几乎完备高斯整数序列构造法

李玉博* 陈 邈
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)
(河北省信息传输与信号处理重点实验室 秦皇岛 066004)

摘 要：该文提出基于伪随机序列构造高斯整数序列的方法。基于长度为 p^m-1 的 p 元伪随机序列，构造得到长度为 p^m-1 的高斯整数序列，其阶数为 $p-1$ 。该类高斯整数序列具有几乎完备的自相关性能，其异相自相关函数值仅存在 $p-2$ 个非零值。并且该类高斯整数序列具有良好的平衡性，在无线通信与雷达系统中都有广泛的应用前景。

关键词：高斯整数序列；伪随机序列；几乎完备；平衡性
中图分类号： TN911.2 **文献标识码**： A **文章编号**： 1009-5896(2018)07-1752-07
DOI: 10.11999/JEIT170844

Construction of Nearly Perfect Gaussian Integer Sequences

LI Yubo CHEN Miao
(*School of Information Science* & *Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)
(*Hebei Key Laboratory of Information Transmission and Signal Processing*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: A construction of Gaussian integer sequences based on pseudo-random sequences. Gaussian integer sequences with period p^m-1 whose degree $p-1$ are constructed from p-ary pseudo-random sequences with period p^m-1. The presented sequences are nearly perfect Gaussian integer sequences with $p-2$ non-zero out-of-phase autocorrelation values. Moreover, these Gaussian integer sequences have balance property, as a result, they will be widely used in wireless communication and radar systems.

Key words: Gaussian integer sequence; Pseudo-random sequence; Nearly perfect; Balance property

1 引言

完备序列是一类具有理想自相关性能的离散信号，其自相关函数值分布为一个冲激函数，即旁瓣值处处为零。具有完备自相关性能的序列已经被广泛应用到无线通信以及雷达系统中，研究该类序列的构造方法一直是信号设计领域的热点问题。目前已有的研究结果表明，完备序列存在数目比较有限。如只存在一个长度为 4 的二元完备序列；对于四元序列，不存在长度为 $2^m, m>4$ 的完备序列[1]。为进一步扩展可用的序列数目，几乎完备序列的研究得到关注[2,3]。几乎完备序列放宽了对序列自相关的要求，其自相关旁瓣值仅存在少数几个非零值。

具有良好相关性能的高斯整数序列设计近年来得到学者们的广泛关注。高斯整数序列是指元素取值于高斯整数集合($\{a+bi\}$ ，其中 a 和 b 都是整数)上的序列。高斯整数序列与传统的单位圆复数根序列不同，其元素幅值不相等，属于一类非恒定幅度序列。高斯整数序列应用到 CDMA 通信系统中可以提高数据传输速率[4]，还被用于 OFDM 系统降低信号峰均功率比[5]。对于完备高斯整数序列设计，目前已经有一些成果。1994 年，Fan 等人[6]利用高斯素数域理论构造了一类几乎完备的高斯整数序列。2012 年，文献[7]利用定义在集合 $\{0,\pm1,\pm\mathrm{i}\}$ 的多个基序列，将其进行线性组合，构造了偶数长度的完备高斯整数序列。文献[8,9]则分别构造了任意长度的完备高斯整数序列。组合设计领域的分圆类方法、差集等也被用于构造高斯整数序列设计中[10−13]，得到了一些阶数为 2 和 4 的完备高斯整数序列。还有另外一些方法，如文献[14]利用整数集上的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列。文献[15,16]利用交织法构造了参数达到理论界限的零相关区高斯整数序列集。文献[17−19]提出了利用 2 元伪随机序列构造阶数为 2 的完备高斯整数序列的方法。文献[20]

收稿日期: 2017-09-04; 改回日期: 2018-03-05; 网络出版: 2018-04-02
*通信作者：李玉博 liyubo6316@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61501395, 61671402)，河北省自然科学基金 (F2015203150)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501395, 61671402), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2015203150)

将该方法进行推广，提出了利用 p 元伪随机序列构造几乎完备高斯整数序列的思想，给出了高斯整数需满足的条件。然而由于该条件比较复杂，当高斯整数序列阶数增大时，该方法很难求解出满足条件的高斯整数序列。因此，文献[20]仅仅给出 3 阶和 5 阶高斯整数序列的具体构造方法。

