

基于稀疏贝叶斯学习的网格自适应多源定位

游康勇^{①②} 杨立山^{①②} 刘玥良^① 郭文彬^{*①②} 王文博^①

^①(北京邮电大学信息与通信工程学院 北京 100876)

^②(通信网信息传输与分发技术重点实验室 石家庄 050000)

摘要: 多源定位是信号处理中的重要问题。该文针对目标偏离初始网格点引起的基不匹配问题, 构建具有Laplace先验的稀疏贝叶斯学习框架, 提出基于稀疏贝叶斯学习的网格自适应多源定位算法AGMTL。本质上, AGMTL实现了稀疏信号重建和网格自适应定位字典的学习。仿真结果表明, AGMTL通过网格自适应调整, 在定位误差, 估计可靠性, 抗噪性能上均远远优于传统的压缩感知定位算法。

关键词: 多源定位; 压缩感知; 网格自适应模型; 稀疏贝叶斯学习; Laplace先验

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2018)09-2150-08

DOI: 10.11999/JEIT171238

Adaptive Grid Multiple Sources Localization Based on Sparse Bayesian Learning

YOU Kangyong^{①②} YANG Lishan^{①②} LIU Yueliang^①

GUO Wenbin^{①②} WANG Wenbo^①

^①(School of Information and Communication Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

^②(Science and Technology on Information Transmission and Dissemination in Communication Networks Laboratory, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: Multiple sources localization is an issue of theoretical importance and practical significance in signal processing. The basis mismatch problem caused by target deviation from the initial grid point is addressed. Based on sparse Bayesian learning framework with Laplace prior, a novel iterative Adaptive Grid Multiple Targets Localization (AGMTL) algorithm is proposed to tackle the practical situation in which the targets deviates from the initial grid point. In essence, AGMTL algorithm implements sparse signal reconstruction and adaptive grid localization dictionary learning jointly. The simulation results show that AGMTL algorithm outperforms the traditional Compressive Sensing (CS) based localization algorithm in the terms of localization error, estimation reliability and noise robustness.

Key words: Multiple sources localization; Compressive Sensing (CS); Adaptive grid model; Sparse Bayesian learning; Laplace prior

1 引言

如何精确定位感知区域内的多个辐射源目标是信号处理中具有实际意义和挑战的问题。多源定位可以应用于诸多现实场景, 如室内定位^[1], 无线传

感器网络节点定位^[2], 失事飞行器黑匣子定位, 非法电台定位^[3]等。在缺乏复杂硬件设备且只能收集目标辐射强度信息的多源定位场景下, 经典的多源定位算法如到达时间差(TDOA), 到达时间(TOA), 到达角度(AOA)等算法失效。近年来, 压缩感知(Compressive Sensing, CS)^[4]理论的迅速发展为多源定位提供了一种全新的视角。通过对感知区域进行网格离散化, 源目标在网格化空间域中的稀疏性为在多源定位中应用压缩感知技术提供了可能。已有大量文献^[5-8]建立了基于压缩感知的多源定位模型, 但其均假设目标落在事先划分好的固定网格点上(on grid)。当目标偏离固定网格时(off grid), 基

收稿日期: 2017-12-28; 改回日期: 2018-05-23; 网络出版: 2018-07-12

*通信作者: 郭文彬 gwb@bupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61271181, 61571054), 通信网信息传输与分发技术重点实验室基金

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61271181, 61571054), The Science and Technology on Information Transmission and Dissemination in Communication Networks Laboratory Foundation

于固定网格划分的压缩感知多源定位算法定位性能大大降低。其本质原因在于固定网格构造的定位字典不能稀疏表示观测矢量, 形成基不匹配问题(basis mismatch)^[9]。为解决多源定位问题中的基不匹配问题, Sun等人^[10]从稀疏贝叶斯学习角度出发, 通过贝叶斯学习来调整各网格坐标线的位置, 构成一个动态变化的定位字典, 最终得到能够稀疏表示偏离初始网格点目标测量矢量的稀疏基定位字典。然而, Sun等人的工作存在诸多可探讨之处。第一, 从建模角度, 其从相关向量机(Relevance Vector Machine, RVM)^[11]和贝叶斯压缩感知(Bayesian Compressive Sensing, BCS)^[12]的架构出发, 得到的多目标位置矢量服从Student-t分布。但Student-t分布是否是定位问题中最佳的稀疏先验分布仍有待商榷; 第二, 其对网格的坐标线进行建模, 暗含只能是矩形网格化为逼近某个目标位置, 至少需要调整一条网格线对应的所有网格点, 这在带来较大的计算消耗的同时也显得极不灵活; 第三, 其动态调整网格的优化式是一个带罚项的非线性最小二乘问题(NonLinear Least Squares, NLLSQ)。而求解NLLSQ问题通常存在诸如不收敛、无解析表达、无唯一解、有偏估计等问题。

本文针对多源定位中由真实目标偏离初始网格点导致的基不匹配问题, 通过对定位字典进行1阶泰勒展开, 构建具有Laplace先验的稀疏贝叶斯学习框架, 并进一步推导出真实稀疏基定位字典的学习问题等价于线性最小二乘(Linear Least Squares, LLSQ)问题, 最终得到了网格自适应下的定位字典和目标位置联合学习算法。

