

## 基于子空间的三阶多项式相位信号快速稀疏分解算法

欧国建<sup>①②</sup> 蒋清平<sup>\*①</sup> 秦长春<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(重庆大学飞行器测控与通信教育部重点实验室 重庆 400044)

<sup>②</sup>(重庆电子工程职业学院软件学院 重庆 401331)

**摘要:** 针对稀疏分解冗余字典中原子数量庞大的缺点, 该文提出一种三阶多项式相位信号快速稀疏分解算法。该算法根据三阶多项式相位信号的特点, 把原有信号变换成两个子空间信号, 并根据这两个子空间信号构建相应的冗余字典, 然后采用正交匹配追踪法来完成其稀疏分解, 最后利用稀疏分解原理完成原有信号的稀疏分解。该算法把原有信号变换成两个不同子空间信号, 构建了两个不同的冗余字典, 对比采用一个冗余字典库, 这种采用两个冗余字典的算法大大减少了原子数量, 并且通过快速傅里叶变换, 在一个冗余字典进行稀疏分解时, 同时找到另一个冗余字典中的最匹配的原子。因此该算法通过减少原子数量和采用快速傅里叶变换大大加快了稀疏分解速度。实验结果表明, 相比于采用 Gabor 原子构建的冗余字典, 采用匹配追踪算法与遗传算法及最近提出的基于调制相关划分的快速稀疏分解, 它的稀疏分解速度更快, 并且具有更好的收敛性。

**关键词:** 三阶多项式相位信号; 子空间; 快速傅里叶变换; 正交匹配追踪; 稀疏分解

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2018)03-0648-08

**DOI:** 10.11999/JEIT170593

## A Fast Sparse Decomposition for Three-order Polynomial Phase Signal Based on Subspace

OU Guojian<sup>①②</sup> JIANG Qingping<sup>①</sup> QING Changchun<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(Key Laboratory of Aircraft Tracking Telemetry & Command and Communication, Ministry of Education, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

<sup>②</sup>(School of Software, Chongqing College of Electronic Engineering, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** In view of the defect for large number of atoms in the over-complete dictionary during sparse decomposition, this paper presents a fast sparse decomposition algorithm for three-order polynomial phase signal based on subspace. According to the characteristic of three-order polynomial phase signal, the original signal is transformed into two subspace signals, then the atoms are structured based on the two subspace signals in the over-complete dictionary, and the two subspace signals are sparsely decomposed by using orthogonal matching pursuit algorithm. Finally, the sparse decomposition for the original signal is completed by using the theory of the sparse decomposition. In the algorithm, three-order polynomial phase signal is transformed into two subspace signals, and two over-complete dictionaries are structured based on the two subspace signals. Compared to one over-complete dictionary, the atoms are reduced enormously by using two over-complete dictionaries in the algorithm, and one matching atom can be obtained in one over-complete dictionary when another matching atom in another over-complete dictionary is obtained by using fast Fourier transform. Therefore the method can sparsely decompose three-order polynomial phase signal with low computational complexity by reducing the atoms and using fast Fourier transform. Simulation results show that the computational efficiency of the proposed method is better than that of using Gabor atoms, genetic algorithm and the algorithm based on modulation correlation partition, and the sparsity is better.

**Key words:** Three-order Polynomial Phase Signal (PPS); Subspace; Fast Fourier Transform (FFT); Orthogonal Matching Pursuit (OMP); Sparse decomposition

收稿日期: 2017-06-21; 改回日期: 2017-11-29; 网络出版: 2018-01-11

\*通信作者: 蒋清平 jiangqp@cqu.edu.cn

基金项目: 重庆市教委科学技术研究项目(KJ1602909, KJ1503004), 国家自然科学基金(61371164), 重庆电子工程职业学院智能机器人技术研究中心(XJPT201705)

Foundation Items: The Project of Chongqing Municipal Education Commission (KJ1602909, KJ1503004), The National Natural Science Foundation of China (61371164), Intelligent Robot Technology Research Center of Chongqing College of Electronic Engineering (XJPT201705)

## 1 引言

多项式相位信号出现在许多领域，比如雷达、声呐、地震波和无线通信等<sup>[1-5]</sup>，而三阶多项式相位信号在雷达信号处理中常用于对复杂移动目标的回波相位进行建模<sup>[6,7]</sup>。由于三阶多项式相位信号的广泛应用，因此对它的处理也引起许多研究者的关注，如对它的检测和参数估计，以及去噪等<sup>[8,9]</sup>。而信号稀疏分解及稀疏表示能对信号进行更紧凑、能量更集中的分解，是信号分解与表示的新方法，它使得信号的主要信息可用少数的原子得以表达<sup>[10]</sup>，这和传统方法有着本质的不同，具有许多优良特性，它解决了传统方法仅用一种方式对信号的表示<sup>[11]</sup>。稀疏信号处理最主要的优点是对字典原子几乎没有特定要求，这为特定的应用问题提供了极大的灵活性。在处理多项式相位信号及其多分量信号时，可以选取对应的多项式相位函数作为原子，并通过在合适范围内以合适的精度将其各个参数离散化以构造出相应的过完备原子库。