目前已有的高斯整数序列设计存在以下两个问题，一是得到的高斯整数序列阶数较低，如 2, 3, 4 阶。基于分圆类和差集可以将完备高斯整数序列设计问题转化为多元非线性方程求解的问题，然而随着序列阶数的增加，非线性方程的未知元个数也增加，求解难度增大。二是序列平衡性较差，目前存在的完备高斯整数序列构造方法大部分都没有考虑到序列平衡性问题，导致得到的高斯整数序列不满足平衡性。满足平衡性且具有较高阶数的完备或几乎完备高斯整数序列的构造是目前序列设计的一个难点。本文利用伪随机序列构造了一类高斯整数序列，其自相关函数旁瓣值仅在少数几个位置上非零，是一类几乎完备的高斯整数序列。同已有的方法相比，本文方法具有如下优势：(1)得到了具有良好平衡性的几乎完备高斯整数序列；(2)大大简化了高斯整数需满足的条件，可以方便地构造出具有较大阶数的高斯整数序列。

2　基本概念

定义 1　设 u_i, u_j 是两个长度为 L 的复数序列，序列 u_i 和 u_j 的周期互相关函数定义为

$$R_{u_i,u_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1} u_{i,t}u_{j,t+\tau}^{*} \tag{1}$$

其中，$0\le\tau<L$，下标模 L 运算，$(\bullet)^*$ 表示取复共轭。当 $i=j$ 时，称为序列 u_i 的自相关函数，可以用 $R_{u_i}(\tau)$ 表示。

定义 2　设 $\boldsymbol{s}=(s(0),s(1),\cdots,s(N-1))$ 表示一个长度为 N 的序列，其中 $s(n)\in\{x+y\cdot\mathrm{i}\}$，$x$ 与 y 都为整数，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 表示虚数单位，则称序列 $\boldsymbol{s}$ 为高斯整数序列。若每个周期中不同的非零元素个数为 p，则称 $\boldsymbol{s}$ 的阶数为 p。

定义 3　设 $\boldsymbol{a}=(a(0),a(1),\cdots,a(N-1))$，$N=p^m-1$ 是一个周期为 p^m-1 的 p 元序列，元素取值 $a(t)\in Z_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$。若其自相关函数满足：

$$R_{\boldsymbol{a}}=\sum_{t=0}^{N-1}\omega^{a(t)-a(t+\tau)}=\begin{cases}N, & \tau=0\\ -1, & \tau=1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{2}$$

则称序列 $\boldsymbol{a}$ 为理想二值自相关函数，或者伪随机序列。

定义 4　设 p 是一个奇素数，m 与 n 为两个整数，且 $n\mid m$。定义有限域 F_{p^m} 到其子域 F_{p^n} 的迹函数为

$$\mathrm{tr}_n^m(x)=\sum_{t=0}^{m/n-1}x^{p\cdot t} \tag{3}$$

定义 5[21]　设 $\boldsymbol{a}=(a(0),a(1),\cdots,a(N-1))$，$N=p^m-1$ 是一个周期为 p^m-1 的 p 元序列，$a(t)\in Z_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$。令 $N_{\boldsymbol{a}}(x)$ 表示序列 $\boldsymbol{a}$ 每个周期中包含元素 x 的个数，即 $N_{\boldsymbol{a}}(x)=\left|\{t:a(t)=x\}\right|$。如果满足式(4)的条件：

$$N_{\boldsymbol{a}}(x)=\begin{cases}p^{m-1}-1, & x=0\\ p^{m-1}, & x\in Z_p\setminus 0\end{cases} \tag{4}$$

则称序列 $\boldsymbol{a}$ 满足平衡性。令 $N_{\boldsymbol{a}}^{(\tau)}(x,y)=\left|\{t:a(t)=x,a(t+\tau)=y\}\right|$，对于 $\tau\in Z_p$ 如果满足条件：

(1)当 $\tau=l\cdot\dfrac{p^m-1}{p-1}$，$l=1,2,\cdots,p-1$ 时，有

$$N_{\boldsymbol{a}}^{(\tau)}(x,y)=\begin{cases}p^{m-1}-1, & (x,y)=(0,0)\\ p^{m-1}, & (x,y)=\left(\lambda,\lambda\alpha^l\right)\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\lambda\in Z_p\setminus\{0\}$，$\alpha$ 为有限域 F_p 的本原元。

(2)当 $\tau\ne 0\left(\bmod\dfrac{p^m-1}{p-1}\right)$ 时，有

$$N_{\boldsymbol{a}}^{(\tau)}(x,y)=\begin{cases}p^{m-2}-1, & (x,y)=(0,0)\\ p^{m-2}, & (x,y)\ne(0,0)\end{cases} \tag{6}$$