本文用到的符号标记如下。向量和矩阵用黑斜体表示。 x_i , $\mathbf{x}_{\setminus i}$, \mathbf{x}^T 和 $\text{diag}(\mathbf{x})$ 分别表示向量 \mathbf{x} 的第 i 个元素, 除去第 i 个元素后的向量, 转置和由 \mathbf{x} 的元素构成的对角矩阵。 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 分别表示 l_1 范数和 l_2 范数。 \mathbf{X}_{ij} , $\mathbf{X}_{i:}$, \mathbf{X}^{-1} 和 $\text{Tr}\{\mathbf{X}\}$ 分别表示矩阵 \mathbf{X} 第 i 行第 j 列的元素, 第 i 行元素构成的向量, \mathbf{X} 的逆, \mathbf{X} 的迹。 \mathbf{I} 表示单位矩阵。 \odot 为哈达玛积运算符, 表示各元素按对应位相乘。

后文组织如下。第2节介绍基于网格离散化的多源定位模型和由源目标偏离网格所导致的基不匹配问题。第3节阐述提出的网格自适应模型和基于稀疏贝叶斯学习的自适应定位算法。第4节给出算法的仿真结果。第5节是结论。

2 多源定位模型和基不匹配问题

2.1 多源定位模型

如图1所示, 设已知存在 K 个辐射源目标(位置

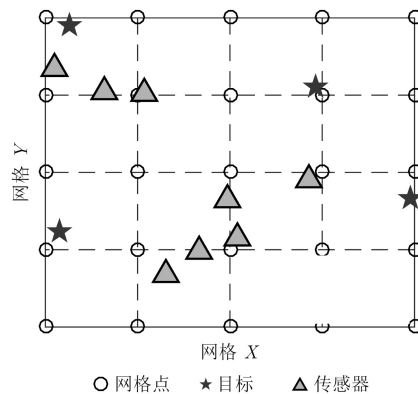


图1 基于空间网格离散化的多源定位模型

未知)的2维感知区域被离散成 N 个网格点, 目标位置服从感知区域内的连续均匀分布。源目标激发出叠加的辐射场, 感知区域内随机均匀散布的 M 个传感器(位置已知)能够获取所在位置的辐射强度值。在 N 足够大的前提下, 可以用网格点位置来近似目标的位置。定位模型为

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ 为需要求解的稀疏位置矢量, 编码了目标在网格空间中的位置和能量, 仅当目标在网格点 i 上时, x_i 不为0, 从而 \mathbf{x} 为 K 稀疏矢量; \mathbf{n} 为观测过程中的噪声矢量; $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ 为传感器接收到的所有目标辐射强度的线性叠加所构成的观测结果矢量; $\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为定位字典, 当 Φ 能稀疏表出 \mathbf{y} 时, 称为稀疏基定位字典; y_i 表示第 i 个传感器接收到的辐射强度值, Φ_{ij} 表示第 i 个接收传感器感知到的来自第 j 个网格点处的目标辐射强度值, 二者具有式(2)所示形式:

$$y_i = \sum_{k=1}^K f(d_{i,k}), \quad \Phi_{ij} = f(d_{i,j}) \quad (2)$$

其中, $f(\cdot)$ 为辐射强度随距离变化的传播函数, $d_{i,k}$ 表示第 k 个目标到第 i 个传感器的距离, $d_{i,j}$ 表示第 j 个网格点到第 i 个传感器的距离。

当 $K < M \ll N$ 时, 目标位置在网格化空间域上具有稀疏性, 多源定位问题可以抽象成式(3)所示压缩感知问题, 并借助压缩感知恢复算法实现目标位置的网格点定位。

$$\arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (3)$$

2.2 基不匹配问题

当目标恰好落在划分的网格点上时, \mathbf{y} 在 Φ 上恰好能被表示成 K 稀疏向量 \mathbf{x} , 借助压缩感知重建算法, 式(1)所示模型能取得良好的定位效果。但实际中, 目标位置会偏离事先划分的固定网格点

(off grid)。在此情形下， \mathbf{y} 不能由 Φ 稀疏表出。在压缩感知理论中，这一现象被称为基不匹配问题，是近年来压缩感知理论研究的热点问题之一。针对基不匹配问题，已有大量的研究获得了具有价值的研究成果，如基于原子范数(atomic norm)^[9]提出的无网格压缩感知理论(gridless compressive sensing)^[13,14]和全变分范数^[15]等。然而，这些工作针对1维问题，扩展到更高维度时缺乏有效的泛化表达和理论保障，而多源定位是一个2维甚至3维的问题。针对偏离网格位置的多源定位问题，Sun等人^[10]从RVM和BCS的框架出发，通过动态调整网格坐标线来获得能够稀疏表达 \mathbf{y} 的稀疏基定位字典，进而提高了定位性能。但如前文所述，其工作存在诸多局限。

