

## 变换光学中的几个数学问题分析及其在隐身毯设计中的应用

张鹏飞\* 王树 李盼

(西安电子科技大学天线与微波技术重点实验室 西安 710071)

**摘要:** 变换光学(TO)是目前电磁领域的一个研究热点, 为了对基于TO的隐身斗篷设计提供更深入的理论支持, 该文对TO的3个基本数学问题进行了讨论。首先分析了基于Maxwell方程组3维坐标变换下变换形式的唯一性问题, 提出了不同于参考文献的新变换方式, 指出了可以灵活调整变换空间特性阻抗的变换方法。以此为基础, 提出了以自由空间的场分布为原始空间, 通过变换获取到可以隐藏在介质包围区域中并和介质阻抗匹配的隐身斗篷设计方法。然后以基于波动方程的2维TO为研究对象, 分析了以电场分量波动方程为基础进行2维变换时, 磁场所满足的变换关系和对应的边界条件特性, 同样指出了可以隐藏在介质包围区域中并和介质阻抗匹配的隐身斗篷设计方法。最后从数学上证明了2维变换下共形变换对于设计出非各向异性介质隐身斗篷的充分必要性。以上述讨论为基础, 该文给出了一个嵌入式斗篷的仿真验证示例。该文的研究内容和结论对基于TO的各种电磁应用提供了理论支持。

**关键词:** 变换光学; 隐身地毯斗篷; 共形变换

中图分类号: TN011

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2019)06-1336-08

DOI: [10.11999/JEIT180247](https://doi.org/10.11999/JEIT180247)

## Analysis of Some Mathematical Questions of Transformation Optics and Its Application to Stealth Carpet Design

ZHANG Pengfei WANG Shu LI Pan

(Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** Transformation Optics (TO) is a hot topic in the research area of electrical-magnetic fields. For providing further theoretical support to the design of stealth carpet based on TO, three basic mathematic problems of TO are discussed in this paper. Firstly, the uniqueness of transformation form in three-dimensional transformation of Maxwell's equations is analyzed. A new transformation model is proposed, which is different from the classical one shown in reference. The new model also leads to a new transformation method that can generate flexible characteristic impedance in transformation space. Based on this, a design method of stealth cloak or carpet that can be used to hide the target in an area surrounded by medium with given permittivity is discussed. During this process, only the field distribution in free space is required as the original field during mapping. Secondly, the two-dimensional transformation of the wave equation is studied. The transformation of the magnetic field component in the two-dimensional transformation based on the wave equation of the electric field component is analyzed. The boundary matching during transformation is also discussed. The two dimension design method of stealth cloak or carpet that can be used to hide a target in an area surrounded by medium with specified permittivity is also discussed. Finally, the sufficiency and necessity of conformal transformation for designing a two dimension stealth cloak with non-uniform and anisotropic medium are proved strictly. The simulation results of a stealth carpet embedded in material are given to verify the proposed method. The analysis and the related conclusion presented in the paper provide theoretical support to the related application based on TO.

**Key words:** Transformation Optics(TO); Stealth carpet cloak; Conformal transformation

### 1 引言

2006年, 文献[1]和文献[2]各自提出了一种能操

纵电磁波传播路径的隐身斗篷设计方法。该方法基于Maxwell方程组在直线和曲线坐标系变换下的形式不变性, 将坐标变换和介质变换进行关联, 形成了变换光学理论(Transform Optics, TO)。此后不久, Cummer等人[3]用有限元仿真软件COMSOL

Multiphysics对隐身斗篷做了全波仿真验证。该理论的创新性和基于超材料实现的可行性前景, 立刻引发了人们对于隐身斗篷的研究热潮, 进而将该理论迅速向前推进, 出现了欺骗光学<sup>[4]</sup>、隐身地毯<sup>[5,6]</sup>等各种变形, 并被用于各种电磁设计中, 如基于变换光学的透镜设计<sup>[7-9]</sup>、波束控制设计<sup>[10]</sup>、高增益天线设计<sup>[11]</sup>、超级波导设计<sup>[12]</sup>等。进一步, 为了避免文献[1]中电磁斗篷的非均匀各向异性并可以物理实现, 人们提出了简化参数隐身斗篷。Schurig等人<sup>[13]</sup>通过简化材料参数在微波波段制作了10层SRR同心圆柱结构。Popa等人<sup>[14]</sup>和Xi等人<sup>[15]</sup>分别独立提出了基于优化算法的多层各向异性材料隐身斗篷。此外, 椭圆形<sup>[16]</sup>, 任意形状<sup>[17]</sup>的隐身斗篷都被相继提出。

上述隐身斗篷都是基于3维Maxwell方程的变换性。与之相对应, Li和Pendry<sup>[5]</sup>基于波动方程的变换性提出了采用不封闭遮盖物来实现半空间隐身的2维地毯隐身斗篷。该方法通过共形映射实现了非各向异性介质隐身地毯斗篷设计。文献[18]在微波波段验证了该隐身毯。