则称序列 $\boldsymbol{a}$ 具有二状态平衡性(two-tuple-balance)。

引理 1[21]　长度为 p^m-1 的 p 元伪随机序列具有平衡性与二状态平衡性。

定义 6　设 $\boldsymbol{s}=(s(0),s(1),\cdots,s(N-1))$ 表示一个长度为 N 的高斯整数序列，如果其自相关函数满足

$$R_{\boldsymbol{s}}(\tau)=\begin{cases}N, & \tau=0\\ 0, & \tau=1,2,\cdots,N-1\end{cases} \tag{7}$$

称序列 $\boldsymbol{s}$ 为完备高斯整数序列(Perfect Gaussian Integer Sequence, PGIS)。特别地，如果当 $\tau\ne 0(\bmod N)$ 时，对于少数几个 τ 有 $R_{\boldsymbol{s}}(\tau)\ne 0$ 而其余都为 0，则称 $\boldsymbol{s}$ 为几乎完备高斯整数序列(Nearly Perfect Gaussian Integer Sequence, NPGIS)。

3　几乎完备高斯整数序列的构造

步骤 1　设 p 为奇素数，构造一个高斯整数集合 $G=\{g_1,g_2,\cdots,g_{p-1}\}$，满足条件：$\sum_{t=1}^{p-1}g_t=0$，且 $g_t\ne 0$。

步骤 2　取一个 p 元伪随机序列，$\boldsymbol{a}=(a(0),$

$a(1),\cdots,a(N-1))$, $N=p^m-1$ 。

步骤3 定义一个由 $Z_p\setminus\{0\}$ 到 G 的一对一映射函数 $f(x)$ ，如 $f(\beta)=\alpha$, $\beta\in Z_p\setminus\{0\}$, $\alpha\in G$ 。构造高斯整数序列 $\boldsymbol{s}=(s(0),s(1),s(2),\cdots,s(N-1))$ ，其元素 $s(t)$ 如式(8)：

$$s(t)=\begin{cases}f\left(a(t)\right), & a(t)\neq 0\\ 0, & a(t)=0\end{cases} \tag{8}$$

定理 1 序列 $\boldsymbol{s}$ 是一个长度为 $N=p^m-1$ 的高斯整数序列，阶数为 $p-1$ ，其自相关函数值分布为

$$R_{\boldsymbol{s}}(\tau)=\begin{cases}E_0, & \tau=0\\ E_1, & \tau=l\cdot\dfrac{p^m-1}{p-1}\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{9}$$

其中， $E_0=\sum_{t=0}^{N-1}\left|s(t)\right|^2$, $E_1=f\left(\alpha^l\right)\cdot p^{m-1}\cdot\sum_{x\in F_p^*}f(x)\cdot f(x)^*$ ， $l=1,2,\cdots,p-1$ 。

证明 由构造过程可知序列 $\boldsymbol{s}$ 是一个长度为 $N=p^m-1$ 的高斯整数序列，阶数为 $p-1$ 。下面证明其自相关性。自相关函数可表示为

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{s}}(\tau)&=\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\cdot s^*(t+\tau)\\ &=\sum_{t=0}^{N-1}f\left(a(t)\right)\cdot f^*\left(a(t+\tau)\right)\end{aligned} \tag{10}$$

具体分为3种情况进行分析。

(1)当 $\tau=0$ 时，有

$$R_{\boldsymbol{s}}(\tau)=\sum_{t=0}^{N-1}s(t)\cdot s^*(t)=\sum_{t=0}^{N-1}\left|s(t)\right|^2 \tag{11}$$

(2)当 $\tau\neq 0$ 且 $\tau\neq 0\left(\bmod\dfrac{p^m-1}{p-1}\right)$ 时，根据伪随机序列 $\boldsymbol{a}$ 的二状态平衡性可知， $(a(t),a(t+\tau))$ 取值为每个非零整数对 (x,y) 有 p^{m-2} 次， $x,y\in F_p^*$ 。因此可得

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{s}}(\tau)&=p^{m-2}\cdot\sum_{x\in F_p^*}\sum_{y\in F_p^*}f(x)\cdot f^*(y)\\ &=p^{m-2}\cdot\sum_{x\in F_p^*}f(x)\cdot\sum_{y\in F_p^*}f^*(y)\\ &=p^{m-2}\cdot\sum_{i=1}^{p-1}g_i\cdot\sum_{j=1}^{p-1}g_j^*=0\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)第3个等号成立是因为 $f(\cdot)$ 由 $Z_p\setminus\{0\}$ 到 G 的一对一映射函数。

(3)当 $\tau\neq 0$ 且 $\tau=0\left(\bmod\dfrac{p^m-1}{p-1}\right)$ 时，不妨设 $\tau=l\cdot\dfrac{p^m-1}{p-1}$ ， $l=1,2,\cdots,p-1$ 。有

$$\begin{aligned}R_{\boldsymbol{s}}(\tau)&=p^{m-1}\cdot\sum_{x\in F_p^*}f(x)\cdot f\left(x\alpha^l\right)\\ &=f\left(\alpha^l\right)\cdot p^{m-1}\cdot\sum_{x\in F_p^*}f(x)\cdot f^*(x)\end{aligned} \tag{13}$$