3 基于稀疏贝叶斯学习的网格自适应多源定位

3.1 网格自适应模型

设第 j 个网格点位置为 $\rho_j = (\rho_{x,j}, \rho_{y,j})$ ，真实目标 k 的位置为 $\rho_k = (\rho_{x,j} + \theta_{x,j}, \rho_{y,j} + \theta_{y,j})$ 。其中， $\theta_{x,j}$ 和 $\theta_{y,j}$ 分别为真实目标位置相对于离其最近的网格点 j 在 x 轴和 y 轴上的偏移值。当 ρ_k 在 ρ_j 的某一邻域内时，真实目标传播到第 i 个传感器的辐射强度值 $f(d_{i,k})$ 可以通过1阶泰勒展开逼近：

$$f(d_{i,k}) \approx f(d_{i,j}) + f'_x(d_{i,j})\theta_{x,j} + f'_y(d_{i,j})\theta_{y,j} \quad (4)$$

其中， f'_x 和 f'_y 分别为传播函数对网格点 x 坐标和 y 坐标的1阶偏导数。

下面考虑所有传感器和网格点。视网格点的坐标为变量，则式(1)中 Φ 为网格位置的函数。记矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 。 \mathbf{A} 为初始网格点划分 D_0 生成的初始定位字典，其元素 $A_{ij} = f(d_{i,j})$ 。 \mathbf{B}, \mathbf{C} 分别为 Φ 对网格点 x 轴坐标和 y 轴坐标的偏导数在初始网格划分下的取值，其元素分别为 $B_{ij} = f'_x(d_{i,j})$ ， $C_{ij} = f'_y(d_{i,j})$ 。稀疏基定位字典 Φ 对应的网格划分 D 使目标恰好落在网格点上，设其与 D_0 偏差为 $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_y] \in \mathbb{R}^{N \times 2}$ ，其元素 $\theta_j = (\theta_{x,j}, \theta_{y,j})$ 表示相对初始网格划分 D_0 ，网格划分 D 中对应的网格点 j 位置的偏移值。在初始划分足够密集的条件下， Φ 能够由 \mathbf{A} 处的1阶泰勒展开逼近，

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A} + \mathbf{B}\text{diag}(\boldsymbol{\theta}_x) + \mathbf{C}\text{diag}(\boldsymbol{\theta}_y) \quad (5)$$

实际处理中，相对于初始网格划分 D_0 ，只需要调整离目标最近的少量初始网格点，即可使调整后的网格点恰好能定位目标位置，换言之，网格局部调整即可达到自适应的目的。偏移值具有式(6)的形式：

$$(\theta_{x,j}, \theta_{y,j}) = \begin{cases} (\delta_{x,j}, \delta_{y,j}), & j \in n_k, \forall k \in [1, 2, \dots, K] \\ (0, 0), & \text{其它} \end{cases} \quad (6)$$

其中， n_k 表示离目标 k 最近的初始网格点集合， $\delta_{x,j}, \delta_{y,j}$ 分别表示非零的偏移量。由于 $K \ll N$ ，则 $\boldsymbol{\theta}_x$ 和 $\boldsymbol{\theta}_y$ 的大部分元素为0，是 K 稀疏的向量。

3.2 具有Laplace先验的稀疏贝叶斯模型

在网格自适应模型下， \mathbf{y} 能由 Φ 稀疏表出，定位问题抽象成稀疏重建问题。本节从稀疏贝叶斯学习理论出发，构建层级概率模型。

3.2.1 观测模型 式(7)中各参数意义如前所述。在网格自适应模型下，式(7)所示模型和式(1)所示模型的不同在于，式(7)从现实场景出发，认为网格划分和目标位置都是连续空间上需要学习的参数。

$$\mathbf{y} = \Phi(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x} + \mathbf{n} \quad (7)$$

3.2.2 噪声模型 首先，对噪声建模为均值为0，精度(方差的倒数)为 β 的高斯白噪声。

$$p(\mathbf{n}|\beta) = \mathcal{N}(\mathbf{n}|0, \beta^{-1}\mathbf{I}) \quad (8)$$

然后，将 β 建模成由超参数 a 和 b 控制的Gamma分布。

$$p(\beta; a, b) = \Gamma(\beta|a, b) \quad (9)$$

所以，观测向量的似然函数可以表示为

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \beta, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}|\Phi(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}, \beta^{-1}\mathbf{I}) \quad (10)$$

3.2.3 稀疏位置模型 为对 \mathbf{x} 的稀疏性建模，从层级先验和共轭先验的角度出发，首先假设各元素服从独立但方差各异的0均值高斯分布：

$$p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|0, \boldsymbol{\Lambda}) \quad (11)$$

其中， $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\boldsymbol{\alpha})$ 为协方差矩阵， $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)^T$ ， α_i 为 x_i 的方差。

然后，假设所有方差 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，服从由共同单参数 λ 控制的Gamma分布：

$$p(\boldsymbol{\alpha}; \lambda) = \prod_{i=1}^N \Gamma\left(\alpha_i | 1, \frac{\lambda}{2}\right) \quad (12)$$

此处建模和Sun等人^[10]的工作不同。Sun等人从RVM和BCS的架构出发，对第1层中的精度矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$ 进行建模，最终得到 \mathbf{x} 的边缘先验分布为Student-t分布。本文的层级建模方式得到边缘分布是Laplace分布，有定理1。

定理1 若随机变量 x 的条件分布为 $x \sim \mathcal{N}(0, \alpha)$ ，其中 $\alpha \sim \Gamma(\alpha|1, \lambda/2)$ ，且 α 和 λ 均大于0，则 x 服从均值 $\mu = 0$ ，尺度参数的 $b = 1/\sqrt{\lambda}$ 的Laplace分布，即 $p(x) = \text{Laplace}(0, 1/\sqrt{\lambda})$ 。