稀疏信号处理是信号分解与表示方面的新方法，和传统的信号分解与表示方法有着本质的不同。近些年来，稀疏分解及稀疏表示在信号处理中已经有了广泛的应用，其研究异常活跃，它主要是解决优化逼近问题<sup>[12]</sup>。近十年来已提出了许多信号稀疏表示或稀疏分量分析的方法。主要有框架方法 MOF(Method Of Frames)<sup>[13]</sup>，FOCUSS(FOCaI Undetermined System Solver)<sup>[14]</sup>，基追踪 BP(Basis Pursuit)<sup>[15]</sup>，最好的正交基 BOB(Best Orthogonal Basis)<sup>[16]</sup>，匹配追踪 MP(Matching Pursuit)及其改进方法<sup>[17]</sup>。这些方法都有各自的优点和缺陷，目前正在研究发展之中。目前，流行的方法可分为两类：贪婪方法和凸松弛方法。贪婪方法通过寻求一系列局部最优的选项以尝试确定一个全局最优解；凸松弛方法则用相关的凸规划来取代组合优化稀疏逼近问题。前者的主要代表是 MP，后者为 BP。

不管是贪婪方法或者凸松弛方法，都面临过完备字典中原子数量庞大的问题，从而导致了较高的计算复杂度。为了减少计算复杂度，提高稀疏分解速度，许多研究者在这方面提出了各种方法，比如遗传算法<sup>[18,19]</sup>，粒子群算法<sup>[20,21]</sup>，但这些智能算法在快速稀疏分解中存在一定的随机性，可能不适用于某些应用场合，并且在分解速度方面也有待进一步的提高。另外一些研究者根据原子与原子库的结构特性，提出了相应的快速稀疏分解算法，比如基于核心原子库的快速算法<sup>[22]</sup>和基于集合划分的快速算法<sup>[23]</sup>，这类快速算法虽然没有随机性问题，但主要以 Gabor 原子为研究对象，以减少原子库中原子数

量为目的，稀疏分解速度以及收敛速度仍然有待进一步的提高。为了减少过完备字典中原子的数量，提高信号的稀疏分解速度，针对三阶多项式相位信号的特点，本文提出了采用子空间的方法把三阶多项式相位信号转换成两个子空间信号，并采用两个过完备字典的方式来减少搜寻的原子数量，同时利用快速傅里叶变换来加快搜寻匹配原子的速度，对比于采用 Gabor 原子构建的冗余字典，所提算法极大提高了稀疏分解速度和收敛速度。

## 2 信号的稀疏分解及正交匹配追踪算法

稀疏分解的目的是把一个给定的信号  $\mathbf{y}$  表示成少量原子的组合，可表示为

$$\mathbf{y} = \Phi\boldsymbol{\theta} = \sum_{m=1}^M \theta_m \Phi_m \quad (1)$$

其中，信号  $\mathbf{y}$  是一个  $N \times 1$  阶列向量， $\boldsymbol{\theta}$  为  $M \times 1$  阶展开系数向量，字典  $\Phi$  为  $N \times M$  阶矩阵，它的列为展开函数  $\Phi_m$ ，即  $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m, \dots, \Phi_M\}$ 。对于该式，可以看出，构成信号展开系数向量  $\boldsymbol{\theta}$  中的零分量越多，则该信号越稀疏。根据逼近论的观点，通过选取好的展开函数  $\Phi_m$ ，使得用较少数目的向量的线性组合就可以精确地重构信号  $\mathbf{y}$ 。这种稀疏分解对信号压缩、信号分析和特征提取是十分有利的，它意味着展开函数与信号的结构高度相关。用过完备的时频原子字典  $\Phi$  可以对广泛的时频特性给出简洁、稀疏的表示，可以根据信号本身来更灵活地选取和构造其展开函数  $\Phi_m$ ，使得展开项对某个特定信号能给出更好的物理解释，且不受正交性的制约。从信号稀疏分解和稀疏性的定义可以看出：信号越稀疏，展开系数向量  $\boldsymbol{\theta}$  的  $l^p$  ( $p \leq 1$ ) 模越小；信号越稀疏，展开系数向量  $\boldsymbol{\theta}$  中各个分量的绝对值按从大到小的顺序排列后，向零衰减的速度越快；稀疏分析能够对信号进行紧凑、能量集中的分解。为了得到信号的稀疏分解，必须解决优化逼近的最优问题，本文采用了正交匹配追踪算法。在匹配追踪算法的基础上，正交匹配追踪算法对该算法进一步改进，对前者每次迭代获得的匹配原子进行 Gram-Schmidt 正交化处理，其目的是为了加快算法的收敛速度<sup>[24]</sup>。