综合上面3种情况，定理成立。序列 $\boldsymbol{s}$ 的异相自相关函数值仅当 $\tau=0\left(\bmod\dfrac{p^m-1}{p-1}\right)$ 时非零，共有 $p-2$ 个非零旁瓣值，是一个几乎完备高斯整数序列。 证毕

由引理1可知伪随机序列 $\boldsymbol{a}$ 具有平衡性，且映射函数 $f(\cdot)$ 是 $Z_p\setminus\{0\}$ 到 G 的一对一映射函数，则伪随机序列 $\boldsymbol{a}$ 与高斯整数集合 G 之间的元素具有一一对应的映射关系。根据定义5，所构造的高斯整数序列 $\boldsymbol{s}$ 在每个周期中的元素数目 $N_s(x)=\left|\{t:s(t)=x\}\right|$ ，满足

$$N_s(x)=\begin{cases}p^{m-1}-1, & x=0\\ p^{m-1}, & x\in G\end{cases} \tag{14}$$

因此根据本文方法所构造的高斯整数序列满足平衡性。

定理1将伪随机序列与几乎完备高斯整数序列建立起联系。基于伪随机序列，只要构造出满足条件的高斯整数集合，利用映射函数可以构造出高斯整数序列。且伪随机序列相关成果非常丰富，为本文方法提供大量的基础序列。

推论 1 设 p 为奇素数，利用迹函数得到一条长度为 p^m-1 的 p 元 m 序列 $\boldsymbol{a}^1=\left(a^1(0),a^1(1),\cdots,a^1(N-1)\right)$ ， $N=p^m-1$ ，如式(15)：

$$a^1(t)=\mathrm{tr}_1^m\left(\alpha^t\right) \tag{15}$$

α 为有限域 F_{p^m} 的本原元。根据定理1，基于该伪随机序列 $\boldsymbol{a}^1$ 可以构造得到长度为 p^m-1 的几乎完备序列 $\boldsymbol{s}^1$ ，其阶数为 $p-1$ 。

例 1 令 $p=3$, $m=3$ ，有限域 F_{3^3} 上的本原元 α ，本原多项式 $g(x)=x^3-x^2-2$ ，得到长度为26的3元 m 序列为 $\boldsymbol{a}^1=(0,0,1,1,1,0,2,1,1,2,1,0,1,0,0,2,2,2,0,1,2,2,1,2,0,2)$ 。构造高斯整数集合 $G=\{1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\}$ 。定义映射函数： $f(1)=1+\mathrm{i}$ ， $f(2)=-1-\mathrm{i}$ 。基于序列 $\boldsymbol{a}^1$ ，利用定理1构造高斯整数序列为： $\boldsymbol{s}^1=(0,0,1+\mathrm{i},1+\mathrm{i},1+\mathrm{i},0,-1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},0,1+\mathrm{i},0,0,-1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},0,1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},0,-1-\mathrm{i})$ 。其自相关函数值分布为： $R_{\boldsymbol{s}^1}(\tau)=(36,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-36,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)$ 。可以验证，序列 $\boldsymbol{s}^1$ 满足平衡性，阶数为2。

例 2　令 $p=11$，$m=2$，有限域 F_{11^2} 上的本原元 α，本原多项式 $g(x)=x^2-10x-4$。得到周期为 120 的 11 元 m 序列为：$\boldsymbol{a}^1=(0,1,10,5,2,7,1,5,10,10,8,10,0,7,4,2,3,5,7,2,4,4,1,4,0,5,6,3,10,2,5,3,6,6,7,6,0,2,9,10,4,3,2,10,9,9,5,9,0,3,8,4,6,10,3,4,8,8,2,8,0,10,1,6,9,4,10,6,1,1,3,1,0,4,7,9,8,6,4,9,7,7,10,7,0,6,5,8,1,9,6,8,5,5,4,5,0,9,2,1,7,8,9,1,2,2,6,2,0,8,3,7,5,1,8,7,3,3,9,3)$。构造集合 $G=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i},1+\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i}\}$，定义一对一映射函数如表 1 所示。

