

# 基于约束总体最小二乘的单站DOA/TDOA联合误差校正与定位算法

左燕 陈志猛\* 蔡立平

(杭州电子科技大学自动化学院 杭州 310018)

**摘要:** 多基外辐射源雷达定位系统受系统偏差影响较大。该文针对多基外辐射源雷达到达角度(DOA)和到达时差(TDOA)联合定位系统,提出一种基于约束总体最小二乘(CTLS)的无源定位和误差校正算法。首先引入辅助变量,将DOA和TDOA非线性观测方程进行线性化处理。考虑伪线性化后定位方程中噪声矩阵各分量统计相关性,将无源定位与误差校正联合优化问题建立为CTLS模型,并采用牛顿迭代方法对模型求解。在此基础上,考虑辅助变量与目标位置的关联性,设计关联最小二乘算法改进目标位置估计值,采用后验迭代方法进一步提高系统偏差估计精度。最后推导了算法的理论误差。仿真结果表明:该算法能够有效地估计目标位置和系统偏差。

**关键词:** 无源定位; 误差校正; 多基外辐射源雷达; 到达角度和时差; 约束总体最小二乘法

中图分类号: TN958.97

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)06-1317-07

DOI: 10.11999/JEIT180655

## Single-observer DOA/TDOA Registration and Passive Localization Based on Constrained Total Least Squares

ZUO Yan CHEN Zhimeng CAI Liping

(School of Automation, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

**Abstract:** The system biases degrade seriously the location precision for the multi-static passive radar system. A joint registration and passive localization algorithm based on Constrained Total Least Squares (CTLS) using Direction Of Arrival (DOA) and Time Difference Of Arrival (TDOA) measurements is developed to address the multi-static radar localization problem under the influence of system biases. Firstly, the nonlinear DOA and TDOA measurement equations are linearized by introducing auxiliary variables. Considering the statistical correlation properties of the noise matrix in the pseudo-linear equations, a joint biases registration and passive localization problem is formulated as a CTLS problem and the Newton's method is applied to solving the CTLS problem. Moreover, a dependent least squares algorithm is designed to improve the target position estimation using the relationship between auxiliary variables and target position. An iterative post-estimate procedure is exploited to enhance further the estimation accuracy of the system biases. Finally, the theoretical error of the proposed algorithm is derived. Simulations demonstrate that the proposed algorithm can effectively estimate the system biases and target position.

**Key words:** Passive localization; Registration; Multi-static passive radar; DOA and TDOA; Constrained Total Least Squares (CTLS)

### 1 引言

外辐射源雷达利用第三方(广播、电视、卫星、通信基站等外辐射源)发射的电磁信号辐射源实现对“无线电静默”目标的探测与定位,具有隐

蔽性高、抗干扰能力强、监视范围广、成本低等优点<sup>[1]</sup>。因此,近年成为雷达探测领域的研究热点<sup>[2-4]</sup>。

目前,外辐射源雷达定位系统利用观测量对目标进行无源定位,主要包括基于到达角度(Direction Of Arrival, DOA)、到达时差(Time Difference Of Arrival, TDOA)、到达频差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)以及联合其中2种或者3种观测信息的定位体制<sup>[5-7]</sup>。其中,联合DOA和TDOA定位体制因其定位精度高,在工程上被广泛采用。

外辐射源雷达系统DOA/TDOA定位需要来自同一目标的所有的量测值是无偏的,而实际问题中

收稿日期: 2018-07-04; 改回日期: 2018-12-25; 网络出版: 2019-01-18

\*通信作者: 陈志猛 zhimchen@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金(61673146), 浙江省自然科学基金(LY16F030009)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61673146), The Zhejiang Provincial Natural Science Foundation (LY16F030009)

外辐射源雷达量测中存在系统偏差<sup>[8]</sup>。引起偏差产生的因素主要有3个方面：(1)外辐射源之间信号发射时钟不同步，存在时钟偏差<sup>[9,10]</sup>；(2)外辐射源信号传播时受信号阻塞和多径影响，使得参考信号的路径与直达波路径不一致，引起到达时差量测的偏差<sup>[11]</sup>；(3)雷达观测站天线坐标非水平且方位角零值未对准，造成方位角测量偏差。忽视系统偏差的影响会导致目标定位估计性能严重下降，甚至产生虚假目标。因此，研究系统偏差下外辐射源DOA/TDOA定位非常必要。

极大似然估计<sup>[12]</sup>、最大期望估计<sup>[13]</sup>和最小二乘估计<sup>[14]</sup>等配准方法已广泛应用于主动单基雷达网误差校正。由于主/被动雷达定位体制不同，上述方法不能直接应用于被动定位系统的误差校正。Wang和Ho<sup>[15]</sup>针对目标辐射源TDOA定位系统，考虑固定时钟偏差和传感器位置随机误差的影响，提出了两步加权最小二乘的估计算法。随后，文献<sup>[16]</sup>将到达增益比(Gain Ratio Of Arrival, GROA)量测信息加入TDOA定位体制中，采用最小二乘算法联合估计目标位置和系统偏差。上述目标辐射源被动定位和误差校正方法根据观测量和待估计量(目标位置及系统偏差)之间的代数特征，推导出相应的伪线性方程，基于此提出闭式求解或迭代优化算法。