相比Student-t分布，Laplace分布的概率密度更加集中在0附近，比Student-t分布稀疏性约束更

强。当稀疏先验为Laplace分布时, 最大后验估计(Maximum A Posteriori, MAP)等效于最小化 l_1 范数罚项的优化问题, 而 l_1 范数是 l_0 范数的紧凸松弛, 优化理论中常用 l_1 作为罚项进行稀疏优化。层级建模的好处是能够构建出一个很宽的先验分布族, 能更方便地拟合数据分布。共轭先验意味着先验概率和后验概率具有一致的形式, 易于迭代求解。

3.2.4 网格偏移矢量模型 网格偏移矢量 θ_x, θ_y 具有和 \mathbf{x} 相同的支撑集, 其稀疏性可由 \mathbf{x} 的稀疏性表示。因而对网格偏移矢量施加非信息性的均匀先验假设即可。

$$\theta_x \sim U\left(\left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^N\right), \theta_y \sim U\left(\left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^N\right) \quad (13)$$

综合贝叶斯层级建模的各阶段, 模型的联合概率密度函数(Probability Distribution Function, PDF)可以表示为

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \beta, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\alpha}) \cdot p(\boldsymbol{\alpha})p(\beta)p(\boldsymbol{\theta}) \quad (14)$$

3.3 贝叶斯推断

下文中, Φ 和 $\Phi(\boldsymbol{\theta})$ 具有相同的意义。贝叶斯推断由后验概率开始, 由链式法则有

$$p(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}, \beta, \boldsymbol{\alpha}|\mathbf{y}) = p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \quad (15)$$

由式(7), 式(11)和式(12)易推得 \mathbf{x} 的后验概率分布为高斯分布:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \quad (16)$$

其中, $\boldsymbol{\mu} = \beta\boldsymbol{\Sigma}\Phi^T\mathbf{y}$, $\boldsymbol{\Sigma} = (\beta\Phi^T\Phi + \boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1}$ 。计算 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$, 需要计算超参数 $\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}$ 。因为 $p(\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ 无法解析计算, 所以采取证据处理(evidence procedure)来估计无法解析计算的超参数。证据处理的思想是使用后验概率模值(mode)来代替超参数参与相关计算, 即

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\beta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \quad (17)$$

实质上, 式(17)是一个MAP问题, 由于 $p(\mathbf{y})$ 与超参数无关, 所以MAP问题等效于ML问题:

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\beta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{y}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}) \quad (18)$$

这里, 将 \mathbf{x} 视为隐变量, 采取期望最大化(EM)算法来求解式(18)所示ML问题:

$$(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\beta}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \arg \max_{\boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta}} E\{\ln p(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, \beta, \boldsymbol{\theta})\} \quad (19)$$

式中, $E\{\cdot\}$ 表示对隐变量 \mathbf{x} 使用当前超参数估计的后验概率密度式(16)求期望。采取类似RVM的处理, 推得 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 的更新公式为

$$\hat{\alpha}_i = \frac{\sqrt{1 + 4\lambda(\boldsymbol{\Sigma}_{ii} + \mu_i^2)} - 1}{2\lambda} \quad (20)$$

$$\hat{\beta} = \frac{2a - 2 + M}{2b + E\{\|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2^2\}} \quad (21)$$

其中, $E\{\|\mathbf{y} - \Phi\mathbf{x}\|_2^2\} = \|\mathbf{y} - \Phi\boldsymbol{\mu}\|_2^2 + \beta^{-1}\sum_{i=1}^N(1 - \alpha_i^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ii})$ 。若将超参数 λ 视为变量, 类似地, 可得到其更新公式为 $\hat{\lambda} = 2N / \sum_{i=1}^N \alpha_i$ 。

网格偏移矢量 θ_x, θ_y 的推断是网格自适应的核心, 下面阐述其推断过程。

由式(10), 式(13), 式(14), 式(19)有, 最大化 $E\{\ln p(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \beta, \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta})\}$ 等效于最小化 $E\{\|\mathbf{y} - \Phi(\boldsymbol{\theta}) \cdot \mathbf{x}\|_2^2\}$, 而

$$\begin{aligned} E\{\|\mathbf{y} - \Phi(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}\|_2^2\} &= \|\mathbf{y} - \Phi(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\mu}\|_2^2 \\ &\quad + \text{Tr}\{\Phi(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Sigma}\Phi(\boldsymbol{\theta})^T\} \\ &= \boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\theta}_x + \boldsymbol{\theta}_y^T \mathbf{P}_{22}\boldsymbol{\theta}_y + 2\boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{M}_{12}\boldsymbol{\theta}_y \\ &\quad + 2\mathbf{v}_1^T \boldsymbol{\theta}_x + 2\mathbf{v}_2^T \boldsymbol{\theta}_y + \text{const} \end{aligned} \quad (22)$$

式中, $\mathbf{P}_{11}, \mathbf{P}_{22}$ 为半正定矩阵, const 为与 $\boldsymbol{\theta}$ 无关的常数。各参数具体形式为

$$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{B}^T \mathbf{B} \odot (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \odot (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) \quad (24)$$