正交匹配追踪(OMP)算法分解信号的具体过程如下：

首先，采用匹配追踪算法从过完备字典  $\Phi$  中选出与待分解信号  $\mathbf{y} = R^0 \mathbf{y}$  最匹配的原子  $g_{\gamma_0}$ ，使其满足

$$\left| \langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_0} \rangle \right| = \sup_{\gamma \in \Gamma} \left| \langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma} \rangle \right| \quad (2)$$

其中， $\langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_0} \rangle$  表示信号  $R^0 \mathbf{y}$  与  $g_{\gamma_0}$  的内积。因此，

信号  $\mathbf{y}$  可以分解为在  $g_{\gamma_0}$  上的分量和残余两部分, 即

$$\mathbf{y} = R^0 \mathbf{y} = \langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_0} \rangle g_{\gamma_0} + R^1 \mathbf{y} \quad (3)$$

其中,  $R^1 \mathbf{y}$  是用最佳原子对原信号进行最佳匹配后的残余。  $g_{\gamma_0}$  与  $R^1 \mathbf{y}$  显然是正交的, 所以有

$$\|R^0 \mathbf{y}\|^2 = \left| \langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_0} \rangle \right|^2 + \|R^1 \mathbf{y}\|^2 \quad (4)$$

因为存在(3)式, 所以  $\|R^1 \mathbf{y}\|^2$  此时最小。 所得到稀疏分解的系数为

$$\alpha_0 = \langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_0} \rangle \quad (5)$$

对最佳匹配后的残余可以不断进行上面同样的分解过程, 即

$$R^i \mathbf{y} = \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i} \rangle g_{\gamma_i} + R^{i+1} \mathbf{y} \quad (6)$$

其中,  $g_{\gamma_i}$  满足

$$\left| \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i} \rangle \right| = \sup_{\gamma \in \Gamma} \left| \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma} \rangle \right| \quad (7)$$

每次迭代得到的稀疏分解系数如式(8):

$$\alpha_i = \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i} \rangle \quad (8)$$

对每次迭代获得的匹配原子  $g_{\gamma_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, K$ ,  $K$  表迭代次数, 进行 Gram-Schmidt 正交化处理, 如式(9):

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{r_0} &= g_{r_0} \\ \bar{g}_{r_1} &= g_{r_1} - \frac{\langle g_{r_1}, \bar{g}_{r_0} \rangle}{\langle \bar{g}_{r_0}, \bar{g}_{r_0} \rangle} \bar{g}_{r_0} \\ &\vdots \\ \bar{g}_{r_i} &= g_{r_i} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\langle g_{r_i}, \bar{g}_{r_j} \rangle}{\langle \bar{g}_{r_j}, \bar{g}_{r_j} \rangle} \bar{g}_{r_j} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

其中,  $\bar{g}_{r_i}$  表示  $g_{r_i}$  的正交化处理。

### 3 基于子空间的稀疏分解算法描述

在这一节里, 对该算法的思想进行详细的描述, 并提出了基于子空间的稀疏分解算法流程, 同时对该算法的复杂度进行了分析。

#### 3.1 算法思想

三阶多项式相位信号模型如式(10)<sup>[25]</sup>:

$$y(n) = y_s(n) + v(n) = A \exp \left( j \sum_{i=0}^3 a_i (n\Delta)^i \right) + v(n), \quad n \in [-N/2, N/2] \quad (10)$$

其中,  $A$  表示信号的幅值,  $a_i$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$  是信号的参数,  $v(n)$  是均值为 0 和方差为  $\sigma^2$  的加性高斯白噪声。 文献[25]提出了基于子空间的多项式相位信号的参数估计算法, 该算法通过对多项式相位信号的变换, 转换成两个子空间信号, 然后通过多重信号分类(MUltiple SIgnal Classification, MUSIC)完成对

信号的参数估计。 借鉴子空间的思想, 把三阶多项式相位信号变成两个子空间信号, 转换如式(11):

$$\left. \begin{aligned} y_1(n) &= y(n)y(-n) \\ &= A^2 \exp \left( j2(a_0 + a_2(n\Delta)^2) \right) + v_1(n) \\ y_2(n) &= y(n)y^*(-n) \\ &= A^2 \exp \left( j2(a_1(n\Delta) + a_3(n\Delta)^3) \right) + v_2(n) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中,  $v_1(n)$  和  $v_2(n)$  表示信号变换后的噪声干扰项,  $n \in [1, N/2]$ , 从该式中可以看出, 对于  $y_1(n)$  的稀疏分解, 其计算复杂度不高, 仅需 1 维搜索, 过完备字典中原子可根据  $y_1(n)$  的信号特征设为  $g_r(n) = \exp(j\omega_r(n\Delta)^2)$ 。 对于  $y_2(n)$ , 若采用时频 Gabor 原子, 则字典中原子数量比较庞大, 并且该原子对于三阶多项式相位的稀疏分解, 其收敛速度并不快。 对此, 本文提出了一种快速的稀疏分解方法。 首先, 考虑  $y_2(n)$  的结构, 构建如式(12)所示的原子。

$$g_{\gamma} = \exp \left\{ j \left( f_u(n\Delta) + K_v(n\Delta)^3 \right) \right\} \quad (12)$$