但需要强调的是, 一方面, 在3维TO变换中, 文献[1]对两个空间的电场和磁场采用了完全相同的变换方式:  $\mathbf{E}' = [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}' = [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{H}$ , 其中 $[\mathbf{A}^{-1}]$ 为映射变换的雅可比矩阵, 而后续文献均是采用相同的方法进行处理。因此从数学的角度上来讲, 存在如下不确定性: 是否存在其他的变换关系来保持Maxwell方程的变换不变性。另一方面, 在2维TO变换中, 文献[18]已经验证基于共形变换可以使基于TO的变换不产生各向异性的媒质。从数学的角度上同样存在如下不确定性: 是否存在其他的变换关系可以达到同样的结果, 或者说这种共形变换是不是充分条件的同时也是必要条件。

本文以这些涉及“唯一性”的问题为出发点, 对基于Maxwell方程组和波动方程的变换光学进行研究。首先分析了基于Maxwell方程组的3维变换电磁学中变换形式的唯一性问题, 提出了不同于经典参考文献的新变换方式, 指出了可以灵活调整变换空间边界特性阻抗的变换方法。以此为基础, 给出了以自由空间的场分布为原空间, 通过变换获取可以隐藏在介质包围区域中并和任意介质阻抗匹配的隐身斗篷设计方法。随后本文以电场分量波动方程的2维变换为研究对象, 分析了以电场分量波动方程为基础进行2维变换时, 磁场所满足的变换关系, 并讨论了对应的边界匹配问题, 同样指出了可以隐藏在介质包围区域中并和任意介质阻抗匹配的2维隐身斗篷设计方法。接着证明了2维变换下共形变换对于设计出非均匀非各向异性介质隐身斗篷的

充要性。进一步, 本文给出了一个嵌入式斗篷仿真验证示例。最后总结全文。

## 2 基于Maxwell方程组映射的变换和嵌入式隐身斗篷设计

如文献[1]所述的那样, 通过对Maxwell方程组在同一空间直角和曲线坐标系下的转换, 并将曲线坐标系的转换结果与另一空间的直角坐标系产生数学上的对等, 就可以将一个空间与另一个映射空间的源、媒质和场关联, 从中获得的变换光学的基本结论如图1。

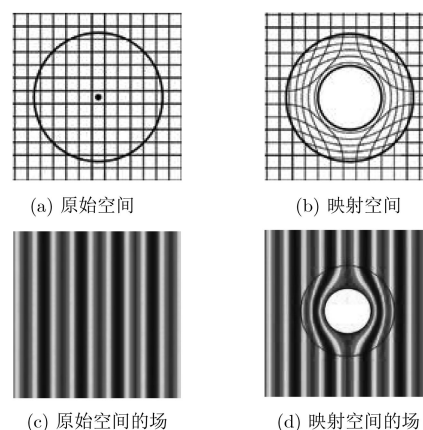


图1 隐身斗篷示意图

如图1所示, 假设原空间图1(a)的坐标为 $(x, y, z)$ , 映射空间图1(b)的坐标为 $(x', y', z')$ 。(本文中所有原空间和映射空间的几何量和物理量以带不带“'”号进行区分。)这两者若满足一一映射关系, 该映射的雅可比矩阵可以表示为

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$[\mathbf{A}^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix}$$

当两者的源和介质满足式(2)的映射关系时

$$\left. \begin{aligned} \epsilon' &= [\mathbf{A}] [\epsilon] [\mathbf{A}]^T / |\det [\mathbf{A}]| \\ \mu' &= [\mathbf{A}] [\mu] [\mathbf{A}]^T / |\det [\mathbf{A}]| \\ \mathbf{J}' &= [\mathbf{A}] \mathbf{J} / |\det [\mathbf{A}]| \\ \rho' &= \rho / |\det [\mathbf{A}]| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

两个空间的场满足形式上完全相同的Maxwell方程组

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\partial \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mu \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{H}' &= \frac{\partial \varepsilon' \mathbf{E}'}{\partial t} + \mathbf{J}' \\ \nabla' \times \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mu' \mathbf{H}'}{\partial t} \\ \nabla' \cdot \mathbf{D}' &= \rho' \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对应的电磁场的解满足如式(4)的映射关系

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{E}, & \mathbf{D}' &= [\mathbf{A}] \mathbf{D} / |\det [\mathbf{A}]| \\ \mathbf{H}' &= [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{H}, & \mathbf{B}' &= [\mathbf{A}] \mathbf{B} / |\det [\mathbf{A}]| \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

以此为基础可以进行隐身斗篷的设计。如图1所示,若将图1(a)原自由空间中的一个圆形区域通过参数变换映射到图1(b)中的一个环形区域,则图1(c)原空间的圆形区域的场就会被映射到图1(d)的环形区域中,对图1(d)而言,就会出现电磁波绕过环形区域内部空白区的情形,对于环形区域外部的观测者来说,图1(d)的环形区域内部的目标对电波传播不产生任何影响,无法分辨图1(c)与图1(d)的区

别。由于图1(c)本身是自由空间,所以图1(d)环形区域的媒质构成了对内部空白区域的“隐身斗篷”。

边界的匹配是隐身斗篷设计中的重点,必须保证变换空间的网格趋向于未变换空间的网格,如图1(b)那样与后者平滑连接。此时变换边界的阻抗满足边界匹配条件

$$\eta' = \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \rightarrow \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 \quad (5)$$