本文研究基于外辐射源雷达系统单站DOA/TDOA无源定位和误差校正问题。与目标辐射源定位系统不同，外辐射源雷达采用双基/多基结构，其量测方程非线性程度增强，而系统偏差的存在使得目标位置和系统偏差估计方程的建立更加困难。外辐射源雷达系统无源定位和误差校正问题本质是一个高维非线性估计问题，受目标辐射源定位方法<sup>[15,16]</sup>的启发，在多基外辐射源雷达观测方程中引入线性化处理，构造量测值与待估计值(目标位置及系统偏差)之间的伪线性方程。文献<sup>[8]</sup>研究了多基被动雷达TDOA定位下系统偏差校正问题，利用双基距非线性量测函数的代数特征构造伪线性方程，并提出了一种关联后验迭代最小二乘估计算法联合估计目标位置和系统偏差。该方法对双基距量测方程进行线性化处理，伪线性估计方程中系统矩阵出现噪声分量统计相关特性，而所提的求解算法在噪声分量统计相关时并不能获得最优解。

对此，本文针对多基外辐射源雷达单站DOA/TDOA定位系统，提出一种基于约束总体最小二乘(Constrained Total Least Squares, CTLS)的无源定位和误差校正方法。将DOA信息引入到TDOA定位体制中，通过协同多域观测信息改善对目标定位性能。利用多基外辐射源雷达DOA和TDOA的

代数特征，引入辅助变量进行伪线性处理。同时考虑了伪线性化处理出现噪声分量统计相关的问题，将目标定位和系统偏差校正联合估计建立为CTLS模型，并利用牛顿迭代法求解。在此基础上，考虑辅助变量与目标位置的关联性，提出一种关联最小二乘算法提高目标位置估计精度，并通过后验迭代方法进一步提高系统偏差的估计精度。最后对算法进行了理论分析和仿真验证。

## 2 定位模型

### 2.1 观测模型

考虑某基于外辐射源的无源定位系统，该系统由 $M$ 个外辐射源和1个观测站共同组成，对 $P$ 个目标进行定位。不失一般性，以观测站为原点，建立空间直角坐标系。第 $m$ 个外辐射源位置已知为 $\mathbf{q}_m = [x_m, y_m]^T$  ( $m=1, 2, \dots, M$ )，第 $p$ 个目标的坐标位置为 $\mathbf{r}_p^{\text{tar}} = [x_p^{\text{tar}}, y_p^{\text{tar}}]^T$  ( $p=1, 2, \dots, P$ )。假设信号的传播速度为 $c=3 \times 10^8$  m/s，则外辐射源 $m$ 的直达信号与其经目标 $p$ 反射后的回波信号到达观测站的时差为

$$t_{m,p} = t_{m,p}^0 + \Delta t_m + e_{t_{m,p}} \quad (1)$$

其中， $t_{m,p}^0 = (\|\mathbf{r}_p^{\text{tar}} - \mathbf{q}_m\| + \|\mathbf{r}_p^{\text{tar}}\| - \|\mathbf{q}_m\|) / c$ 为到达时差的真实值， $\Delta t_m$ 为对应的系统偏差， $e_{t_{m,p}}$ 为对应的量测误差，服从均值为0，方差为 $\sigma_{m,p}^2$ 的高斯分布。

由于外辐射源的位置和观测站的位置通常是先验已知，因此TDOA又可转化为目标到达外辐射源与到达观测站的距离和(即双基距)的量测值

$$u_{m,p} = u_{m,p}^0 + \delta_m + e_{u_{m,p}} \quad (2)$$

其中， $u_{m,p} = \|\mathbf{r}_p^{\text{tar}} - \mathbf{q}_m\| + \|\mathbf{r}_p^{\text{tar}}\|$ 为目标 $p$ 距外辐射源 $m$ 与观测站距离和的真实值； $\delta_m = c\Delta t_m$ 为外辐射源 $m$ 的双基距系统偏差； $e_{u_{m,p}} = ce_{t_{m,p}}$ 为对应的量测噪声，服从均值为0，方差为 $c^2\sigma_{m,p}^2$ 的高斯分布。

假设目标 $p$ 到观测站的方位角为 $\theta_p$ ，根据目标与观测站的几何关系，得到方位角 $\theta_p$ 的观测方程为

$$\theta_p = \arctan \frac{y_p^{\text{tar}}}{x_p^{\text{tar}}} + \Delta \theta_p + e_{\theta_p} \quad (3)$$

其中， $\theta_p$ 为目标 $p$ 到观测站的方位角量测值， $\Delta \theta_p$ 为该方位角系统偏差， $e_{\theta_p}$ 为对应的量测噪声，服从均值为0，方差为 $\sigma_{\theta_p}^2$ 的高斯分布。

### 2.2 伪线性化定位模型

令辅助变量 $r_{m,p} = \sqrt{(x_p^{\text{tar}} - x_m)^2 + (y_p^{\text{tar}} - y_m)^2}$ ， $R_p = \sqrt{(x_p^{\text{tar}})^2 + (y_p^{\text{tar}})^2}$ ，代入式(2)中，并结合式(4)

$$(R_p+r_{m,p})(R_p-r_{m,p})=2x_mx_p^{\text{tar}}+2y_my_p^{\text{tar}}-x_m^2-y_m^2 \quad (4)$$

消去辅助变量 $r_{m,p}$ ，整理可得

$$l-2x_mx_p^{\text{tar}}-2y_my_p^{\text{tar}}+2\bar{u}_{m,p}R_p+(-\delta_m+2\bar{u}_{m,p}-2R_p)\delta_m=\bar{u}_{m,p}^2-x_m^2-y_m^2 \quad (5)$$

其中， $\bar{u}_{m,p}=u_{m,p}-e_{u_{m,p}}$ 。

将式(3)在量测值 $\theta_p$ 进行1阶泰勒展开，忽略高阶项，得到式(6)

$$\tan \bar{\theta}_p x_p^{\text{tar}}-y_p^{\text{tar}}-\frac{x_p}{\cos^2 \theta_p} \Delta \theta_p=0 \quad (6)$$