原子  $g_{\gamma}$  的长度与信号  $y_2(n)$  本身长度相同, 原子时频参数组为  $\gamma = (f_u, K_v)$ ,  $f_u$  和  $K_v$  分别对应  $y_2(n)$  信号的一阶相位系数和三阶相位系数参量。 假设  $U$  为  $f_u$  的搜索个数;  $V$  为调频斜率搜索个数;  $f_u$  和  $K_v$  按照搜索精度和范围均匀取值, 可构造出过完备原子库  $\mathbf{G}_f \{g_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}$ 。

$$\mathbf{G}_f \{g_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma} = \begin{bmatrix} g_{\gamma=(f_1, K_1)} & g_{\gamma=(f_1, K_2)} & \cdots & g_{\gamma=(f_1, K_V)} \\ g_{\gamma=(f_2, K_1)} & g_{\gamma=(f_2, K_2)} & \cdots & g_{\gamma=(f_2, K_V)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\gamma=(f_U, K_1)} & g_{\gamma=(f_U, K_2)} & \cdots & g_{\gamma=(f_U, K_V)} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,  $\Gamma$  为参数组  $\gamma$  的集合, 整个原子库的原子个数为  $U \times V$  个, 假设  $U = V = 800$ , 则有  $U \times V = 640000$ , 假设信号长度  $N$  设为 256, 则这个原子数量比信号长度  $N$  大得多, 同样采用 Gabor 原子, 其原子的数量为  $L_D = 52(N \log_2 N + N - 1) = 119756$ 。 可以看出, 构建这样的原子其数量远大于采用 Gabor 原子, 因此, 为了提高稀疏分解速度, 需要采用一定的算法来减少计算量, 达到快速稀疏分解的目的。

由于在正交匹配追踪算法中, 每次迭代都要计算原子与残差的内积, 而采用的原子  $g_{\gamma}$  其结构特征与信号  $y_2(n)$  相同, 对  $y_2(n)$  进行稀疏分解的第  $M$  次迭代后的残差  $R^M \mathbf{y}$  为

$$R^M \mathbf{y} = y_2(n) - \sum_{i=0}^{M-1} \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i} \rangle g_{\gamma_i} \quad (14)$$

因此可以确定  $R^M \mathbf{y}$  仍然是一个三阶多项式相位信号, 又由于

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \max \left\langle \left\langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i} \right\rangle \right\rangle \\
&= \max \left\langle \sum_{n=1}^N A^2 \exp \left( j2 \left( a_1^i(n\Delta) + a_3^i(n\Delta)^3 \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp \left( -j \left( f_u(n\Delta) + K_v(n\Delta)^3 \right) \right) \right\rangle \\
&= \max \left\langle \sum_{n=1}^N A^2 \exp \left( j2 \left( \left( a_1^i - 0.5f_u \right)(n\Delta) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \left( a_3^i - 0.5K_v \right) a_3(n\Delta)^3 \right\rangle \quad (15)
\end{aligned}$$

从式(15)可以看出, 当  $a_1^i=f$  并且  $a_3^i=K_v$ ,  $\alpha_i$  取得最大值, 而

$$\begin{aligned}
&\exp \left( j2 \left( a_1^i(n\Delta) + a_3^i(n\Delta)^3 \right) \right) \\
&\quad \cdot \exp \left( -j \left( f_u(n\Delta) + K_v(n\Delta)^3 \right) \right) \\
&= \exp \left( j2a_1^i - f_u \right)(n\Delta) \\
&\quad \cdot \exp \left( j2 \left( a_3^i - 0.5K_v \right) a_3(n\Delta)^3 \right) \quad (16)
\end{aligned}$$

根据傅里叶变换的公式:

$$\left. \begin{aligned}
Y(k) &= \sum_{j=1}^N y(j) \omega_N^{(j-1)(k-1)} \\
\omega_N &= e^{(-2\pi i)/N}
\end{aligned} \right\} \quad (17)$$

可知, 对于  $y_2(n)$  的稀疏分解, 可设定原子为

$$g_{\gamma_2} = \exp \left( jK_v(n\Delta)^3 \right) \quad (18)$$

从该原子的结构可知, 它只有一个频率参数  $K_v$ , 采用正交匹配追踪算法寻找最匹配原子时, 对比于式(12)采用  $g_\gamma$  原子, 它的搜索维度大大降低, 由 2 维变为 1 维, 从而计算复杂度也大大减少。由式(16)和式(17), 对于残差与原子  $g_{\gamma_2}$  的每一次共轭相乘运算, 进行快速傅里叶变换, 并求得每次傅里叶变换的最大值, 这个最大值的个数由频率参数  $K_v$  的变化个数决定。最后, 在这些最大值中寻找出最大值, 该最大值所对应的参数即为最匹配的  $g_{\gamma_2}$  原子和最匹配的一阶相位系数。假定最匹配的  $g_{\gamma_2}$  原子对应的相位系数为  $K_{v_2}$ , 最匹配的一阶相位系数为  $f_{u_2}$ , 则可得到  $y_2(n)$  稀疏分解中最匹配的原子为

$$g'_{\gamma_2} = \exp \left( j \left( K_{v_2}(n\Delta)^3 + f_{u_2}(n\Delta) \right) \right) \quad (19)$$