如本文引言中所提的那样,到目前为止,各种文献一直沿用上述由文献[1]提出的映射方式。下面分析这种映射方式是否唯一。做如下的假设:如果对图1(b)中的环形区域不填充式(2)中媒质和源,而是填充如式(6)所示的媒质和源

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' &= \varepsilon' \zeta / \xi \\ \mu'' &= \mu' \zeta / \xi \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \mathbf{J}'' &= \mathbf{J}' / \zeta \\ \rho'' &= \rho' / \zeta \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

令

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}' / \zeta \\ \mathbf{H}'' &= \mathbf{H}' / \xi \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \mathbf{D}'' &= \mathbf{D}' / \xi \\ \mathbf{B}'' &= \mathbf{B}' / \zeta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将上述关系代入式(4)中,可以得到

$$\left. \begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{H}' &= \frac{\partial \varepsilon' \mathbf{E}'}{\partial t} + \mathbf{J}' \\ \nabla' \times \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mu' \mathbf{H}'}{\partial t} \\ \nabla' \cdot \mathbf{D}' &= \rho' \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{H}' / \xi &= \frac{\partial \varepsilon' \frac{\zeta}{\xi} \frac{\mathbf{E}'}{\zeta}}{\partial t} + \mathbf{J}' / \xi \\ \nabla' \times \mathbf{E}' / \zeta &= -\frac{\partial \mu' \frac{\xi}{\zeta} \frac{\mathbf{H}'}{\xi}}{\partial t} \\ \nabla' \cdot \mathbf{D}' / \xi &= \rho' / \xi \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}' / \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \nabla' \times \mathbf{H}'' &= \frac{\partial \varepsilon'' \mathbf{E}''}{\partial t} + \mathbf{J}'' \\ \nabla' \times \mathbf{E}'' &= -\frac{\partial \mu'' \mathbf{H}''}{\partial t} \\ \nabla' \cdot \mathbf{D}'' &= \rho'' \\ \nabla' \cdot \mathbf{B}'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

可以看出 $\varepsilon''$ ,  $\mu''$ ,  $\rho''$ ,  $\mathbf{J}''$ ,  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ ,  $\mathbf{D}''$ ,  $\mathbf{B}''$ 和式(3)满足完全相同的形式,  $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ ,  $\mathbf{D}''$ ,  $\mathbf{B}''$ 就是 $\varepsilon''$ ,  $\mu''$ ,  $\rho''$ ,  $\mathbf{J}''$ 所产生的场。若将其视做一个新空间的媒质和场,则这个源和场与原空间的源和场满足如式(9)的映射关系

$$\left. \begin{aligned} [\varepsilon''] &= \frac{\zeta}{\xi} [\mathbf{A}] [\varepsilon] [\mathbf{A}]^T / |\det [\mathbf{A}]| \\ [\mu''] &= \frac{\xi}{\zeta} [\mathbf{A}] [\mu] [\mathbf{A}]^T / |\det [\mathbf{A}]| \\ \mathbf{J}'' &= \frac{1}{\xi} [\mathbf{A}] \mathbf{J} / |\det [\mathbf{A}]| \\ \rho'' &= \frac{1}{\xi} \rho / |\det [\mathbf{A}]| \end{aligned} \right\}, \left. \begin{aligned} \mathbf{E}'' &= \frac{1}{\zeta} [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{E} \\ \mathbf{H}'' &= \frac{1}{\xi} [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{H} \\ \mathbf{D}'' &= \frac{1}{\xi} [\mathbf{A}] \mathbf{D} / |\det [\mathbf{A}]| \\ \mathbf{B}'' &= \frac{1}{\zeta} [\mathbf{A}] \mathbf{B} / |\det [\mathbf{A}]| \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

这样,本文就建立了一个不同于文献[1]的另一组映射关系。与原映射关系不同的是,此时再考虑式(5),会发现此时的特性阻抗变成

$$\eta'' = \sqrt{\frac{\mu''}{\varepsilon''}} = \frac{\xi}{\zeta} \eta' = \frac{\xi}{\zeta} \sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}} \rightarrow \frac{\xi}{\zeta} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{\xi}{\zeta} \eta_0 \quad (10)$$

式(10)对应的映射空间的阻抗在变换边界上与原空间的特性阻抗不再一致。并且,由于 $\zeta$ ,  $\xi$ 是两个独立变换系数,因此采用不同的选择可以获得任意的变换后阻抗特性。同时,观察到:  $\mathbf{E}'' / \mathbf{H}'' = \xi \mathbf{E}' / \zeta \mathbf{H}'$ ,若 $\mathbf{E}'$ ,  $\mathbf{H}'$ 与自由空间对应,则 $\mathbf{E}''$ ,  $\mathbf{H}''$ 与 $\xi \eta_0 / \zeta$ 的空间场对应,因此可以与 $\xi \eta_0 / \zeta$ 的空间进行匹配。

以此为基础, 下面分析一种以自由空间的电磁分布为原空间和场, 映射设计出可以嵌入到具有任意特性阻抗的媒质中的隐身斗篷。例如, 将一枚梅花形目标隐藏到矩形肥皂形媒质中就可以采用图2方式进行设计。