其中， $\bar{\theta}_p=\theta_p-e_{\theta_p}$ 。

将目标位置 $(x_p^{\text{tar}}, y_p^{\text{tar}})$ 、系统偏差 $\delta_m$ 和 $\Delta \theta_p$ ，以及辅助变量 $R_p$ 作为待求变量，联立式(5)和式(6)构造伪线性量测定位方程，矩阵形式如式(7)

$$\bar{\mathbf{Z}}=\bar{\mathbf{H}} \mathbf{X} \quad (7)$$

式中，

$$\mathbf{X}=\left[x_1^{\text{tar}} \ y_1^{\text{tar}} \ R_1 \ \Delta \theta_1 \ \cdots \ x_p^{\text{tar}} \ y_p^{\text{tar}} \ R_p \ \Delta \theta_p \ \delta_1 \ \cdots \ \delta_M\right]^T$$

$$\bar{\mathbf{Z}}=\left[0 \ (\bar{u}_{1,1}^2-x_1^2-y_1^2) \ \cdots \ (\bar{u}_{M,1}^2-x_M^2-y_M^2) \ \cdots \ 0 \ (\bar{u}_{M,1}^2-x_1^2-y_1^2) \ \cdots \ (\bar{u}_{M,p}^2-x_M^2-y_M^2)\right]^T$$

$$\bar{\mathbf{H}}=\left[\text{blkdiag}\left\{\mathbf{h}_{\text{LS}}^1(1) \ \cdots \ \mathbf{h}_{\text{LS}}^1(P)\right\} \left[\mathbf{h}_{\text{LS}}^2(1) \ \cdots \ \mathbf{h}_{\text{LS}}^2(P)\right]^T\right]$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}^1(p)=\begin{bmatrix} \tan \bar{\theta}_p & -1 & 0 & -\frac{x_p^{\text{tar}}}{\cos^2 \theta_p} \\ -2x_1 & -2y_1 & 2\bar{u}_{1,p} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_M & -2y_M & 2\bar{u}_{M,p} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{\text{LS}}^2(p)=\left[\mathbf{O}_{1 \times M}, \text{diag}\left[-\delta_1+2\bar{u}_{1,p}-2R_p \ \cdots \ -\delta_M+2\bar{u}_{M,p}-2R_p\right]\right]^T$$

该2维系统估计模型中有 $M$ 个发射源与 $P$ 个目标，可以获得个 $(M+1)P$ 个量测数据，而量测方程中有 $4P+M$ 个未知量。因此，目标和发射源数量必须满足如下要求： $(M+1)P \geq 4P+M$ 。

### 3 DOA/TDOA联合误差校正和定位算法

#### 3.1 基于CTLS估计的算法

考虑量测误差对系数矩阵 $\bar{\mathbf{H}}$ 和 $\bar{\mathbf{Z}}$ 的影响，式(7)中 $\bar{\mathbf{H}}$ 和 $\bar{\mathbf{Z}}$ 可以表示为数据矩阵和扰动矩阵之和，其中 $\bar{\mathbf{H}}$ 和 $\bar{\mathbf{Z}}$ 做如下变化

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} &= \mathbf{H} + [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \ \mathbf{F}_2 \mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{F}_L \mathbf{E}], \\ \bar{\mathbf{Z}} &= \mathbf{Z} + \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (8)$$

则式(7)可以表示为

$$\mathbf{Z} + \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} = (\mathbf{H} + [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \ \mathbf{F}_2 \mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{F}_L \mathbf{E}]) \mathbf{X} \quad (9)$$

式中， $L$ 为向量 $\mathbf{X}$ 的长度

$$\mathbf{F}_i(j, k) = \frac{\partial \mathbf{H}_{ji}}{\partial \mathbf{E}_k} \quad (i=1, 2, \dots, L; j, k=1, 2, \dots, (M+1)P)$$

$$\mathbf{F}_{L+1}(j, k) = \frac{\partial \mathbf{Z}_j}{\partial \mathbf{E}_k} \quad (i=1, 2, \dots, L; j, k=1, 2, \dots, (M+1)P)$$

$$\mathbf{E} = [e_{\theta_1} \ e_{u_{1,1}} \ \cdots \ e_{u_{M,1}} \ \cdots \ e_{\theta_P} \ e_{u_{1,P}} \ \cdots \ e_{u_{M,P}}]^T$$

$$\mathbf{Z} = \left[0 \ (u_{1,1}^2-x_1^2-y_1^2) \ \cdots \ (u_{M,1}^2-x_M^2-y_M^2) \ \cdots \ 0 \ (u_{M,1}^2-x_1^2-y_1^2) \ \cdots \ (u_{M,p}^2-x_M^2-y_M^2)\right]^T$$

$$\mathbf{H} = [\text{blkdiag}\{\mathbf{h}_{\text{CT}}^1(1) \ \cdots \ \mathbf{h}_{\text{CT}}^1(P)\} \left[\mathbf{h}_{\text{CT}}^2(1) \ \cdots \ \mathbf{h}_{\text{CT}}^2(P)\right]^T]$$

$$\mathbf{h}_{\text{CT}}^1(p) = \begin{bmatrix} \tan \theta_p & -1 & 0 & -\frac{x_p^{\text{tar}}}{\cos^2 \theta_p} \\ -2x_1 & -2y_1 & 2u_{1,p} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -2x_M & -2y_M & 2u_{M,p} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{\text{CT}}^2(p) = [\mathbf{O}_{1 \times M}, \text{diag}[-\delta_1+2u_{1,p}-2R_p \ \cdots \ -\delta_M+2u_{M,p}-2R_p]]^T$$