在对  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$  完成了稀疏分解后, 根据式(11)可得

$$\begin{aligned}
y_r(n) &= y_1(n)y_2(n) = A^2 \exp \left( j2 \left( a_0 + a_2(n\Delta)^2 \right) \right) A^2 \\
&\quad \cdot \exp \left( j2 \left( a_1(n\Delta) + a_3(n\Delta)^3 \right) \right) + v_3(n) \\
&= A^4 \exp \left( j2 \left( a_3(n\Delta)^3 + a_2(n\Delta)^2 + a_1(n\Delta) + a_0 \right) \right) \\
&\quad + v_3(n) \quad (20)
\end{aligned}$$

式中,  $v_3(n)$  表示噪声干扰项, 从式(20)可知, 信号  $y_s(n)$  的瞬时频率为  $y_r(n)$  的一半, 幅值为  $y_r(n)$  幅值的 4 次方根。又由于经  $M$  次稀疏分解后  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$  所得的重构信号分别为

$$\left. \begin{aligned}
y'_1(n) &= \Phi_1 \theta_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \left\langle R^i y_1, g_{\gamma_i}^1 \right\rangle g_{\gamma_i}^1 \\
y'_2(n) &= \Phi_2 \theta_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \left\langle R^i y_2, g_{\gamma_i}^2 \right\rangle g_{\gamma_i}^2
\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(21)中, 对于信号  $y_1(n)$  的稀疏分解, 其原子  $g_\gamma^1$  可设为  $g_\gamma^1 = \exp(j\omega_r(n\Delta)^2)$ , 其结构与  $y_1(n)$  相同, 并且  $y_1(n)$  频率在原子频率范围内, 因此在完成第 1 次分解后, 其残差为

$$\begin{aligned}
R^1 \mathbf{y} &= y_1 - \left\langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_1}^1 \right\rangle g_{\gamma_1}^1 \\
&= A^2 \exp \left( j2 \left( a_0 + a_2(n\Delta)^2 \right) \right) \\
&\quad \cdot \left\langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_1}^1 \right\rangle \exp \left( j\omega_{r_1}(n\Delta)^2 \right) \\
&= A^2 \exp \left( j2 \left( a_0 + a_2(n\Delta)^2 \right) \right) \\
&\quad \cdot \left\langle \frac{\left\langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_1}^1 \right\rangle}{A^2 \exp(j2a_0)} \right. \\
&\quad \left. \cdot \exp \left( -j \left( \left( 2a_2 - \omega_{r_1} \right)(n\Delta)^2 \right) \right) \right\rangle \\
&= A^2 \exp \left( j2 \left( a_0 + a_2(n\Delta)^2 \right) \right) \\
&\quad \cdot \left( 1 - M \times \exp \left( -j\delta a_2(n\Delta)^2 \right) \right) \\
&\approx A^2 \exp \left( j2a_0 \right) \exp \left( j2a_2(n\Delta)^2 \right) \\
&\quad \times M \times \delta a_2(n\Delta)^2 \quad (22)
\end{aligned}$$

式中,  $M = \frac{\left\langle R^0 \mathbf{y}, g_{\gamma_1}^1 \right\rangle}{A^2 \exp(j2a_0)}$ ,  $\delta a_2 = 2a_2 - \omega_{r_1}$ , 由于  $y_1(n)$

频率在原子频率范围内, 因此  $\delta a_2$  是一个很小的数。从该式可以看出, 信号的频率决定了对原子的选择, 如果信号频率扩大 2 倍, 则原子频率的选择也应扩大 2 倍。于是可知, 对于采用相同类型的原子组成的冗余字典, 信号  $y_1(n)y_1(n)$  通过正交匹配追踪算法得到的原子相位系数是  $y_1(n)$  的 2 倍, 同样,  $y_1(n)$  稀疏分解后的原子相位系数是信号  $y_{11}(n) = \sqrt{A} \exp(j(a_0 + a_2(n\Delta)^2))$  的 2 倍。以此类推到  $y_2(n)$  同样如此, 这就意味着只要求得  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$  的稀疏分解, 通过对所得原子的相位系数进行收缩, 就可得到信号  $y_{11}(n) = \sqrt{A} \exp(j(a_0 + a_2(n\Delta)^2))$  和  $y_{22}(n) = \sqrt{A} \exp(j(a_1(n\Delta) + a_3(n\Delta)^3))$  的原子, 这里设定为

$$\left. \begin{aligned}
g_{\gamma_i}^1 &= \exp \left( 0.5j\omega_{r_i}(n\Delta)^2 \right) \\
g_{\gamma_i}^2 &= \exp \left( 0.5j \left( K_{v_2}(n\Delta)^3 + f_{u_2}(n\Delta) \right) \right)
\end{aligned} \right\} \quad (23)$$