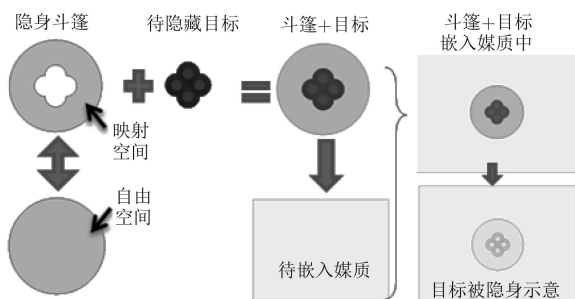


图2 嵌入式隐身斗篷示意图

如图2所示, 首先要明确待隐藏目标外形尺寸和待嵌入媒质的特性阻抗; 然后选择合适的既可以包藏目标又可以嵌入媒质的隐身斗篷外围边界。此边界包含的自由空间构成原空间。以待隐藏目标的外轮廓为内边界, 以上述隐身斗篷外围边界为外边界, 两者围成的区域构成映射空间。然后, 通过类似文献[17]的空间变换方法可以建立空间之间的映射关系, 并借助式(2)形成可嵌入自由空间的斗篷。进一步通过利用式(6)结合 $\zeta, \xi$ 的选择, 就可以建立具有指定阻抗边界的斗篷, 进而嵌入到的媒质中。如果外围媒质是分段的, 那么也可以结合网格的变换和 $\zeta, \xi$ 的分区域选择拟和对应的边界阻抗以满足匹配。上述的方法也可以推广应用到后续的2维映射情形。

### 3 波动方程2维共形映射中的数学问题讨论

为了设计非各向异性介质隐身毯, 文献[18]从波动方程的2维变换出发, 获得了在共形变换条件下的非各向异性隐身毯设计方法。其基本结论是建立在下列的4个基本前提条件上:

(1) 讨论区域为无源区域, 电场仅包含1个分量, 如 $\mathbf{E}=\hat{z}E_z$ ; 则空间波动方程为

$$\nabla^2 E_z + \omega^2 \mu_0 \varepsilon E_z = 0 \quad (11)$$

(2) 空间的磁导率均匀一致, 为 $\mu_0$ ;

(3) 原空间 $(x, y)$ 和映射空间 $(x', y')$ 具有共形映射关系, 采用复平面可以表述为 $\omega'(x', y') = \omega'(\omega) = x'(x, y) + jy'(x, y), \omega = x + jy$ 。满足柯西黎曼条件

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y} \quad (12)$$

(4) 所研究的为2维无源映射, 即认为场和媒质在 $z$ 方向无限延伸, 且为无源媒质。

此时将式(11)中的哈密顿算子展开, 并引入相互的微分关系和柯西黎曼条件可以获得 $(x', y')$ 坐标系满足的波动方程

$$\nabla'^2 E'_z + \omega^2 \mu_0 \left| \frac{d\omega'}{d\omega} \right|^{-2} \varepsilon E'_z = 0 \quad (13)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega'}{d\omega} &= \frac{\partial x'}{\partial x} + j \frac{\partial y'}{\partial x} \\ &= \frac{\partial y'}{\partial y} - j \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \left| \frac{d\omega'}{d\omega} \right|^2 &= \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

因此, 若对映射空间填充如式(15)的材料

$$\varepsilon'(x', y') = \left| \frac{d\omega'}{d\omega} \right|^{-2} \varepsilon(x, y) \quad (15)$$

则映射空间的场满足式(16)的波动方程

$$\nabla'^2 E'_z + \omega^2 \mu_0 \varepsilon' E'_z = 0 \quad (16)$$

由方程在数学上的映射关系, 可知原空间和映射空间的电场分量满足如式(17)的映射关系

$$E'_z(x', y') = E_z(x, y) \quad (17)$$

以上述关系为基础, 可按照和图1相似的方法结合式(15)构建2维隐身毯。

这里本文进一步讨论如前所示的在其他参考文献中未予考虑的两个数学问题。

#### 3.1 关于磁场的映射

从上述推导可以看出, 该类方法从以 $E_z$ 为未知量的波动方程的映射推导获得。现有文献未对此方法构建的映射关系中的磁场进行讨论。下面本文分析以式(15)的方式构建的映射空间中的磁场 $\mathbf{H}'(x', y')$ 和原空间磁场 $\mathbf{H}(x, y)$ 之间的关系。

结合电磁感应定理以及 $\mathbf{E}' = E'_z(x', y')\hat{z}$ , 映射空间的磁场为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}' &= (-1/j\omega\mu_0)\nabla' \times \mathbf{E}' \\ &= (-1/j\omega\mu_0) \left( -\hat{x}' \frac{\partial E'_z}{\partial y'} + \hat{y}' \frac{\partial E'_z}{\partial x'} \right) \\ &= \hat{x}' H'_x + \hat{y}' H'_y \end{aligned} \quad (18)$$

即

$$\begin{aligned} H'_x &= -(-1/j\omega\mu_0) \frac{\partial E'_z}{\partial y'}, \\ H'_y &= (-1/j\omega\mu_0) \frac{\partial E'_z}{\partial x'} \end{aligned} \quad (19)$$