根据定理 1 得到高斯整数序列为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}^1=(&0,1,-2-\mathrm{i},1+\mathrm{i},-1,-1+\mathrm{i},1,1+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},\\
&-1-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,-1+\mathrm{i},-\mathrm{i},-1,\mathrm{i},1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1,\\
&-\mathrm{i},-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},0,1+\mathrm{i},1-\mathrm{i},\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-1,1+\mathrm{i},\mathrm{i},1-\mathrm{i},\\
&1-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},1-\mathrm{i},0,-1,2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-\mathrm{i},\mathrm{i},-1,-2\\
&-\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},1+\mathrm{i},2+\mathrm{i},0,\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-\mathrm{i},1-\mathrm{i},-2\\
&-\mathrm{i},\mathrm{i},-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},-1,-1-\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},1,1-\mathrm{i},\\
&2+\mathrm{i},-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},1-\mathrm{i},1,1,\mathrm{i},10,-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-1\\
&-\mathrm{i},1-\mathrm{i},-\mathrm{i},2+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-1+\mathrm{i},0,\\
&1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},1,2+\mathrm{i},1-\mathrm{i},-1-\mathrm{i},1+\mathrm{i},1+\mathrm{i},\\
&-\mathrm{i},1+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},-1,1,-1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i},2+\mathrm{i},1,-1,\\
&-1,1-\mathrm{i},-1,0,-1-\mathrm{i},\mathrm{i},-1+\mathrm{i},1+\mathrm{i},1,-1-\mathrm{i},\\
&-1+\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i},2+\mathrm{i},\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

其自相关函数值分布如图 1 所示。序列 $\boldsymbol{s}^1$ 阶数为 10，满足平衡性，异相自相关函数值存在 9 个非零值。

推论 2　设 p 为奇素数，m 和 n 为两个整数，$n\mid m$。利用迹函数得到一条长度为 p^m-1 的 p 元 GMW 序列 $\boldsymbol{a}^2=\left(a^2(0),a^2(1),\cdots,a^2(N-1)\right)$，$N=p^m-1$，如式(16)：

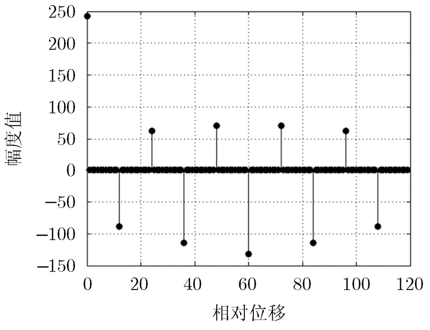

图 1 序列 $\boldsymbol{s}^1$ 的自相关函数值分布

$$a^2(t)=\mathrm{tr}_1^n\left[\left(\mathrm{tr}_n^m\left(\alpha^t\right)\right)^v\right] \tag{16}$$

α 为有限域 F_{p^m} 的本原元，v 是正整数，$\gcd\left(v,p^n-1\right)=1$。根据定理 1，基于该伪随机序列 $\boldsymbol{a}^2$ 可以构造得到长度为 p^m-1 的几乎完备序列 $\boldsymbol{s}^2$，其阶数为 $p-1$。

例 3 令 $p=3$，$m=4$，有限域 F_{3^4} 上的本原元 α，本原多项式 $g(x)=x^4+x+2$。周期为 80 的 3 元 GMW 序列按公式 $a^2(t)=\mathrm{tr}_1^2\left(\left(\mathrm{tr}_2^4\left(\alpha^t\right)\right)^5\right)$ 产生：

$\boldsymbol{a}^2=(1,0,0,0,2,0,0,2,2,0,2,2,2,1,0,0,1,1,0,2,0,2,2,1,2,0,1,0,2,2,2,1,1,2,2,0,2,1,2,1,2,0,0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,1,2,0,0,2,2,0,1,0,1,1,2,1,0,2,0,1,1,1,2,2,1,1,0,1,2,1,2)$。构造高斯整数集合 $G=\{2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i}\}$，定义映射函数 $f(1)=2+2\mathrm{i}$，$f(2)=-2-2\mathrm{i}$。根据定理 1 得到高斯整数序列为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{s}^2=(&2+\mathrm{i},0,0,0,-2-\mathrm{i},0,0,-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},\\
&-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},0,0,2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},0,\\
&-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},-2\\
&-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},\\
&2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,0,0,2+\mathrm{i},0,0,2+\mathrm{i},\\
&2+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},0,0,-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},\\
&0,2+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},0,-2-\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},\\
&2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i},-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},2+\mathrm{i},0,2+\mathrm{i},\\
&-2-\mathrm{i},2+\mathrm{i},-2-\mathrm{i})
\end{aligned}
$$

其自相关函数分布为

$$
\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{s}^2}(\tau)=(&270,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
&0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
&-270,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,\\
&0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