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \odot (\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T) \quad (25)$$

$$\mathbf{v}_1 = \left(\text{diag}(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma})^T - (\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{B} \text{diag}(\boldsymbol{\mu})\right)^T \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_2 = \left(\text{diag}(\mathbf{C}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\Sigma})^T - (\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{C} \text{diag}(\boldsymbol{\mu})\right)^T \quad (27)$$

因此, 得到 $\boldsymbol{\theta}$ 的优化问题为

$$\begin{aligned} (\hat{\boldsymbol{\theta}}_x, \hat{\boldsymbol{\theta}}_y) &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_y \in [-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]^N} \left\{ \boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\theta}_x + \boldsymbol{\theta}_y^T \mathbf{P}_{22}\boldsymbol{\theta}_y \right. \\ &\quad \left. + 2\boldsymbol{\theta}_x^T \mathbf{M}_{12}\boldsymbol{\theta}_y + 2\mathbf{v}_1^T \boldsymbol{\theta}_x + 2\mathbf{v}_2^T \boldsymbol{\theta}_y \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

式(28)是一个带有边界约束的LLSQ问题。不同于NLLSQ问题, LLSQ问题具有唯一解析解^[16]。下面推导其解析解。

记 Q 为式(28)中的优化目标函数, 则 $\partial Q / \partial \boldsymbol{\theta}_x = 2(\mathbf{P}_{11}\boldsymbol{\theta}_x + \mathbf{M}_{12}\boldsymbol{\theta}_y + \mathbf{v}_1)$, 当 \mathbf{P}_{11} 可逆时, 令偏导数为0解得 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x = -\mathbf{P}_{11}^{-1}(\mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\theta}_y + \mathbf{v}_1)$, 若 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_x \in [-r/2, r/2]^N$, 则 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_x = \tilde{\boldsymbol{\theta}}_x$ 。若上述两个条件之一不

满足, 则逐元素更新 θ_x 。更新 $\theta_{x,i}$ 时, 固定其他元素, 求解使得偏导数为0的第 i 个方程, 解得

$$\bar{\theta}_{x,i} = - \frac{(\mathbf{P}_{12}\boldsymbol{\theta}_y)_i + (\mathbf{P}_{11,(i,:)} \setminus_i \boldsymbol{\theta}_{x \setminus i})}{\mathbf{P}_{11,ii}} \quad (29)$$

若 $\bar{\theta}_{x,i} \in [-r/2, r/2]^N$, 则 $\hat{\theta}_{x,i} = \bar{\theta}_{x,i}$ 。否则, 取离 $\bar{\theta}_{x,i}$ 最近的端点值。综上, 得到 θ_x 的更新公式:

$$\hat{\theta}_{x,i} = \begin{cases} \bar{\theta}_{x,i}, (C1): \mathbf{P}_{11} \text{可逆, 且} \bar{\theta}_{x,i} \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^N \\ \bar{\theta}_{x,i}, (C2): (C1) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{x,i} \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right] \\ -\frac{r}{2}, (C3): (C1)(C2) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{x,i} < -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{2}, (C4): (C1)(C2) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{x,i} > \frac{r}{2} \end{cases} \quad (30)$$

类似地, 可以得到 θ_y 的更新公式:

$$\hat{\theta}_{y,i} = \begin{cases} \bar{\theta}_{y,i}, (C5): \mathbf{P}_{22} \text{可逆, 且} \bar{\theta}_{y,i} \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right]^N \\ \bar{\theta}_{y,i}, (C6): (C5) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{y,i} \in \left[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right] \\ -\frac{r}{2}, (C7): (C5)(C6) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{y,i} < -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{2}, (C8): (C5)(C6) \text{不满足, 且} \bar{\theta}_{y,i} > \frac{r}{2} \end{cases} \quad (31)$$

其中, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_y = -\mathbf{P}_{22}^{-1}(\mathbf{P}_{12}^T \boldsymbol{\theta}_x + \mathbf{v}_2)$, $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{y,i} = -\{(\mathbf{P}_{12}^T \boldsymbol{\theta}_x)_i + (\mathbf{P}_{22,(i,:)} \setminus_i \boldsymbol{\theta}_{y \setminus i})\} / \mathbf{P}_{22,ii}$

3.4 算法步骤

由上述分析给出源目标偏离初始网格点情况下的网格自适应多源定位算法(Adaptive Grid Multiple Targets Localization, AGMTL), 如表1所示。

4 仿真结果

为验证所提算法对于偏离网格源目标的定位性能, 采用经典的BP和BCS算法作为对比。此外,

将本文AGMTL算法中不含有步骤3的算法称为SBI-Laplace, 即固定网格划分下具有Laplace先验的稀疏贝叶斯学习定位算法。一方面SBI-Laplace和BCS算法对比, 验证Laplace先验的优越性, 另一方面和AGMTL对比, 验证网格自适应模型的有效性。仿真的硬件环境为Intel Core i7-6700处理器, 主频3.4 GHz, 8G内存; 软件环境为: Windows 10+Matlab R2016a。

仿真中感知区域设为10 m×10 m的方形区域, 初始网格划分采用均匀矩形划分方式, $N = 21 \times 21$, $r = 0.5$ 为平均网格间距, $K = 4$, 目标有效全向辐射功率 $P_t = 38$ dBm, 传播函数采用IEEE802.15.4标准中的室内传播损耗模型^[4]:

$$f(d) = \begin{cases} P_t - 40.2 - 20\ln d, & d \leq 8 \\ P_t - 58.5 - 33\ln d, & d > 8 \end{cases} \quad (32)$$