于是有

$$\begin{aligned} y_1'(n) &= \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i}^1 \rangle g_{\gamma_i}^1 \right\} \\ y_2'(n) &= \left\{ \sum_{i=0}^{M-1} \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i}^2 \rangle g_{\gamma_i}^2 \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

又根据

$$\begin{aligned} y_{11}(n)y_{22}(n) &= \left( \sum_{i=0}^{M-1} \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i}^1 \rangle g_{\gamma_i}^1 \right) \left( \sum_{i=0}^{M-1} \langle R^i \mathbf{y}, g_{\gamma_i}^2 \rangle g_{\gamma_i}^2 \right) \\ &= \sqrt{A}\sqrt{A} \exp(j(a_0 + a_2(n\Delta)^2)) \\ &\quad \cdot \exp(j(a_1(n\Delta) + a_3(n\Delta)^3)) \\ &= A \exp(j(a_3(n\Delta)^3 + a_2(n\Delta)^2 + a_1(n\Delta) + a_0)) \end{aligned} \quad (25)$$

从而完成了三阶多项式相位信号  $y(n)$  快速的稀疏分解。

### 3.2 算法

根据以上的分析和推断, 可得如下基于子空间的三阶多项式相位信号快速稀疏分解算法:

(1) 将三阶多项式相位信号  $y(n)$  进行变换, 使它产生两个子空间多项式相位信号  $y_1(n)$  和  $y_2(n)$ , 分别表示为  $y_1(n) = y(n)y(-n)$ ,  $y_2(n) = y(n)y^*(-n)$ ;

(2) 构造基于二阶相位参数  $a_2$  的字典  $\Phi_1$ , 其原子设为  $g_{\gamma_2} = \exp(jC_i(n\Delta)^2)$ , 采用正交匹配追踪算法, 获得最匹配的原子;

(3) 得到  $y_1(n)$  所有的最匹配原子后, 需要对这些原子的  $C_i$  缩减一半处理;

(4) 构造基于三阶相位参数  $a_3$  的字典  $\Phi_2$ , 其原子设为  $g_{\gamma_3} = \exp(jK_i(n\Delta)^3)$ , 并设定搜索精度, 根据搜索精度可设定原子的个数为  $V$ ;

(5) 每一个原子与  $y_2(n)$  信号共轭相乘, 并对乘积后的信号进行快速的傅里叶变换, 同时求得傅里叶变换绝对值的最大值;

(6) 在这些最大值中求取最大值, 其对应的原子即为最匹配的原子, 同时可得到一阶相位参数  $K_v$ , 于是可得  $y_2(n)$  信号最匹配的原子  $g_{\gamma_v} = \exp(j(f_u(n\Delta) + K_v(n\Delta)^3))$ ;

(7) 根据  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  中最匹配原子的参数, 并对该原子进行正交化处理;

(8) 得到  $y_2(n)$  所有的最匹配原子后, 需要对  $f_u$  和  $K_v$  缩减一半处理;

(9) 根据  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  中得到的最匹配原子, 通过相乘得到基于三阶多项式相位信号  $y(n)$  稀疏分解的原子, 从而完成其稀疏分解。

### 3.3 算法复杂度分析

对于采用 Gabor 原子的冗余字典, 其原子数量为

$$L_D = \sum_{j=1}^{\log_2 N} \sum_{p=0}^{N2^{-j+1}} \sum_{k=0}^{2^{j+1}} \sum_{i=0}^{12} 1$$

简化为  $L_D = 52(N \log_2 N + N - 1)^{[23]}$ , 对此可以看出, 原子数量  $L_D$  是一个很大的数, 比如当信号长度  $N = 1024$ , 则原子数量  $L_D = 585676$ , 这样一个庞大的数使得计算量很大。而在本文提出的算法里, 由于把信号分解成两个子空间信号, 对于每个子空间信号, 其冗余字典中原子的数量由参数范围和设定的精度决定, 这与信号的长度无关, 比如  $C_i$  的搜索范围设定  $[1 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}]$ , 精度设为  $1 \times 10^{-6}$ , 则原子数量为 4001 个, 又设定  $K_i$  的搜索范围设定为  $[1 \times 10^{-6}, 5 \times 10^{-6}]$ , 精度设为  $1 \times 10^{-9}$ , 则原子数量为 4001 个, 这样总的原子数为 8002 个, 这个数与采用 Gabor 原子相比, 其计算复杂度必然大大减少。

从算法的复杂度看, 采用 Gabor 原子的计算复杂度为  $O(N^4)$ , 而本文提出的算法, 对于第 1 个子空间信号(仅有二次相位的多项式相位信号), 它的稀疏分解复杂度为  $O(N)$ 。另一个子空间信号, 由于每个原子的处理都要用到 FFT, 而 FFT 的计算复杂度为  $O(N \lg N)$ , 因此它的稀疏分解复杂度为  $O(N^2 \lg N)$ 。