该高斯整数序列阶数为 2，满足平衡性，异相自相关函数值只存在 1 个非零值。

推论 3　设 p 为奇素数，$n_0,n_1,\cdots,n_e$ 为 $e+1$ 个整数，满足 $n_i\mid n_{i+1}$，$i=0,1,\cdots,e-1$，$n_e\mid m$。长度为 p^m-1 的 p 元级联 GMW 序列 $\boldsymbol{a}^3=\left(a^3(0),a^3(1),\cdots,a^3(N-1)\right)$，$N=p^m-1$ 由式(17)得到：

$$a^3(t)=\mathrm{tr}_1^{n_0}\left(\mathrm{tr}_{n_0}^{n_1}\left(\cdots\left(\mathrm{tr}_{n_e}^m\left(\alpha^t\right)\right)^{v_e}\cdots\right)^{v_1}\right) \tag{17}$$

α 为有限域 F_{p^m} 的本原元，v_k 是正整数，$\gcd\left(v_k,p^{n_{k-1}}-1\right)=1$，$k=1,2,\cdots,e-1$。根据定理 1，

表 1 一对一映射函数

$Z_{11}\setminus\{0\}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G	1	−1	i	−i	1+i	1−i	−1+i	−1−i	2+i	−2−i

基于该伪随机序列$\boldsymbol{a}^3$可以构造得到长度为p^m-1的几乎完备序列$\boldsymbol{s}^3$，其阶数为$p-1$。

推论 4 设p为奇素数，$q=p^k$，可以得到两类Helleseth-Gong序列如式(18)和式(19)：

$$\boldsymbol{a}^4=\left(a^4(0),a^4(1),\cdots,a^4(N-1)\right),N=p^m-1$$

$$a^4(t)=\mathrm{tr}_1^m\left(\sum_{i=0}^{l}u_i\alpha^{\frac{\left(q^{2i}+1\right)t}{2}}\right) \tag{18}$$

$$a^4(t)=\mathrm{tr}_1^m\left(\sum_{i=0}^{l}u_{l-i}\alpha^{\frac{\left(q^{2i}+1\right)t}{q+1}}\right) \tag{19}$$

式中，$m=(2l+1)k$，α为有限域F_{p^m}的本原元。根据定理1，基于该伪随机序列$\boldsymbol{a}^4$可以构造得到长度为p^m-1的几乎完备序列$\boldsymbol{s}^4$，其阶数为$p-1$。

例 4 令$p=5$，$m=2$。设α为有限域F_{5^2}的本原元，本元多项式$g(x)=x^2-x+2$，按式子$a^4(t)=\mathrm{tr}_1^2\left(\alpha^t\right)+\mathrm{tr}_1^2\left(2\alpha^{9t}\right)$构造长度为24的H-G序列为：$\boldsymbol{a}^4=(1,1,4,0,2,1,2,2,3,0,4,2,4,4,1,0,3,4,3,3,2,0,1,3)$。构造高斯整数集合$G=\{1,-1,\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$，定义映射函数：$f(1)=1$，$f(2)=-1$，$f(3)=\mathrm{i}$，$f(4)=-\mathrm{i}$。基于序列$\boldsymbol{a}^4$构造高斯整数序列为：$\boldsymbol{s}^4=(1,1,-\mathrm{i},0,-1,1,-1,-1,\mathrm{i},0,-\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},-\mathrm{i},1,0,\mathrm{i},-\mathrm{i},\mathrm{i},\mathrm{i},-1,0,1,\mathrm{i})$。其自相关函数值分布为：$R_{\boldsymbol{s}^4}(\tau)=(20,0,0,0,0,0,-10,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-10,0,0,0,0,0)$。可以验证，序列$\boldsymbol{s}^4$满足平衡性，其阶数为4，异相自相关函数值存在2个非零值。

4 构造方法对比分析

将目前已有的高斯整数序列构造方法进行了对比分析，如表2所示。已有的构造方法只能得到满足平衡性的2阶或4阶完备高斯整数序列。随着序列阶数的增加，构造方法难度增大，因此已有文献中关于较大阶数且满足平衡性的高斯整数序列构造成果很少。由本文方法的构造过程可知，由于伪随机序列具有平衡性，因此本文得到的高斯整数序列都满足平衡性。

文献[20]同样利用p元伪随机序列构造了几乎完备的高斯整数序列，与其相比，本文方法更加简单，算法复杂度更低。下面将文献[20]与本文构造方法进行对比分析。

文献[20]中，p个高斯整数$g_0,g_1,\cdots,g_{p-1}$必需满足式(20)条件：

$$\left(p^{m-2}-1\right)\cdot\left|g_0\right|^2+p^{m-2}\left(\sum_{i=1}^{p-1}\left|g_i\right|^2\right)+2\cdot p^{m-2}\left(\sum_{0\le k<l<p}\overline{g_kg_l}\right)=0 \tag{20}$$