将上述联合误差校正和目标定位问题转换为CTLS估计问题

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{X}, \mathbf{E}} & \|[ \mathbf{F}_1 \mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{F}_L \mathbf{E} \ \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} ]\|_{\text{F}}^2, \\ \text{s.t.} & \ [\mathbf{H} \ \mathbf{Z}] \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} + [ \mathbf{F}_1 \mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{F}_L \mathbf{E} \ \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E} ] \\ & \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

将上述约束优化问题转化为无约束优化问题

$$\min_{\mathbf{X}} \left[ \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} \right]^T \mathbf{C}^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中， $\mathbf{C} = [\mathbf{H} \ \mathbf{Z}]$ ， $\mathbf{H}_X = \sum_{j=1}^L x_j \mathbf{F}_j - \mathbf{F}_{L+1}$ ， $\mathbf{G} = \sum_{j=1}^{L+1} \mathbf{F}_j^T \mathbf{F}_j$ ， $x_j$ 为 $\mathbf{X}$ 的第 $j$ 个分量。

令 $f(\mathbf{X}) = [\mathbf{H}_X \mathbf{Z}]^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} [\mathbf{H}_X \mathbf{Z}]$ ，则 $f(\mathbf{X})$ 在 $\mathbf{X}$ 处的梯度向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= \left[ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_L} \right]^T \\ &= 2(\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{H}_X - \mathbf{U}^T \mathbf{B}_1) \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $U = (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{D}\mathbf{H}_X$  为  $(\mathbf{H}\mathbf{X} - \mathbf{Z})$  对  $\mathbf{X}$  的1阶求导, 具体形式为

$$\left[ \mathbf{H}\mathbf{I}_1 + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_1} \mathbf{X} \mathbf{H}\mathbf{I}_2 + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_2} \mathbf{X} \cdots \mathbf{H}\mathbf{I}_L + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x_L} \mathbf{X} \right],$$

$$\mathbf{B}_F = \left[ \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \cdots \mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{F}_L^T \mathbf{U} \right].$$

Hesse矩阵  $\mathbf{H}_k$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \frac{\partial^2 f(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X} \partial \mathbf{X}^T} \\ &= 2 \mathbf{U}_U \times \mathbf{D}\mathbf{H}_{XX} \\ &\quad - 2 \mathbf{D}\mathbf{H}_{XX} (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \\ &\quad + 2 \mathbf{D}\mathbf{H}_X (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{D}\mathbf{H}_X^T \\ &\quad - 2 \mathbf{B}_2^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{D}\mathbf{H}_X^T \\ &\quad + 2 \mathbf{B}_2^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \\ &\quad - 2 \mathbf{B}_3^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{B}_3 + 2 \mathbf{B}_1^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \\ &\quad \cdot (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) \\ &\quad - 2 \mathbf{D}\mathbf{H}_X (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{B}_1 \end{aligned} \quad (13)$$

式中,  $\mathbf{D}\mathbf{H}_{XX}$  为  $(\mathbf{H}\mathbf{X} - \mathbf{Z})$  的2阶导数,  $\mathbf{U}_U = [\mathbf{U} \cdots \mathbf{U}]$ ,  $\mathbf{B}_2 = \left[ \mathbf{F}_1 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \mathbf{U} \mathbf{F}_2 \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \mathbf{U} \cdots \mathbf{F}_L \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T \mathbf{U} \right]$ ,  $\mathbf{B}_3 = \left[ \mathbf{F}_1^T \mathbf{U} \mathbf{F}_2^T \mathbf{U} \cdots \mathbf{F}_L^T \mathbf{U} \right]$ .

则无约束优化问题式(11)可以通过牛顿迭代法进行求解, 其迭代公式如式(14)

$$\left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_{k+1} = \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{T}_k \quad (14)$$

设CTLS解  $\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}}$  与真实值(目标位置与系统偏差)  $\mathbf{X}$  之间的误差为  $\Delta \mathbf{X}_{\text{CT}} = \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} - \mathbf{X}$ , 通过1阶小噪声扰动分析方法来推导CTLS算法的理论误差, 得到估计误差和误差协方差如式(15)和式(16)

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{X}_{\text{CT}} &= - \left[ \mathbf{H}^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{H} \right]^{-1} \mathbf{H}^T \\ &\quad \times (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \Delta \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{cov} \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right) = \left( \mathbf{H}^T (\mathbf{H}_X \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_X^T)^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1} \quad (16)$$

式中,  $\Delta \mathbf{C} = [\mathbf{F}_1 \mathbf{E} \cdots \mathbf{F}_L \mathbf{E} \mathbf{F}_{L+1} \mathbf{E}]$ .

### 3.2 关联最小二乘估计算法

上述CTLS算法中假设  $\mathbf{X}$  中的变量相互独立的, 然而辅助变量  $R_p = \sqrt{(x_p^{\text{tar}})^2 + (y_p^{\text{tar}})^2}$  与目标位置  $x_p^{\text{tar}}$  和  $y_p^{\text{tar}}$  相关, 式(14)得到的估计值  $\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}}$  并不精确. 对此, 本节提出一种关联最小二乘估计对上述估计结果进行改进.