采用相同的方法可以得到原空间的磁场为

$$H_x = -(-1/j\omega\mu_0) \frac{\partial E_z}{\partial y}, H_y = (-1/j\omega\mu_0) \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial x} &= \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial y} &= \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E'_z(x', y')}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} = \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

将式(21)代入到式(19)和式(20)可得

$$\begin{aligned} H_x &= H'_x \frac{\partial y'}{\partial y} - H'_y \frac{\partial x'}{\partial y}, \\ H_y &= -H'_x \frac{\partial y'}{\partial x} + H'_y \frac{\partial x'}{\partial x} \end{aligned} \quad (22)$$

考虑到  $\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{\partial x'}{\partial y}$ , 式(22)可写为

$$\begin{aligned} H_x &= H'_x \frac{\partial x'}{\partial x} + H'_y \frac{\partial y'}{\partial x}, \\ H_y &= H'_x \frac{\partial x'}{\partial y} + H'_y \frac{\partial y'}{\partial y} \end{aligned} \quad (23)$$

考虑到

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(23)可以写为

$$\mathbf{H} = [\mathbf{A}]^T \mathbf{H}', \mathbf{H}' = [\mathbf{A}^{-1}]^T \mathbf{H} \quad (25)$$

这就是基于以  $E_z$  为未知量的波动方程的TO变换中的磁场的映射关系。

对于2维光学变换, 同样需要考虑边界的匹配问题。如图1或图2所示, 被隐藏目标和斗篷构成的区域嵌入原有的自由空间。只有在边界上保持阻抗的匹配, 才能达到隐身的效果。

由于上述的2维映射过程中磁导率并未做任何改变, 所以在边界上的阻抗能否匹配取决于在边界上由式(14)决定的特性阻抗能否趋向于自由空间的特性阻抗, 即式(26)的条件是否成立

$$\eta'_b = \sqrt{\mu_0/\varepsilon'(x', y')} = \left| \frac{d\omega'}{d\omega} \right| \eta_0 \rightarrow \eta_0 \quad (26)$$

本质上这就是要求  $|d\omega'/d\omega|_b \rightarrow 1$ , 或者说在边界上映射空间的网格趋于原空间的网格。这也是现有文献中不得不采用尺寸远大于隐藏目标的区域来构建隐身毯以使边界上的网格变形非常微弱, 阻抗趋于和原空间匹配的原因。如果通过网格的变换, 使得在边界上

下面分析映射空间和原空间的磁场强度, 即式(19)和式(20)的关系, 对电场变换关系  $E'_z(x', y') = E_z(x, y)$  的两边同时对  $x$  或  $y$  求导, 可得

$$\eta'_b = \sqrt{\mu_0/\varepsilon'(x', y')} = \left| \frac{d\omega'}{d\omega} \right| \eta_0 \rightarrow \xi \eta_0 \quad (27)$$

即

$$|d\omega'/d\omega|_b \rightarrow \xi \quad (28)$$

则这样的斗篷和隐身目标同样可以按照如图2所示的方式嵌入具有  $\varepsilon = \xi^2 \varepsilon_0$ ,  $\eta = \xi \eta_0$  的媒质当中。

需要强调的是, 文献[18]中的隐身斗篷为了避免变换后的介电常数小于1的区域过大, 采用全空间填充介质作为原空间。而本文所论述的方法中原空间是自由空间, 同样是通过数学机理的变化来形成可以嵌入有限大小媒质的一种应用策略, 但两者的理论过程不同。本文所提的应用场景也不要求全空间填充媒质。

### 3.2 共形映射的必要性

从上述分析可以看出, 共形变换是进行基于波动方程的场映射的充分条件。下面分析共形映射是否是进行波动方程变换的必要条件。

从复变函数的角度来讲, 当2维映射不是共形变换时, 上面推导中用到的  $d\omega'/d\omega$  将失去意义。因此这里不能沿用复变函数的工具进行分析, 而要退回波动方程。从波动方程式(12)~式(14)的映射推导过程可以看出若需要从波动方程出发进行媒质变换,  $\nabla^2$  和  $\nabla'^2$  之间必须满足仅相差1个因子的关系, 否则无法构造出形式相同的波动方程。

分析哈密顿算子在  $x' = x'(x, y)$ ;  $y = y'(x, y)$  变化下的相互关系(为简化公式, 采用类似  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\partial'_x = \frac{\partial x'}{\partial x}$  的简记方式):

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \partial_x \partial_x + \partial_y \partial_y \\ &= \partial_x \left( \partial_x \partial'_x + \partial_y \partial'_y \right) \\ &\quad + \partial_y \left( \partial_x \partial'_y + \partial_y \partial'_y \right) \\ &= \partial_x \partial'_x \left[ \left( \partial'_x \right)^2 + \left( \partial'_y \right)^2 \right] \\ &\quad + \partial_y \partial'_y \left[ \left( \partial'_x \right)^2 + \left( \partial'_y \right)^2 \right] \\ &\quad + 2\partial_x \partial'_y \left[ \partial'_x \partial'_y + \partial'_y \partial'_y \right] \end{aligned} \quad (29)$$