其中，$\overline{g_kg_l}=a_ka_l+b_kb_l$，$g_k=a_k+b_k\cdot\mathrm{i}$，$g_l=a_l+b_l\cdot\mathrm{i}$。只有求解得到满足式(20)的$p$个高斯整数才能构造出高斯整数序列。随着高斯整数序列阶数p的增加，该非线性方程求解非常困难。文献[20]只给

表 2 目前已知的一些高斯整数序列

构造法	序列长度	阶数	平衡性	完备性	构造方式
文献[7]	偶数	3, 4, 5, 6	不满足	完备	基序列组合
文献[8]	$N=p$	不确定	不满足	完备	Legendre序列
	$N=kp,\ \gcd(k,p)=1,\ p$ 为素数	不确定	不满足	完备	插零法
文献[9]	$N=2f+1$	2	满足	完备	基序列组合
	$N=m(2f+1)$	3, 4	不满足	完备	基序列组合
	$N=2^n,\ n\ge 3$	4	不满足	完备	基序列组合
文献[10]	$N=2f+1$，素数	3	不满足	完备	2阶经典分圆类
	$N=4f+1$，素数	5	不满足	完备	4阶经典分圆类
文献[11]	$N=p(p+2),\ p$ 为素数	2	满足	完备	广义分圆类
文献[12]	$N=v,\ v=2^{m+2}-1,\ m\ge 0$	2	满足	完备	差集(v,k,λ)
	$N=v,\ v=p(p+2),\ p$ 为素数	2	满足	完备	差集(v,k,λ)
文献[13]	$N=2v,\ v=2^m-1\equiv 3(\bmod 4)$	4	满足	完备	差集(v,k,λ)
	$N=2v,\ v=2^t-1,\ t\ge 2$	4	满足	完备	差集(v,k,λ)
	$N=2v,\ v=p(p+2),\ p$ 为素数	4	满足	完备	差集(v,k,λ)
	$N=2v,\ v=4s^2+27=2^t-1$	4	满足	完备	差集(v,k,λ)
文献[17,18,19]	$N=2^m-1$	2	满足	完备	2元伪随机序列
文献[20]	$N=p^m-1,\ p$ 为素数	p	满足	几乎完备	p元伪随机序列
本文	$N=p^m-1,\ p$ 为素数	$p-1$	满足	几乎完备	p元伪随机序列

出了当 $p=3$ 和 $p=5$ 时式(19)的一种特殊解，当 $p>5$ 时，仅仅利用文献[20]的结论很难得到相应的高斯整数序列。本文构造方法中，$p-1$ 个高斯整数 $g_1,g_2,\cdots,g_{p-1}$ 只需满足式(21)条件：

$$\sum_{t=1}^{p-1} g_t = 0,\ g_t \neq 0 \tag{21}$$

通过比较式(20)与式(21)可以发现，本文方法可以很容易求解得到满足条件的高斯整数集合，如例 2 构造了阶数为 10 的高斯整数序列。本文方法可以方便地构造出较大阶数的高斯整数序列，这是已有方法所不能得到的。

具有良好自相关性能的高斯整数序列已经广泛应用到无线通信系统中，如文献[4]提出了基于完备高斯整数序列的码分多址系统(PGIS-CDMA)，文献[22]将完备高斯整数序列应用到 OFDM 无线系统中，实现了降低信号峰均功率比的目的。文献[23]将高斯整数序列应用到 Comb-spectrum CDMA 中，大大降低了发射与接收机的复杂度。本文方法构造了具有良好自相关性能且满足平衡性的高斯整数序列，因此可以为上述基于高斯整数序列的通信系统提供大量可用序列。

5　结束语

本文给出了一类几乎完备高斯整数序列的构造方法。该方法主要利用伪随机序列的二状态平衡性，通过构造满足条件的高斯整数集合，然后通过映射函数，利用 p 元伪随机序列构造得到阶数为 $p-1$ 的高斯整数序列。同已有的同类方法相比，本文方法大大简化了高斯整数需满足的条件，便于构造出较大阶数的高斯整数序列。另外，本文得到的高斯整数序列满足平衡性，这是已有方法所不能达到的。该类序列在无线通信系统及雷达系统中具有广泛的应用前景。

参 考 文 献

[1] PARRAUD P. On the non-existence of (almost-) perfect quaternary sequences[J]. *Lecture Notes in Computer Science*, 2001, 2227: 210–218.