考虑辅助变量  $R_p$  和目标位置  $(x_p^{\text{tar}}, y_p^{\text{tar}})$  的相关性, 选择目标位置的平方  $(x_p^{\text{tar}})^2$ ,  $(y_p^{\text{tar}})^2$  以及系统偏差  $\Delta \theta_p$ ,  $\delta_m$  为变量, 构建估计模型如式(17)

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{H}' \mathbf{X}' + \mathbf{B} \Delta \mathbf{X}_{\text{CT}} \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{Z}' = \left[ \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_1^2 \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_2^2 \cdots \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_{4P-3}^2 \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_{4P-2}^2 \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_{4P}^2 \cdots \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right)_{4P+M}^2 \right]^T$ ,  $\mathbf{X}' = \left[ (x_1^{\text{tar}})^2 (y_1^{\text{tar}})^2 \cdots (x_P^{\text{tar}})^2 (y_P^{\text{tar}})^2 \Delta \theta_1 \cdots \Delta \theta_P \delta_1 \cdots \delta_M \right]^T$ ,

$$\mathbf{H}' = \text{blkdiag} \left\{ \underbrace{\mathbf{h}' \cdots \mathbf{h}'}_P, \mathbf{I}_P, \mathbf{I}_M \right\}, \mathbf{h}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \text{diag} \left\{ 2x_1^{\text{tar}}, 2y_1^{\text{tar}}, 2R_1, \cdots, 2x_P^{\text{tar}}, 2y_P^{\text{tar}}, 2R_P, \underbrace{1, \cdots, 1}_{P+M} \right\}.$$

对式(17)采用加权最小二乘估计求解, 得到估计值如式(18)

$$\hat{\mathbf{X}}' = \left( \mathbf{H}'^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}' \right)^{-1} \mathbf{H}'^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{Z}' \quad (18)$$

其中,  $\mathbf{W} = \mathbf{B} \text{cov} \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right) \mathbf{B}$ .

关联最小二乘估计  $\hat{\mathbf{X}}'$  的估计误差协方差矩阵如式(19)

$$\text{cov} \left( \hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} \right) = \left( \mathbf{H}'^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}' \right)^{-1} \quad (19)$$

由于估计值  $\hat{\mathbf{X}}'$  中变量为目标位置的平方项  $(x_p^{\text{tar}})^2$  和  $(y_p^{\text{tar}})^2$  ( $p=1, 2, \cdots, P$ ), 对其开方, 在2维空间得到目标位置的4组候选值, 记为  $\hat{r}_p = (\hat{x}_p^{\text{tar}}, \hat{y}_p^{\text{tar}})$ . 构建性能指标函数如式(20)

$$f(\hat{r}_p) = \left\| \mathbf{Z}_p - \hat{\mathbf{d}}_p - \hat{\mathbf{b}}_p \right\|^2 \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{Z}_p = [\theta_p u_{1,p} \cdots u_{M,p}]^T$ ,  $\hat{\mathbf{b}}_p = [\Delta \hat{\theta}_p \hat{\delta}_1 \cdots \hat{\delta}_M]^T$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_p = \left[ \arctan \frac{\hat{x}_p^{\text{tar}}}{\hat{y}_p^{\text{tar}}}, \sqrt{(\hat{x}_p^{\text{tar}} - x_1)^2 + (\hat{y}_p^{\text{tar}} - y_1)^2} + \sqrt{(\hat{x}_p^{\text{tar}})^2 + (\hat{y}_p^{\text{tar}})^2}, \cdots, \sqrt{(\hat{x}_p^{\text{tar}} - x_M)^2 + (\hat{y}_p^{\text{tar}} - y_M)^2} + \sqrt{(\hat{x}_p^{\text{tar}})^2 + (\hat{y}_p^{\text{tar}})^2} \right]^T$ .

由式(20)计算候选目标位置估计值  $\hat{r}_p$  下的性能指标  $f(\hat{r}_p)$ , 从中选择最佳目标位置估计值  $\tilde{r}_p = (\tilde{x}_p^{\text{tar}}, \tilde{y}_p^{\text{tar}})$

$$\tilde{r}_p = \arg \min_{\hat{r}_p} f(\hat{r}_p) \quad (21)$$

记  $\hat{\mathbf{X}}_{\text{DLS}} = [\tilde{x}_1^{\text{tar}} \tilde{y}_1^{\text{tar}} \cdots \tilde{x}_P^{\text{tar}} \tilde{y}_P^{\text{tar}} \Delta \theta_1 \cdots \Delta \theta_P \delta_1 \cdots \delta_M]^T$ , 则  $\hat{\mathbf{X}}_{\text{DLS}}$  的估计误差协方差矩阵为

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{DLS}}) = \mathbf{J} \text{cov}(\hat{\mathbf{X}}') \mathbf{J} \quad (22)$$

式中,  $\mathbf{J}$ 是 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{DLS}}$ 对 $\hat{\mathbf{X}}'$ 的雅克比矩阵, 即

$$\mathbf{J} = \text{diag} \left\{ \underbrace{\frac{1}{2x_1^{\text{tar}}}, \frac{1}{2y_1^{\text{tar}}}, \dots, \frac{1}{2x_p^{\text{tar}}}, \frac{1}{2y_p^{\text{tar}}}}_{2P}, \underbrace{1, \dots, 1}_{P+M} \right\}$$

### 3.3 误差校正下后验迭代估计

将系统偏差估计带入量测方程进行校正, 进行后验迭代估计, 第 $i+1$ 次迭代量测信息为

$$u_{m,p}^{(i+1)} = u_{m,p}^{(i)} - \hat{\delta}_m^{(i)} \quad (23)$$

$$\theta_p^{(i+1)} = \theta_p^{(i)} - \Delta\hat{\theta}_p^{(i)} \quad (24)$$

其中,  $\hat{\delta}_m^{(i)}$ ,  $\Delta\hat{\theta}_p^{(i)}$ 分别为第 $i$ 次双基距偏差和方位角偏差的估计。最终双基距偏差和方位角偏差估计值为

$$\hat{\delta}_m = \sum_i \hat{\delta}_m^{(i)} \quad (25)$$

$$\Delta\hat{\theta}_p = \sum_i \Delta\hat{\theta}_p^{(i)} \quad (26)$$

具体算法流程如下:

步骤1 初始化, 令迭代次数 $i=0$ ,  $\hat{\delta}_m(0)=0$ ,

$$\Delta\hat{\theta}_p=0, \hat{R}_p(0) = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^M \bar{u}_{m,p};$$

步骤2 基于CTLS算法的估计:

(1) 令 $k=0$ , 采用LS结果作为CTLS算法的初值, 即 $(\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}})_0 = (\bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{Z}}$ ;

(2) 采用牛顿迭代算法计算CTLS的估计值 $(\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}})_{k+1} = (\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}})_k - \mathbf{H}_k^{-1} \mathbf{T}_k$ , 更新目标位置 $\hat{x}_p^{\text{tar}}(k)$ ,  $\hat{y}_p^{\text{tar}}(k)$ ,  $\hat{R}_p(k)$ , 以及偏差 $\Delta\hat{\theta}_p(k)$ ,  $\hat{\delta}_m(k)$ ;

(3) 判断  $\max_{m=1, \dots, M} \left\{ \left| \hat{\delta}_m(k) - \hat{\delta}_m(k-1) \right| \right\} \leq \varepsilon_1$  和  $\max_{p=1, \dots, P} \left\{ \left| \Delta\hat{\theta}_p(k) - \Delta\hat{\theta}_p(k-1) \right| \right\} \leq \varepsilon_2$ , 若不满足, 则转步骤2(2); 否则, 得到估计值 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}} = (\hat{\mathbf{X}}_{\text{CT}})_k$ ,  $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 为阈值, 转步骤3;

步骤3 关联最小二乘估计:

(1) 根据式(18)计算, 得到 $(\hat{x}_p^{\text{tar}})^2(k)$ ,  $(\hat{y}_p^{\text{tar}})^2(k)$ ,  $\Delta\hat{\theta}_p^{(i)}(k)$ 和 $\hat{\delta}_m^{(i)}(k)$ ;

(2) 对上述结果 $(\hat{x}_p^{\text{tar}})^2(k)$ ,  $(\hat{y}_p^{\text{tar}})^2(k)$ , 采用式(21)计算得到目标位置 $\hat{x}_p^{\text{tar}}(k)$ ,  $\hat{y}_p^{\text{tar}}(k)$ ;

步骤4 误差校正下后验迭代估计:

(1) 根据式(25)和式(26)计算偏差 $\Delta\hat{\theta}_p$ 和 $\hat{\delta}_m$ ;

(2) 根据式(23)和式(24)更新量测数据 $u_{m,p}^{(i)}$ 和

$\theta_p^{(i)}$ ; 更新迭代次数 $i=i+1$ 。

(3) 当  $\max_{m=1, \dots, M} \left\{ \left| \hat{\delta}_m^{(i)} \right| \right\} \leq \varepsilon_3$  和  $\max_{p=1, \dots, P} \left\{ \left| \Delta\hat{\theta}_p^{(i)} \right| \right\} \leq \varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_1$ 和 $\varepsilon_2$ 为阈值, 迭代停止, 转步骤5, 否则转步骤2;

步骤5 获得偏差估计值 $\hat{\delta}_m$ 和 $\Delta\hat{\theta}_p$ , 以及目标位置估计值 $\hat{x}_p^{\text{tar}}$ 和 $\hat{y}_p^{\text{tar}}$ 。

## 4 仿真实验

本节通过仿真实验评估本文算法的定位性能, 仿真场景设置如下: 场景中有10个外辐射源, 1个观测站, 8个待估计目标, 外辐射源的位置随机分布在60 km×60 km的平面, 几何分布图见图1。

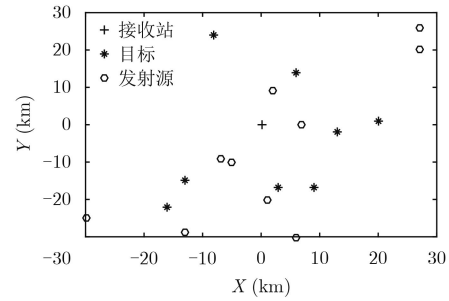


图1 目标、接收站和发射源位置关系图

双基距系统偏差设为[3, 1, 5, 3, 4, 4, 1, 2, 3, 4], 单位为km; 方位角系统偏差设为[0.04, 0.04, 0.02, 0.02, 0.03, 0.03, 0.01, 0.01], 单位为rad。方位角和双基距的测量误差设置均服从零均值的高斯分布。方位角测量误差标准差 $\sigma_\theta$ 为0.02 rad, 到达时间测量误差标准差 $\sigma_\tau$ 设置为0.1 ns。

目标位置的估计精度用均方根误差(RMSE)来衡量, 定义如式(27)

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left( (\hat{x}^{\text{tar}(l)} - x)^2 + (\hat{y}^{\text{tar}(l)} - y)^2 \right)} \quad (27)$$

其中,  $\hat{x}^{\text{tar}(l)}$ 和 $\hat{y}^{\text{tar}(l)}$ 表示第 $l$ 次蒙特卡洛仿真参数估计值,  $L$ 表示蒙特卡洛次数, 本实验中蒙特卡洛仿真次数设置为200。

为比较分析系统偏差校正对目标定位的影响。首先, 将本文提出的误差校正下DOA/TDOA目标定位和未考虑系统偏差校正下目标定位方法<sup>[5]</sup>进行仿真比较分析, 仿真结果如图2所示。

由图2可知, 系统偏差对目标定位精度影响较大。本文提出的误差校正下DOA/TDOA目标定位算法估计精度较好, 在测量误差较小时, 估计均方根误差RMSE满足克拉美罗下界(CRLB)。

