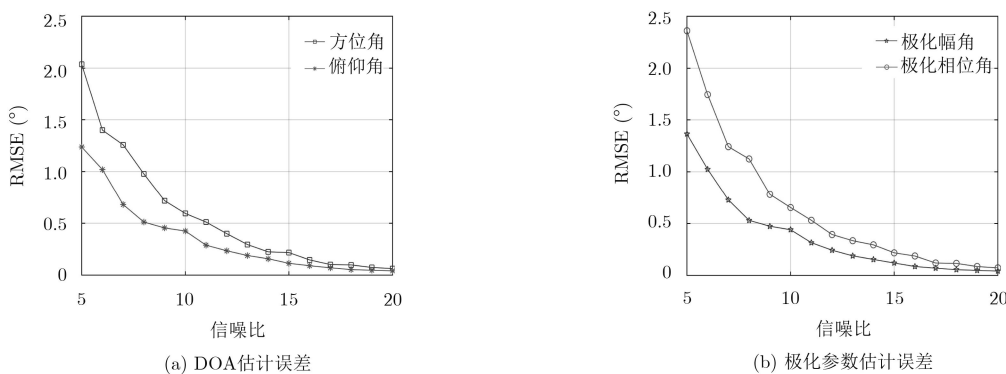


图3 信噪比对算法影响

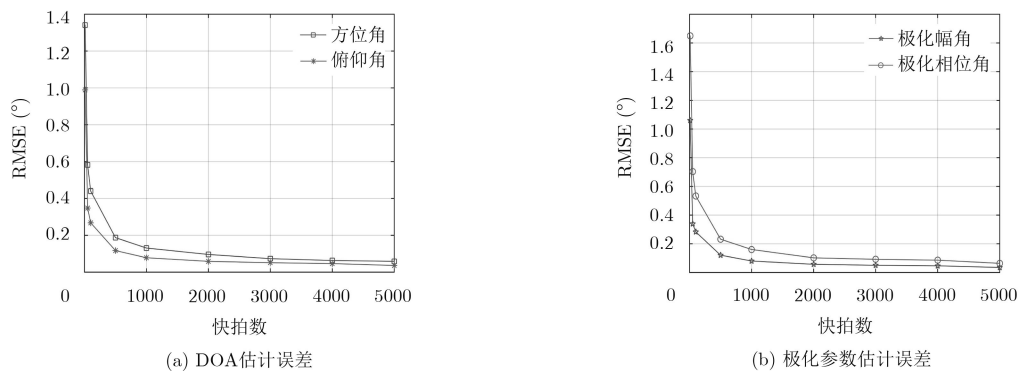


图4 快拍数对算法影响

而提高。当快拍数高于500时,信号的DOA和极化参数具有较高的估计精度。

#### 4.4 算法分辨力及配对正确率

为了测量算法的分辨力和配对正确率。入射信号数目为2,两个信号的入射方位角相同,通过改变两个信号的俯仰角来改变信号之间的夹角。信号1的俯仰角固定为 $10^\circ$ ,改变信号2的俯仰角;信号1的极化幅角为 $20^\circ$ 、极化相位角为 $60^\circ$ ;信号2的极

化幅角为 $10^\circ$ 、极化相位角为 $150^\circ$ 。噪声为高斯白噪声,信噪比为20 dB。快拍数为5000。

图5(a)为信号在角度相差 $1^\circ\sim 8^\circ$ 范围内的估计精度,根据仿真可以看出,极化相位角的误差相对较大,当信号角度相差大于等于 $3^\circ$ 时,信号具有较高的估计精度;图5(b)为信号在角度相差 $1^\circ\sim 8^\circ$ 范围内的配对正确率,根据仿真可以看出,信号在相差大于等于 $2^\circ$ 时,配对正确率为100%。

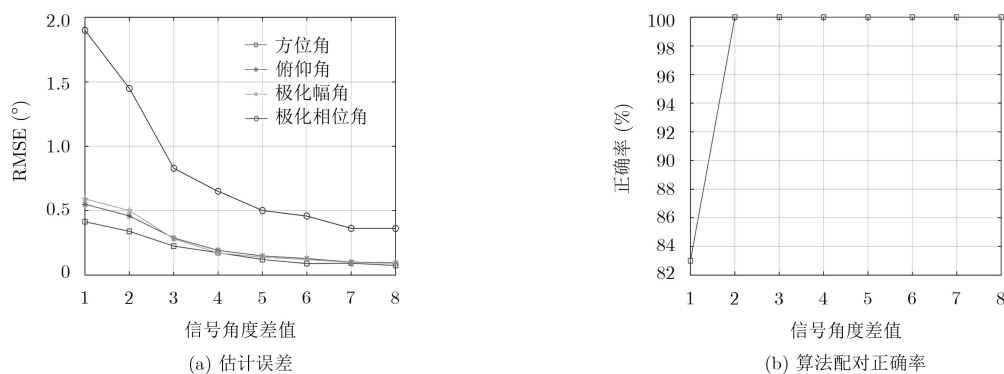


图5 算法分辨力仿真

## 5 结论

本文的主要工作在于提出一种新型阵列和相应算法,有效解决了残缺矢量电磁矢量传感器组成的均匀线阵无法进行2维DOA估计的问题。本文使用2维矢量传感器获得信号的3维电场信息,少于全电磁矢量传感器的6维极化信息,降低了算法运算量。同时对子阵在空域和极化域的相位差进行了联合估计,采用比值法直接解出信号的DOA和极化参数。由于算法通过配对后的特征值直接进行比值求取信号角度,不需要进行谱峰搜索,因此也避开了高维度谱峰搜索产生的运算量,算法不仅解决了残缺电磁矢量传感器组成的均匀线阵无法进行2维DOA的问题,还大大降低了算法的复杂度。通过实验仿真可以发现本文算法可以有效对由偶极子组