[2] JUNGNICKEL D and POTT A. Perfect and almost perfect sequences[J]. *Discrete Applied Mathematics*, 1999, 95(1/3): 331–359.

[3] BOZTAS S and PARAMPALLI U. Nonbinary sequences with perfect and nearly perfect autocorrelations[C]. Proceedings of International Symposium on Information Theory (ISIT), Austin, 2010: 13–18.

[4] CHANG Hohsuan, LIN Shiehchiang, and LEE Chongdao. A CDMA scheme based on perfect Gaussian integer sequences [J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2017, 75: 70–81. doi: 10.1016/j.aeue.2017.03.008.

[5] WANG Senhung, LI Chihpeng, CHANG Hohsuan, *et al.* A systematic method for constructing sparse Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(1): 365–376. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2498185.

[6] FAN Pingzhi and DARNELL M. Maximual length sequences over Gaussian integers[J]. *Electronics Letters*, 1994, 30(16): 1286–1287. doi: 10.1049/el:19940913.

[7] HU Weiwen, WANG Senhung, and LI Chihpeng. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6074–6079. doi: 10.1109/TSP.2012.2210550.

[8] PEI Soochang and CHANG Kuowei. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1040–1044. doi: 10.1109/LSP.2014.2381642.

[9] CHANG Hohsuan, LI Chihpeng, LEE Chongdao, *et al.* Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 4107–4115. doi: 10.1109/TIT.2015.2438828.

[10] YANG Yang, TANG Xiaohu, and ZHOU Zhengchun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*. 2012, 19(10): 615–618. doi: 10.1109/LSP.2012.2209642.

[11] MA Xiuwen, WEN Qiaoyan, ZHANG Jie, *et al.* New perfect Gaussian integer sequences of periodic *pq*[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2013, E96-A(11): 2290–2293. doi: 10.1587/transfun.E96.A.2290.

[12] CHEN Xinjiao, LI Chunlei, and RONG Chunming. Perfect Gaussian integer sequences from cyclic difference sets[C]. 2016 IEEE International Symposium on Information Theory, Barcelona, Spain, 2016: 115–119. doi: 10.1109/ISIT.2016.7541272.

[13] PENG Xiuping, REN Jiadong, XU Chengqian, *et al.* Gaussian integer sequences of degree-4 using difference sets [J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(12): 2604–2608. doi: 10.1587/transfun.E99.A.2604.

[14] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的完备高斯整数序列的构造方法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

CHEN Xiaoyu, XU Chengqian, and LI Yubo. New Constructions of perfect Gaussian integer sequences[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

[15] 刘凯, 姜昆. 交织法构造高斯整数零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.
LIU Kai and JIANG Kun. Construction of Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

[16] 刘涛, 许成谦, 李玉博. 基于差集构造零相关区高斯整数序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(9): 2277–2281. doi: 10.11999/JEIT161177.
LIU Tao, XU Chengqian, and LI Yubo. Construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets based on difference sets[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(9): 2277–2281. doi: 10.11999/JEIT161177.

[17] LEE Chongdao, HUANG Yupei, CHANG Yaotsu, *et al*. Perfect Gaussian integer sequences of odd period 2^m–1[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(7): 881–885. doi: 10.1109/LSP.2014.2375313.

[18] LEE Chongdao, LI Chihpeng, CHANG Hohsuan, *et al*. Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. *IET Communications*, 2016, 10(12): 1542–1552. doi: 10.1049/ iet-com.2015.1144.

[19] LEE Chongdao and HONG Shaohua. Generation of long perfect Gaussian integer sequences[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24(4): 515–519. doi: 10.1109/LSP.2017.2674972.

[20] LEE Chondao and CHEN Yanhaw. Families of Gaussian integer sequences with high energy efficiency[J]. *IET Communications,* 2016, 10(17): 2416–2421. doi: 10.1049/iet-com.2016.0404.

[21] GOLOMB W and GONG Guang. Signal Design for Good Correlation: For Wireless Communication, Cryptography, and Radar[M]. Camridge University Press, 2005: 152–154.

[22] WANG Senhung, LI Chihpeng, LEE Kuanchou, *et al.* A novel low-complexity precoded OFDM system with reduced PAPR [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(6): 1366–1376. doi: 10.1109/TSP.2015.2389751.

[23] WANG Senhung and LI Chihpeng. Novel comb spectrum CDMA system using perfect Gaussian integer sequences[C]. 2015 IEEE Global Communications Conference, GLOBECOM, San Diego, USA, 2015: 1–6.

李玉博： 男，1985 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为无线通信中的序列设计、编码理论.

陈 邈： 男，1993 年生，硕士生，研究方向为无线通信中的序列设计.