假设目标按某一直线做匀速运动(见图3), 分

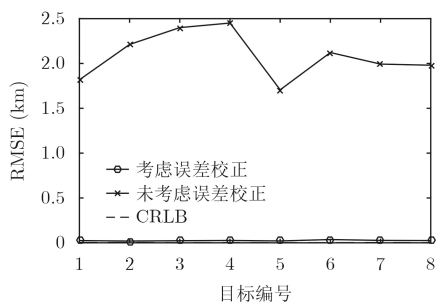


图2 考虑和未考虑误差校正下目标定位估计性能

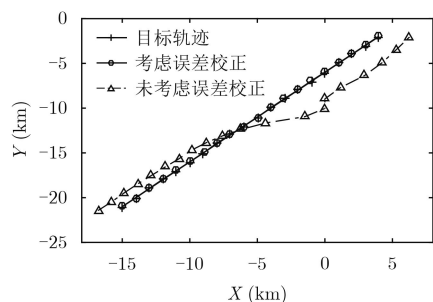


图3 考虑和未考虑误差校正下目标跟踪轨迹

析运动状态下误差校正下DOA/TDOA目标定位算法对目标位置估计性能。由图3可知，未考虑系统偏差影响下对目标位置估计将会产生偏差，使得估计轨迹偏离实际轨迹。而系统偏差校正下DOA/TDOA目标定位算法在杂波较少的环境下具有良好的目标跟踪性能。

为了验证不同估计算法对目标定位性能的影响。将本文提出的基于关联后验CTLS算法与文献[15]中两步加权最小二乘(简称两步WLS)算法和文献[8]中关联后验迭代最小二乘(简称关联后验ILS)算法进行比较。仿真结果见图4。

由图4可知，本文提出的关联后验CTLS算法定位精度可逼近CRLB，在噪声分量统计相关时克服两步加权WLS不能达到最优解的问题。比较3种不同估计算法下的目标定位精度，根据图4的结果得到：本文提出的关联后验CTLS算法定位精度优于关联后验迭代最小二乘算法和两步加权最小二乘算法。关联后验关联后验迭代最小二乘算法在两步加权最小二乘算法基础上通过后验迭代提高了目标位置的估计精度，但对系统偏差值估计影响较小。本文提出的关联后验CTLS算法考虑了量测噪声结构化和相关性，定位精度显著提高。

为了进一步分析量测噪声对本文提出的关联后验CTLS算法对定位误差的影响，考虑不同到达时差量测噪声与不同方位角量测噪声下的不同目标的位置估计均方误差。设置方位角的量测标准差 $\sigma_\theta$ 为 $10^{-6} \sim 0.1$  rad；到达时差的测量标准差 $\sigma_\tau$ 设置为 $10^{-5} \sim 10^5$  ns，仿真结果如图5和图6所示。

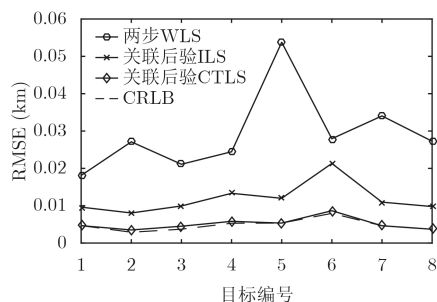


图4 目标位置估计均方根误差比较图

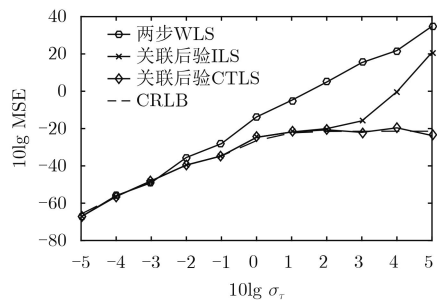


图5 不同到达时差量测方差下目标位置估计误差

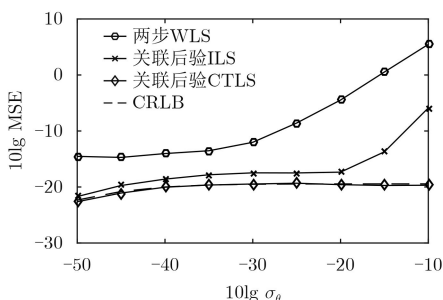


图6 不同方位角量测方差下目标位置估计误差

图5和图6分别给出了3种算法在不同到达时差量测噪声与不同方位角量测噪声下目标的位置估计均方误差。从图中可以看出，随着测量误差的增加，各算法的均方误差都有所增加。当测量误差较大时，两步加权最小二乘算法的均方误差急剧上升，主要是由于迭代初始值偏离真实值较远，导致算法局部收敛，甚至发散。关联后验迭代最小二乘算法在测量误差较大时性能优于两步加权最小二乘算法，设计后验迭代进一步校正，提高了目标位置估计精度。本文提出的关联后验CTLS算法克服了上述两种算法在噪声分量统计相关时不能达到最优的不足，在测量噪声适中时可以达到CRLB。在量测误差较大时，关联后验CTLS算法明显优于两步加权最小二乘算法和关联后验迭代最小二乘算法，具有更准确且鲁棒性好的定位精度。

## 5 结束语

本文研究了误差校正下外辐射源雷达无源定位问题，提出了一种基于CTLS的单站DOA/TDOA

联合误差校正和定位算法。通过引入辅助变量, 将非线性的DOA和TDOA量测方程变成伪线性定位方程。考虑伪线性化后量测噪声结构化和相关性, 采用CTLS算法得到目标位置的高精度估计。在此基础上利用辅助变量与目标位置的关联性, 设计关联最小二乘算法对CTLS算法估计值进一步改进。最后, 将系统偏差估计值带入量测方程进行校正, 通过后验迭代, 获得校正下目标位置估计。仿真结果表明: 本文提出的关联后验CTLS算法在测量噪声适中时可以达到CRLB。在量测误差较大时, 关联后验CTLS算法明显优于两步WLS算法和关联后验迭代最小二乘算法, 具有更准确且鲁棒性好的定位精度。本文研究的误差校正下的无源定位算法未考虑多目标数据关联, 系统偏差的数据关联和校正也是下一步需要研究的工作。