考虑到 $\nabla'^2 = \partial_{x'}\partial_{x'} + \partial_{y'}\partial_{y'}$ ，若 $\nabla^2$ 和 $\nabla'^2$ 之间满足仅相差一个因子的关系，进而可以形成变换而保持波动方程形式不变，则需要满足

$$\left. \begin{aligned} \left[ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 \right] &= \left[ \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \left[ \partial_{x'}\partial_{x'} + \partial_{y'}\partial_{y'} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

将 $\left[ \partial_{x'}\partial_{x'} + \partial_{y'}\partial_{y'} \right] = 0$  写为  $\partial_{x'} = - \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} \right) / \partial_{x'}$ ，代入 $\left[ \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 \right] = \left[ \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 \right]$ ，有

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 &= \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial x'}{\partial y} \right)^2 &= \left( \frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

将式(31)代入式(30)，有

$$\left( \frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 = \left( \frac{\partial y'}{\partial y} \right)^2 \quad (32)$$

可以看出，解有两组

$$\left. \begin{aligned} \text{A: } \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = - \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \text{B: } \frac{\partial x'}{\partial x} &= - \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

B组映射可以视作是A组映射关于 $x'$ 坐标的对称翻转。由于变换是在整个空间进行，这样的对称翻转仅相当于在新坐标系中的虚轴的定义发生变化。因此两者对应的是同一个变换。这样一来，A组条件正好是柯西黎曼条件，对应为共形映射。即如果想基于波动方程寻求严格的基于纯介质的场变换映射，共形映射是其充分必要条件。到此为止

本文完成了对基于共形2维映射中磁场映射关系和共形约束必要性的证明。

### 4 嵌入式隐身毯仿真分析

最后，本文给出一个简单的2维仿真示例来说明嵌入式隐身毯的设计和隐身作用。

选择如图3(a)所示的长宽分别为37.5 m和16.3 m的矩形空间作为原空间。如图3(b)所示，如果在该空间的底部，引入一个凸起的空间，其外轮廓由3段曲线和底部直线围成。

将如图3(a)和图3(b)所示空间作为原始空间和映射空间。将图3(b)边界采用一定精度离散后可以等效为多边形。则该多边形边界和原矩形边界各自合围的区域可以采用式(34)所示的Schwarz-Christoffel变换<sup>[19]</sup>构成共形映射。

$$\omega = C \int_{\omega'_0}^{\omega'} \prod_{n=1}^N (\omega' - x_n)^{\alpha_n - 1} d\omega' + C_1 \quad (34)$$

其中， $\alpha_n$ 是多边形各个顶点对应的内角与 $\pi$ 的比值， $x_n$ 为映射空间多边形各个顶点映射到原空间实轴上的坐标(需要采用迭代算法计算)， $C_1$ 为常数。经过基于式(34)的计算，网格映射关系见图3(a)和图3(b)。

在构造出上述映射变换后，如果原空间视作自由空间，即 $\epsilon(x, y) = \epsilon_0$ ，基于式(34)和式(15)可以计算出所需填充媒质的相对介电常数 $\epsilon'(x', y')$ 如图3(c)所示，该介电常数分布被用于后续仿真计算。可以看出，最小的介电常数出现在斗篷内层边界网格面积最大的 $x = \pm 5$ 的处，最大的介电常数出现在斗篷内层边界网格面积最小的 $x = 0$ 处。斗篷区域的边界处介电常数已经接近于空气中的介电常数 $\epsilon_0$ ，近似与外界在交界处匹配。

本文对上述空间参数分布模型在COMSOL中

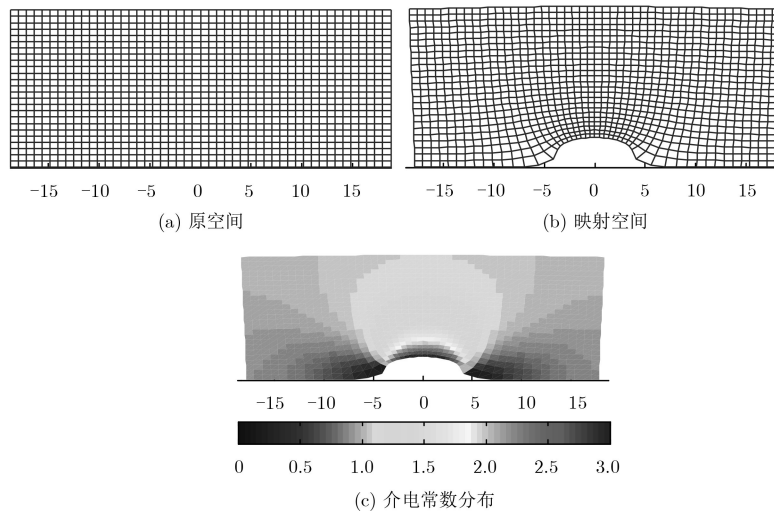


图3 原空间和映射空间及参数分布

进行仿真验证,并在上述的矩形变换区域外加入了自由空间模拟区域。如图4所示,仿真区域的总大小为 $56\text{ m} \times 56\text{ m}$ 。模型中的磁导率统一为 $\mu_0$ ,采用 $45^\circ$ 入射角、频率为 $0.1\text{ GHz}$ 的高斯波束照射。首先将下边界设为理想电导体(Perfect Electric Conductor, PEC),并将PEC上方空间设为自由空间。获得的场分布如图4(a)所示。然后将包含凸起物边沿的空间下边界设为PEC,并将该边界上方设置为自由空间,仿