成的均匀线阵进行2维DOA估计,并且在信噪比和快拍数较高时具有较高的估计精度和分辨力。

## 参考文献

- [1] 陈善继,张锐戈,吴国庆,等.极化敏感阵列及其应用研究[J].现代电子技术,2009,32(5):53-56. doi: 10.16652/j.issn.1004-373x.2009.05.008.  
CHEN Shanji, ZHANG Ruige, WU Guoqing, et al. Research on the polarization sensitive array and its application[J]. *Modern Electronics Technique*, 2009, 32(5): 53-56. doi: 10.16652/j.issn.1004-373x.2009.05.008.
- [2] NEHORAI A and PALDI E. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(2): 376-398. doi: 10.1109/78.275610.
- [3] FERRARA E R Jr and PARKS T M. Direction finding

- with an array of antennas having diverse polarizations[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1983, 31(2): 231–236. doi: [10.1109/TAP.1983.1143038](https://doi.org/10.1109/TAP.1983.1143038).
- [4] HUA Y. A pencil-MUSIC algorithm for finding two-dimensional angles and polarizations using crossed dipoles[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1993, 41(3): 370–376. doi: [10.1109/8.233122](https://doi.org/10.1109/8.233122).
- [5] CHENG Qi and HUA Yingbo. Performance analysis of the MUSIC and Pencil-MUSIC algorithms for diversely polarized array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(11): 3150–3165. doi: [10.1109/78.330374](https://doi.org/10.1109/78.330374).
- [6] CHENG Qi and HUA Yingbo. Further study of the Pencil-MUSIC algorithm[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(1): 284–299. doi: [10.1109/7.481269](https://doi.org/10.1109/7.481269).
- [7] GUO Ran, MAO Xingpeng, LI Shaobin, *et al.* A fast DOA estimation algorithm based on polarization MUSIC[J]. *Radioengineering*, 2015, 24(1): 214–225. doi: [10.13164/re.2015.0214](https://doi.org/10.13164/re.2015.0214).
- [8] FRIEDLANDER B and WEISS A J. A direction finding algorithm for diversely polarized arrays[J]. *Digital Signal Processing*, 1992, 2(3): 123–134. doi: [10.1016/1051-2004\(92\)90002-G](https://doi.org/10.1016/1051-2004(92)90002-G).
- [9] WEISS A J and FRIEDLANDER B. Direction finding for diversely polarized signals using polynomial rooting[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(5): 1893–1905. doi: [10.1109/78.215307](https://doi.org/10.1109/78.215307).
- [10] LI Jian and COMPTON R T Jr. Angle and polarization estimation using ESPRIT with a polarization sensitive array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(9): 1376–1383. doi: [10.1109/8.99047](https://doi.org/10.1109/8.99047).
- [11] LI Jian and COMPTON R T Jr. Angle estimation using a polarization sensitive array[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(10): 1539–1543. doi: [10.1109/8.97389](https://doi.org/10.1109/8.97389).
- [12] LI Jian and COMPTON R T Jr. Two-dimensional angle and polarization estimation using the ESPRIT algorithm[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1992, 40(5): 550–555. doi: [10.1109/8.142630](https://doi.org/10.1109/8.142630).
- [13] LIU Shuai, YAN Fenggang, JIN Ming, *et al.* An improved polarization and DOA estimation algorithm[C]. 2016 IEEE International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology, Beijing, China, 2016: 1009–1011. doi: [10.1109/ICMMT.2016.7762516](https://doi.org/10.1109/ICMMT.2016.7762516).
- [14] WANG Guibao, ZHAO Feng, and LIU Xiang. Estimating the DOA and polarization parameters with sparse collocated loop and dipole cross array[C]. 2016 IEEE International Conference on Real-time Computing and Robotics, Angkor Wat, Cambodia, 2016: 306–311. doi: [10.1109/RCAR.2016.7784044](https://doi.org/10.1109/RCAR.2016.7784044).
- [15] LAN Xiang, LIU Wei, and NGAN H Y T. Joint 4-D DOA and polarization estimation based on linear tripole arrays[C]. The 22nd International Conference on Digital Signal Processing, London, UK, 2017: 1–5. doi: [10.1109/ICDSP.2017.8096134](https://doi.org/10.1109/ICDSP.2017.8096134).
- [16] 王利伟, 朱晓丹, 王建, 等. 基于极化敏感阵列的高效DOA与极化参数联合估计算法[J]. *航天电子对抗*, 2017, 33(3): 42–46. doi: [10.16328/j.htdz8511.2017.03.012](https://doi.org/10.16328/j.htdz8511.2017.03.012).
- WANG Liwei, ZHU Xiaodan, WANG Jian, *et al.* Efficient DOA and polarization parameter joint estimation method based on polarization sensitive array[J]. *Aerospace Electronic Warfare*, 2017, 33(3): 42–46. doi: [10.16328/j.htdz8511.2017.03.012](https://doi.org/10.16328/j.htdz8511.2017.03.012).
- 刘鲁涛: 男, 1977年生, 副教授, 博士生导师, 研究方向为宽带信号处理、检测与识别。
- 王传宇: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为宽带信号检测、DOA。