## 4 实验与结果分析

考虑加性高斯白噪声下的三阶多项式相位信号  $y(n) = \exp(j(a_3(n\Delta)^3 + a_2(n\Delta)^2 + a_1(n\Delta) + a_0)) + v(n)$ , 这里  $v(n)$  表示加性高斯白噪声, 信噪比设为  $\text{SNR} = 15 \text{ dB}$ , 参数  $(a_3, a_2, a_1, a_0)$  设为  $(a_3, a_2, a_1, a_0) = (2.75 \times 10^{-6}, 1.25 \times 10^{-3}, \pi/8, \pi/3)$ , 采样时间间隔  $\Delta = 0.5415$ , 信号长度设为  $N = 1024$ 。根据本文提出的快速稀疏分解算法, 对信号  $y(n)$  进行变换, 产生的两个子空间多项式相位信号, 分别表示为  $y_1(n) = y(n)y(-n)$ ,  $y_2(n) = y(n)y^*(-n)$ , 然后根据算法的第(2)步~第(6)步对这两个子空间信号进行稀疏分解。首先, 对于信号  $y_1(n)$ , 设定的原子为  $g_{\gamma_2} = \exp(jC_i(n\Delta)^2)$ , 搜索范围为  $(0, 3 \times 10^{-3}]$ , 搜索精度设为  $3 \times 10^{-6}$ , 则原子数量为 1000; 其次, 对于信号  $y_2(n)$ , 设定的原子为  $g_{\gamma_3} = \exp(jK_i(n\Delta)^3)$ , 搜索范围为  $(0, 6 \times 10^{-6}]$ , 搜索精度设为  $3 \times 10^{-9}$ , 则原子数量为 1000。对这两个子空间信号通过稀疏分解得到

的重构信号如图 1(a)和图 1(b)所示,从图中可以看出,经过 100 次迭代运算,两个子空间信号的重构信号均能较好地近似表示这两个信号,另外,从图 1(c)可以看出,通过对这两个子空间信号匹配原子的相位系数缩减一半处理,从而得到初始信号  $y(n)$  稀疏分解的匹配原子,通过这些原子,重构信号较好地近似表示  $y(n)$ 。

为了更好地体现基于子空间的算法的快速稀疏分解,这里以基于 Gabor 原子的 MP 算法,基于遗传算法的快速稀疏分解以及最近提出来的基于调制相关划分(Partition the over-complete dictionary Based on Modulation Correlation, PBMC)的快速稀疏分解进行对比。稀疏分解的迭代次数为 100 次,信号长度分别定义为 257, 313, 513 和 1025,这 4 种算法在相同的迭代次数条件下的运行时间如图 2 所示,从该图可以看出,对于不同的信号长度,很明显遗传算法的稀疏分解最快,MP 算法的计算复杂度最高,随着信号长度的增加,PBMC 算法的计算时间逐渐超过子空间算法。

虽然对于相同的迭代次数,子空间算法的稀疏分解速度不是最快的,然而这种算法的收敛速度非常快,如图 3 所示。从该图可以看出,通过 4 种算法得到的归一化分解系数比较,可以看出子空间算法进行分解要比其它算法稀疏得多,即分解系数的绝对值向零衰减的速度要快得多,这就意味着对于相同的稀疏分解门限,子空间算法必然需要的迭代次数是最少的。对此,根据上面不同的信号长度,设定稀疏分解门限为 10, 15, 20 和 35,则 4 种算法在不同的信号长度所用的时间如图 4 所示。从该图可知,在相同的信号长度下,对于相同的稀疏分解门限,子空间算法具有较快的稀疏分解速度,而且从图中可以看出,随着信号长度的增加,子空间算法与遗传算法进行稀疏分解所用的时间比较平稳,没有表现出较大的增长,而 MP 算法与 PBMC 算法存在指数性的增长。从计算效率上,子空间算法对比其它算法的效率如表 1 所示,从该表可以看出,

表 1 子空间算法与其它 3 种算法的效率比较

信号长度	遗传算法	PBMC 算法	MP 算法
257	10	9	780
313	11	12	1141
513	14	48	5827
1025	16	259	59950

子空间算法在给定的信号长度内,比遗传算法快 1 个数量级;对比 PBMC 算法,在信号长度为 257 时,子空间算法运算速度是其 9 倍,长度为 313 和 513 时,运算速度要快 1 个数量级,当长度为 1025 时,则要快 2 个数量级;对比 MP 算法,从表中明显可以看出,子空间算法的运算速度要快 2~4 数量级。