远场参考距离 $d_0 = 1$ m, 当距离小于 d_0 时, 认为目标激发出功率强度为 $P_t - 40.2$ 的恒定场。测量噪声为高斯白噪声, 取500次仿真的均值作为实验结果, 每一次仿真均重新撒布目标和传感器。仿真的评价度量为平均定位误差距离(Mean Localization Error Distance, MLED), 定义为目标 k 的真实位置 (x_k, y_k) 和最近目标估计位置 (\hat{x}_k, \hat{y}_k) 之间的平均误差距离。公式为

$$\text{MLED} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{(x_k - \hat{x}_k)^2 + (y_k - \hat{y}_k)^2} \quad (33)$$

4.1 网格自适应和定位结果

图2给出了 $M = 50$, SNR=25 dB情况下网格自适应结果和各算法的定位结果。图2(a)为初始网格点及其构成的拓扑结构, 图2(b)为AGMTL算法网格自适应处理后的网格点及其拓扑结构, 图2(c)为同样的初始网格划分下各算法的定位结果, 图中仅显示了真实目标附近区域。从图2(a)和图2(b)可以看出, 对于偏离初始网格点的目标, AGMTL算法能自动调整离目标最近的网格点, 使其更加靠近真

表1 网格自适应多源定位算法

算法1: 网格自适应多源定位

输入: 测量结果矢量 \mathbf{y} , 初始网格点坐标集合 D_0 , 传感器坐标集合 P_s , 传播模型 $f(d)$, 目标个数 K ;

输出: 稀疏位置矢量 $\hat{\mathbf{x}}$, 自适应网格坐标集合 D , 目标位置集合 P_{tgt} , 目标功率集合 E_{tgt} ;

初始化: 初始化超参数 α, β ; $\boldsymbol{\theta}_x \leftarrow 0, \boldsymbol{\theta}_y \leftarrow 0$; 由 D_0, P_s 和 $f(d)$ 计算 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$;

步骤1(字典逼近): 依据式(5), 由 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 和 $\boldsymbol{\theta}$ 逼近定位字典 Φ ;

步骤2(参数更新): 由当前 α, β, Φ 依次计算 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$; 依据式(20)和式(21), 由当前 $\alpha, \beta, \Phi, \boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 更新 α 和 β ;

步骤3(网格自适应): 依据式(30)和式(31), 由当前 $\alpha, \beta, \Phi, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 学习网格偏移矢量 $\boldsymbol{\theta}_x$ 和 $\boldsymbol{\theta}_y$;

步骤4(迭代终止准则): 计算残差能量 $\|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2^2$, 若小于门限值或达到最大迭代次数, 则终止迭代, 输出参数; 否则, 继续迭代, 跳转到步骤1;

步骤5(定位): $\hat{\mathbf{x}} \leftarrow \boldsymbol{\mu}, D \leftarrow D_0 + [\boldsymbol{\theta}_x, \boldsymbol{\theta}_y]$; $P_{\text{tgt}} \leftarrow \{\hat{\mathbf{x}}$ 最大的前 K 个系数在 D 中的对应网格点位置}; $E_{\text{tgt}} \leftarrow \{\hat{\mathbf{x}}$ 最大的前 K 个系数}。

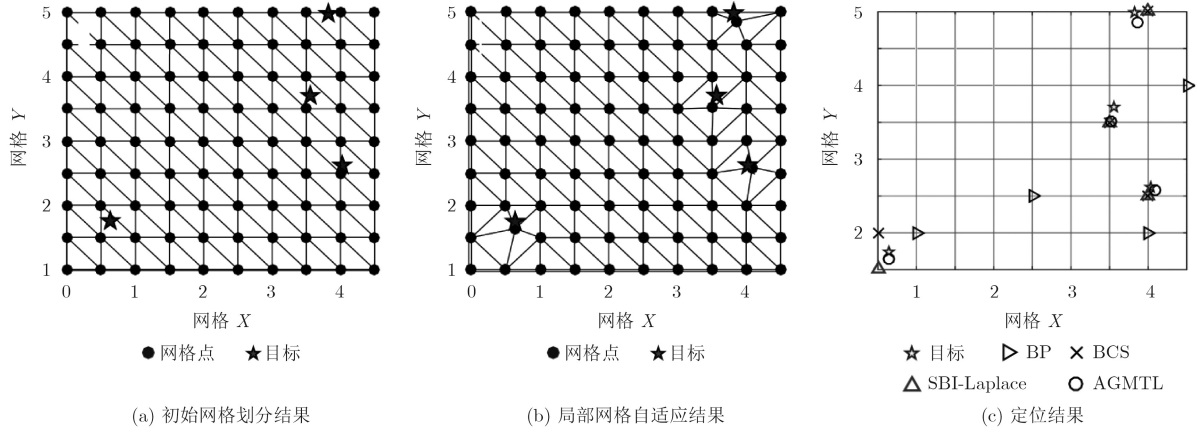


图2 网格自适应和定位结果

实目标位置，达到了网格自适应的目的。由图2(a)和图2(b)的对比可以清晰看出，AGMTL只需调整少量网格点即可达到自适应的效果，这有利于减少算法的计算量。从图2(c)中可以看出，BP算法远远偏离真实目标位置，定位效果差，BCS和SBI-Laplace能定位离目标最近的初始网格点，但由于其固定网格划分的局限，不能进一步降低定位误差，而AGMTL能通过网格自适应调整，使得离目标最近的网格点进一步靠近目标位置，实现更低的定位误差。