真获得的场分布如图4(b)所示。可以看出凸起物对高斯波束产生了严重的散射。接着,保持上述设置不变,但将图3(c)所示的由式(34)和式(15)获取的变换空间介质参数填充在变换映射区域构成斗篷。仿真结果如图4(c)所示。可以看出,通过斗篷的引入,在矩形区域外的高斯波束传播与图4(a)几乎完全一致(事实上,如文献[18]所述的那样,存在一个不可避免的微小横向偏移),达到了预期的隐身效果。

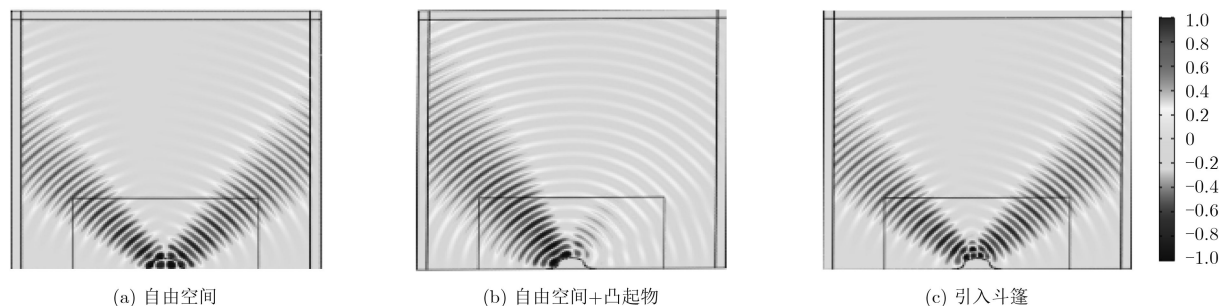


图4 隐身毯仿真分析

以上是针对自由空间中隐身毯的设计方法,下面将图4中的自由空间改为相对介电常数为 $\epsilon_r$ 的空间,形成嵌入式隐身毯。基于式(27),本文选择 $\xi=1/\sqrt{3}$ ,则 $\epsilon=\xi^{-2}\epsilon_0=3\epsilon_0$ ,故理论上基于式(28)设定的隐身毯可以嵌入 $\epsilon_r=3$ 的空间达到令凸起物隐身效果。图5(a)为填充了 $\epsilon_r=3$ 的空间,其结果与图

4(a)类似。图5(b)为填充了 $\epsilon_r=3$ 的空间并引入凸起的空间场分布,同样引起了严重的散射。图5(c)为引入隐身毯的仿真结果,可以看出在凸起物外部,其场分布与图5(a)基本一致,说明该隐身毯同样成功地实现了预期的隐身效果,验证了可嵌入媒质的隐身斗篷基本原理的正确性。

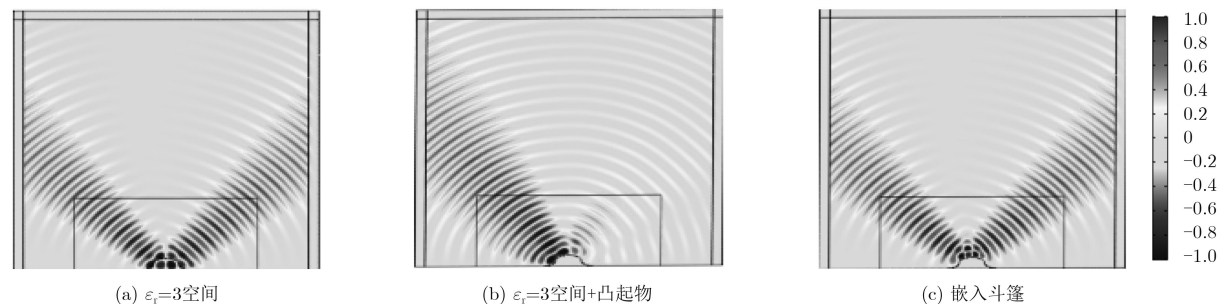


图5 嵌入式隐身毯仿真分析

## 5 结论

本文在对变换光学(TO)进行介绍的基础上引出了关于TO的几个数学问题,并进行了详细讨论:分析了基于Maxwell方程组变换中的变换方式唯一性问题,同步讨论了边界匹配问题,指出了可以灵活调整变换空间特性阻抗的变换方法。进一步,以基于电场分量波动方程的2维TO变换为研究对象,明确了在基于介电常数映射和电场映射条件下,磁场所满足的变换关系,并同步讨论了边界条件的变换关系。最后证明了2维变换下共形变换对于设计出非各向异性介质隐身斗篷的充要性。基于

上述分析,本文在3维和2维变换中均提出了一种可以嵌入具有特定阻抗边界的媒质之中的隐身斗篷设计方法,并用2维仿真对其进行了验证。本文的研究给出现有文献中未明确的几个数学问题的分析和论证结果,对于嵌入式隐身斗篷的设计及其他应用具有很好的理论参考价值和应用价值。