### 参考文献

- [1] LIU Jun, LI Hongbin, and HIMED B. On the performance of the cross-correlation detector for passive radar applications[J]. *Signal Processing*, 2015, 113: 32–37. doi: [10.1016/j.sigpro.2015.01.006](https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.01.006).
- [2] INGGS M, TONG C, NADJIASNGAR R, et al. Planning and design phases of a commensal radar system in the FM broadcast band[J]. *IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine*, 2014, 29(7): 50–63. doi: [10.1109/MAES.2014.130165](https://doi.org/10.1109/MAES.2014.130165).
- [3] GASSIER G, CHABRIEL G, BARRÈRE J, et al. A unifying approach for disturbance cancellation and target detection in passive radar using OFDM[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(22): 5959–5971. doi: [10.1109/TSP.2016.2600511](https://doi.org/10.1109/TSP.2016.2600511).
- [4] CHOI S, CROUSE D, WILLETT P, et al. Multistatic target tracking for passive radar in a DAB/DVB network: initiation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(3): 2460–2469. doi: [10.1109/TAES.2015.130270](https://doi.org/10.1109/TAES.2015.130270).
- [5] NOROOZI A and SEBT M A. Target localization in multistatic passive radar using SVD approach for eliminating the nuisance parameters[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2017, 53(4): 1660–1671. doi: [10.1109/TAES.2017.2669558](https://doi.org/10.1109/TAES.2017.2669558).
- [6] 赵拥军, 赵勇胜, 赵闯. 基于正则化约束总体最小二乘的单站DOA-TDOA无源定位算法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(9): 2336–2343. doi: [10.11999/JEIT151379](https://doi.org/10.11999/JEIT151379).  
ZHAO Yongjun, ZHAO Yongsheng, and ZHAO Chuang. Single-observer passive DOA-TDOA location based on regularized constrained total least squares[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(9): 2336–2343. doi: [10.11999/JEIT151379](https://doi.org/10.11999/JEIT151379).
- [7] 王鼎, 魏帅. 基于外辐射源的约束总体最小二乘定位算法及其理论性能分析[J]. *中国科学: 信息科学*, 2015, 45(11): 1466–1489. doi: [10.1360/N112014-00397](https://doi.org/10.1360/N112014-00397).  
WANG Ding and WEI Shuai. The constrained-total-least-squares localization algorithm and performance analysis based on an external illuminator[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2015, 45(11): 1466–1489. doi: [10.1360/N112014-00397](https://doi.org/10.1360/N112014-00397).
- [8] YI Jianxin, WAN Xianrong, LEUNG H, et al. Noncooperative registration for multistatic passive radars[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(2): 563–575. doi: [10.1109/TAES.2015.140786](https://doi.org/10.1109/TAES.2015.140786).
- [9] JEAN O and WEISS A J. Passive localization and synchronization using arbitrary signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(8): 2143–2150. doi: [10.1109/TSP.2014.2307281](https://doi.org/10.1109/TSP.2014.2307281).
- [10] 田强, 冯大政, 杨凡, 等. 基于线性校正的TOA联合同步与定位算法[J]. *系统工程与电子技术*, 2018, 40(2): 245–249. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.01](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.01).  
TIAN Qiang, FENG Dazheng, YANG Fan, et al. Joint TOA-based synchronization and localization via linear-correction technique[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2018, 40(2): 245–249. doi: [10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.01](https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-506X.2018.02.01).
- [11] WAN Xianrong, YI Jianxin, ZHAO Zhixin, et al. Experimental research for CMMB-based passive radar under a multipath environment[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, 50(1): 70–85. doi: [10.1109/TAES.2013.120737](https://doi.org/10.1109/TAES.2013.120737).
- [12] ZHOU Yifeng, LEUNG H, and YIP P C. An exact maximum likelihood registration algorithm for data fusion[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(6): 1560–1573. doi: [10.1109/78.599998](https://doi.org/10.1109/78.599998).
- [13] FORTUNATI S, GINI F, FARINA A, et al. On the application of the expectation-maximisation algorithm to the relative sensor registration problem[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2013, 7(2): 191–203. doi: [10.1049/iet-rsn.2012.0050](https://doi.org/10.1049/iet-rsn.2012.0050).
- [14] FORTUNATI S, FARINA A, GINI F, et al. Least squares estimation and Cramér-Rao type lower bounds for relative sensor registration process[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(3): 1075–1087. doi: [10.1109/TSP.2010.2097258](https://doi.org/10.1109/TSP.2010.2097258).
- [15] WANG Yue and HO K C. TDOA source localization in the presence of synchronization clock bias and sensor position errors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(18): 4532–4544. doi: [10.1109/TSP.2013.2271750](https://doi.org/10.1109/TSP.2013.2271750).
- [16] 孙顺, 董凯, 齐林, 等. 基于TDOA与GROA的多运动站误差配准算法[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(6): 1439–1445. doi: [10.11999/JEIT160562](https://doi.org/10.11999/JEIT160562).  
SUN Shun, DONG Kai, QI Lin, et al. Multiple moving observers registration algorithm based on TDOA and GROA[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(6): 1439–1445. doi: [10.11999/JEIT160562](https://doi.org/10.11999/JEIT160562).

左燕: 女, 1980年生, 博士, 副教授, 研究方向为无源定位、智能信息处理和信息融合。

陈志猛: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为无源定位。

蔡立平: 男, 1994年生, 硕士生, 研究方向为无源定位。