4.2 定位的抗噪声性能

图3展示了 $M = 50$ 时，噪声水平对各算法的平均定位误差的影响。图3中，BP算法的曲线为MLED随SNR的变化关系。BCS, SBI-Laplace 和AGMTL的曲线为1倍标准误差线(error bar)，对于每一根误差线，其中心点代表均值，上下短横线分别表示离均值1倍标准差的上下边界，误差线能同时反映估计的期望和估计的不确定度。从图3中可以看出AGMTL具有最佳的抗噪声性能和定位精度。同时，从图3可以得出如下结论：(1)贝叶斯方法优于传统的BP算法；(2)由SBI-Laplace和BCS的对比可以看出，Laplace分布先验建模优于Student-

t分布先验建模；(3)理论上固定网格划分能取得的最小定位误差为 $r/2$ ，SBI-Laplace能取得固定网格划分下的理论误差值0.25 m，验证了构造的贝叶斯架构的正确性；(4)AGMTL能在SBI-Laplace的基础上进一步降低定位误差的下界，达到0.1 m，验证了网格自适应算法的有效性；(5)本文的AGMTL算法不仅具有最小的定位误差，对噪声鲁棒性更强，同时也具有最小的估计不确定度，且不确定的程度随着信噪比的增加迅速衰减。

4.3 传感器个数的影响

多源定位中的关键但仍然未解决的问题之一是针对给定数目的目标和估计误差，相应的最低测量量是多少？从仿真的角度，图4给出了 $SNR = 40$ dB，传感器数目 M 分别为10, 20, 30, 50, 70, 100, 150, 200时各算法的定位误差。图4中，SBI-Laplace和AGMTL的曲线为1倍标准误差线。可以看出，对于同样的定位误差水平，AGMTL需要的传感器数目最少，远远低于其他算法所需的传感器数目。随着测量量的增加，各算法定位误差不断下降，直至达到算法的收敛值。从信息论的角度，这可以看做已知信息的增加对不确定性的减少，但不确定性的减少并不是无限的，从压缩感知精确恢复的

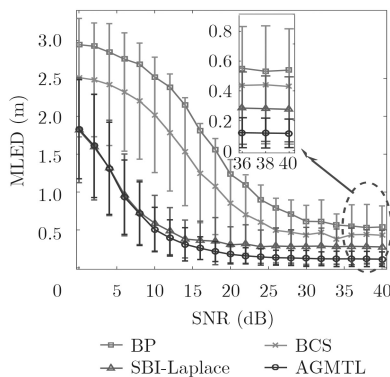


图3 定位的抗噪声性能

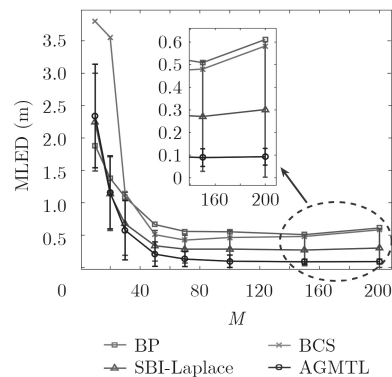


图4 传感器个数对定位的影响

RIP条件^[4]出发,理论上传感器个数的下界为 $K \log(N/K) \approx 19$ 。由图4可以看出,当 $M < 20$ 时,各算法均无法收敛。当 $M > 50$ 时,各算法性能开始接近收敛值。传感器的最小数目和理论值大约相差30。

从图4中可知,相同传感器数目下,AGMTL具有最低的定位误差距离。和BCS相比,SBI-Laplace具有更低的定位误差,再一次显示了Laplace先验建模优于Student-t先验建模。由SBI-Laplace和AGMTL的误差线可知,网格自适应除了具有更低的定位误差,还有更快的估计不确定度衰减速度。

5 结束语

本文针对多源目标定位中由目标位置偏离初始网格点导致的基不匹配问题,从稀疏贝叶斯学习理论出发,构建了具有Laplace稀疏先验的层级概率模型,提出了网格自适应多源定位算法AGMTL。仿真分析表明,在多源定位中,构造的具有Laplace先验的层级概率模型优于具有Student-t先验的RVM和BCS概率模型,本文的AGMTL算法只需调整少量初始网格点即可达到网格自适应的目的。相对固定网格划分,网格自适应能使定位误差低于固定网格划分定位误差的理论下界。同时,AGMTL算法不仅具有更低的定位误差距离,而且具有更低的估计不确定性,更快的收敛速度,更强的噪声鲁棒性。在工程实际中,传播模型的误差也将对定位造成影响。未来的研究可以从本文的工作基础出发,将传播模型视为一个参数模型,利用贝叶斯推断的工具学习模型参数,解决模型参数误差带来影响。