## 参考文献

- [1] PENDRY J B, SCHURIG D, and SMITH D R. Controlling electromagnetic fields[J]. *Science*, 2006, 312(5781): 1780–1782. doi: 10.1126/science.1125907.
- [2] LEONHARDT U. Optical conformal mapping[J]. *Science*,

- 2006, 312(5781): 1777–1780. doi: [10.1126/science.1126493](https://doi.org/10.1126/science.1126493).
- [3] CUMMER S A, POPA B I, SCHURIG D, *et al.* Full-wave simulations of electromagnetic cloaking structures[J]. *Physical Review E, Covering Statistical, Nonlinear, Biological, and Soft Matter Physics*, 2006, 74: 036621. doi: [10.1103/PhysRevE.74.036621](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.036621).
- [4] LAI Yun, NG J, CHEN Huanyang, *et al.* Illusion optics: The optical transformation of an object into another object[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(25): 253902. doi: [10.1103/PhysRevLett.102.253902](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.253902).
- [5] LI Jensen and PENDRY J B. Hiding under the carpet: A new strategy for cloaking[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 101(20): 203901. doi: [10.1103/PhysRevLett.101.203901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.203901).
- [6] KHOSRAVI S, ROSTAMI A, DOLATYARI M, *et al.* Broadband carpet cloak designed using nanocomposite metamaterials for 3-5- $\mu\text{m}$  wavelength range[J]. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 2017, 16(1): 44–48. doi: [10.1109/TNANO.2016.2625741](https://doi.org/10.1109/TNANO.2016.2625741).
- [7] EBRAHIMPOURI M and QUEVEDO-TERUEL O. Bespoke lenses based on quasi-conformal transformation optics technique[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2017, 65(5): 2256–2264. doi: [10.1109/TAP.2017.2679494](https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2679494).
- [8] YI Jianjia, BUROKUR S N, PIAU G P, *et al.* 3D printed broadband transformation optics based all-dielectric microwave lenses[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(4): 044010. doi: [10.1088/2040-8978/18/4/044010](https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/4/044010).
- [9] JIANG Weixiang, BAO Di, and CUI Tiejun. Designing novel anisotropic lenses with transformation optics[J]. *Journal of Optics*, 2016, 18(4): 044022. doi: [10.1088/2040-8978/18/4/044022](https://doi.org/10.1088/2040-8978/18/4/044022).
- [10] YI Jianjia, BUROKUR S N, PIAU G P, *et al.* Coherent beam control with an all-dielectric transformation optics based lens[J]. *Scientific Reports*, 2016, 6: 18819. doi: [10.1038/srep18819](https://doi.org/10.1038/srep18819).
- [11] AGHANEJAD I, ABIRI H, and YAHAGHI A. Design of high-gain lens antenna by gradient-index metamaterials using transformation optics[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(9): 4074–4081. doi: [10.1109/TAP.2012.2207051](https://doi.org/10.1109/TAP.2012.2207051).
- [12] MA Y G, WANG Ning, and ONG C K. Application of inverse, strict conformal transformation to design waveguide devices[J]. *Journal of the Optical Society of America A: Optics Image Science & Vision*, 2010, 27(5): 968–972. doi: [10.1364/JOSAA.27.000968](https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000968).
- [13] SCHURIG D, MOCK J J, JUSTICE B J, *et al.* Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies[J]. *Science*, 2006, 314(5801): 977–980. doi: [10.1126/science.1133628](https://doi.org/10.1126/science.1133628).
- [14] POPA B I and CUMMER S A. Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers[J]. *Physical Review A*, 2009, 79(2): 023806. doi: [10.1103/PhysRevA.79.023806](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.023806).
- [15] XI Sheng, CHEN Hongsheng, ZHANG Baile, *et al.* Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability[J]. *Physical Review B*, 2009, 79(15): 155122. doi: [10.1103/PhysRevB.79.155122](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.155122).
- [16] 李艳秀. 基于变换光学的新型电磁功能器件的研究与设计[D]. [博士学位论文], 山东大学, 2016.  
LI Yanxiu. Study and design of electromagnetic functional devices based on transformation optics method[D]. [Ph.D. dissertation], Shandong University, 2016.
- [17] JIANG Weixiang, CHIN J Y, LI Zhuo, *et al.* Analytical design of conformally invisible cloaks for arbitrarily shaped objects[J]. *Physical Review E, Covering Statistical, Nonlinear, Biological, and Soft Matter Physics*, 2008, 77(6): 066607. doi: [10.1103/PhysRevE.77.066607](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.77.066607).
- [18] LIU R, CUI Jiejun, MOCK J J, *et al.* Broadband ground-plane cloak[J]. *Science*, 2009, 323(5912): 366–369. doi: [10.1126/science.1166949](https://doi.org/10.1126/science.1166949).
- [19] DRISCOLL T A. Schwarz-christoffel toolbox user's guide version 2.1[EB/OL]. <https://www.doc88.com/p-1826946369203.html>, 2019.
- 张鹏飞: 男, 1979年生, 副教授, 研究方向为电磁理论、天线设计、基于新理论、新材料、新技术的高性能天线设计, 电磁隐身技术和介电测井技术等。
- 王 树: 男, 1993年生, 硕士生, 研究方向为隐身天线。
- 李 盼: 女, 1993年生, 硕士生, 研究方向为透镜天线。