参考文献

- [1] GOLDONI E, SAVIOLI A, and RISI M. Experimental analysis of RSSI-based indoor localization with IEEE 802.15.4[C]. Wireless Conference, Lucca, Italy, 2010: 71–77. doi: [10.1109/EW.2010.5483396](https://doi.org/10.1109/EW.2010.5483396).
- [2] CAM L N, ORESTIS G, YUKI Y, *et al.* The wireless localization matching problem[J]. *IEEE Internet of Things Journal*, 2017, 4(5): 1312–1326. doi: [10.1109/JIOT.2017.2723013](https://doi.org/10.1109/JIOT.2017.2723013).
- [3] LIN Xiaofei, YOU Kangyong, and GUO Wenbin. Delaunay triangulation and mesh grid combining algorithm for multiple targets localization using compressive sensing[C]. International Symposium on Wireless Personal Multimedia Communications, Shenzhen, China, 2017: 25–30.
- [4] CANDES E J and WAKIN M B. An introduction to compressive sampling[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2008, 25(2): 21–30. doi: [10.1109/MSP.2007.914731](https://doi.org/10.1109/MSP.2007.914731).
- [5] CEVHER V, DUARTE M F, and BARANIUK R G. Distributed target localization via spatial sparsity[C]. Signal Processing Conference, Lausanne, Switzerland, 2008: 1–5.
- [6] FENG Chen, VALAEE S, and TAN Zhenhui. Multiple target localization using compressive sensing[C]. IEEE Global Telecommunications Conference, Honolulu, USA, 2009: 1–6. doi: [10.1109/GLOCOM.2009.5425808](https://doi.org/10.1109/GLOCOM.2009.5425808).
- [7] ZHANG Bowu, CHENG Xiuzhen, ZHANG Nan, *et al.* Sparse target counting and localization in sensor networks based on compressive sensing[C]. IEEE INFOCOM, Shanghai, China, 2011: 2255–2263. doi: [10.1109/INFOCOM.2011.5935041](https://doi.org/10.1109/INFOCOM.2011.5935041).
- [8] LAGUNAS E, SHARMA S K, CHATZINOTAS S, *et al.* Compressive sensing based target counting and localization exploiting joint sparsity[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Shanghai, China, 2016: 3231–3235. doi: [10.1109/ICASSP.2016.7472274](https://doi.org/10.1109/ICASSP.2016.7472274).
- [9] CHI Y, SCHARF LL, PEZESHKI A, *et al.* Sensitivity to basis mismatch in compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(5): 2182–2195. doi: [10.1109/TSP.2011.2112650](https://doi.org/10.1109/TSP.2011.2112650).
- [10] SUN Baoming, GUO Yan, LI Ning, *et al.* Multiple target counting and localization using variational Bayesian EM algorithm in wireless sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2017, 65(7): 2985–2998. doi: [10.1109/TCOMM.2017.2695198](https://doi.org/10.1109/TCOMM.2017.2695198).
- [11] TIPPING M E. Sparse Bayesian learning and relevance vector machine[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2001, 1(3): 211–244. doi: [10.1162/15324430152748236](https://doi.org/10.1162/15324430152748236).
- [12] JI Shihao, XUE Ya, and CARIN L. Bayesian compressive sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(6): 2346–2356. doi: [10.1109/TSP.2007.914345](https://doi.org/10.1109/TSP.2007.914345).
- [13] TANG Gongguo, BHASKAR B N, SHAH P, *et al.* Compressive sensing off the grid[C]. Communication, Control, and Computing. Monticello, USA, 2013: 778–785. doi: [10.1109/Allerton.2012.6483297](https://doi.org/10.1109/Allerton.2012.6483297).
- [14] 陈栩杉, 张雄伟, 杨吉斌, 等. 如何解决基不匹配问题: 从原子范数到无网格压缩感知[J]. *自动化学报*, 2016, 42(3): 335–346.

- doi: [10.16383/j.aas.2016.c150539](https://doi.org/10.16383/j.aas.2016.c150539).
CHENG Xushan, ZHANG Xiongwei, YANG Jibin, *et al.*
How to overcome basis mismatch: From atomicnorm to
gridless compressive sensing[J]. *Acta Automatica Sinica*,
2016, 42(3): 335–346. doi: [10.16383/j.aas.2016.c150539](https://doi.org/10.16383/j.aas.2016.c150539).
- [15] CANDES E J and FERNANDEZ G C. Towards a
mathematical theory of super-resolution[J]. *Communications
on Pure and Applied Mathematics*, 2014, 67(6): 906–956.
doi: [10.1002/cpa.21455](https://doi.org/10.1002/cpa.21455).
- [16] YANG Zai and XIE Lihua. Enhancing sparsity and
resolution via reweighted atomic norm minimization[J].
IEEE Transactions on Signal Processing, 2016, 64(4):
995–1006. doi: [10.1109/TSP.2015.2493987](https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2493987).
- 游康勇: 男, 1993年生, 博士生, 研究方向为压缩感知技术.
杨立山: 男, 1986年生, 博士生, 研究方向为图信号处理与压缩感
知、大数据处理.
刘玥良: 男, 1992年生, 博士生, 研究方向为图信号处理与压缩感
知、大数据处理.
郭文彬: 男, 1971年生, 教授, 研究方向为信号处理、认知无线电
及其关键技术.
王文博: 男, 1965年生, 教授, 研究方向为通信理论和信号处理.