总之,从实验结果来看,基于子空间的快速的稀疏分解算法不仅具有快速的稀疏分解特性,而且有很好的收敛性。

### 5 结论

为了减少利用匹配追踪等算法实现三阶多项式相位信号的稀疏分解的运行时间,本文提出了基于子空间的三阶多项式相位信号快速稀疏分解算法,该算法首先对三阶多项式相位信号进行相应的变换,生成两个不同的子空间信号,然后根据这两个子空间信号设定相应的原子,并利用快速的傅里叶变换来加快稀疏分解速度。从理论推导和实验结果来看,本文提出的基于子空间的快速稀疏分解算法,对比与其它信号稀疏分解算法,不仅能加快三阶多项式相位信号的稀疏分解速度,而且具有更好的收敛速度。

由于冗余字典中原子结构与子空间信号相同或近似,对于三阶多项式相位信号,该算法的快速性和良好的收敛性不仅对于该信号的去噪处理具有重要的意义,而且对于该类信号参数估计也有重要的意义。

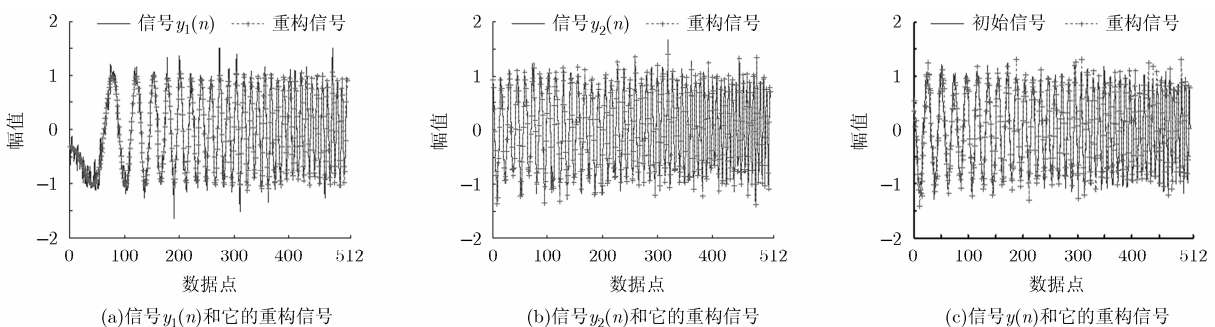


图 1 信号与它的重构信号

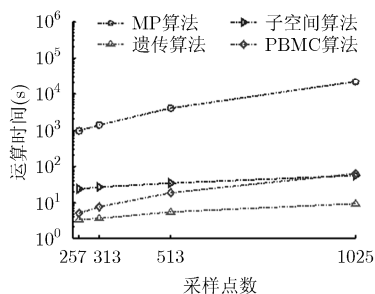


图2 迭代次数相同时4种算法的运行时间

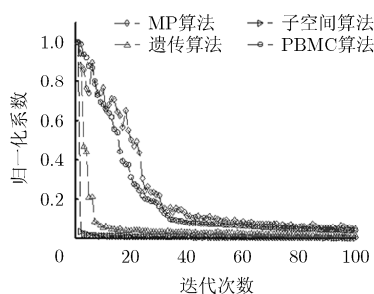


图3 归一化分解系数

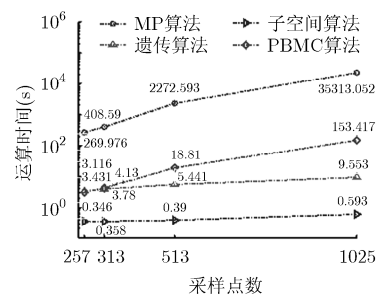


图4 门限相同时4种算法的运行时间

## 参考文献

- [1] DJUROVI I and SIMEUNOVI M. Parameter estimation of non-uniform sampled polynomial-phase signals using the HOCPPF-WD[J]. *Signal Processing*, 2015, 106(1): 253–258. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.08.007.
- [2] OU G J, YANG S Z, DENG J X, et al. A refined estimator of multicomponent third-Order polynomial phase signals[J]. *IEICE Transactions on Communications*, 2016, E99-B(1): 143–151. doi: 10.1587/transcom.2015EBP3131.
- [3] SIMEUNOVI M and DJUROVI I. Parameter estimation of multicomponent 2D polynomial-phase signals using the 2D PHAF-based approach[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(3): 771–782. doi: 10.1109/TSP.2015.2491887.
- [4] DENG Z, XU R, ZHANG Y, et al. Compound time-frequency domain method for estimating parameters of uniform-sampling polynomial-phase signals on the entire identifiable region[J]. *IET Signal Processing*, 2016, 10(7): 743–751. doi: 10.1049/iet-spr.2015.0361.
- [5] RAKOVI P, SIMEUNOVI M, and DJUROVI I. On improvement of joint estimation of DOA and PPS coefficients impinging on ULA[J]. *Signal Processing*, 2017, 134: 209–213. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.12.015.
- [6] LI Y, WU R, XING M, et al. Inverse synthetic aperture radar imaging of ship target with complex motion[J]. *IET Radar Sonar Naving*, 2008, 2(6): 395–403. doi: 10.1049/iet-rsn:20070101.
- [7] WANG Yong and JIANG Yicheng. ISAR imaging of a ship target using product high-order matched-phase transform[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2009, 6(4): 658–661. doi: 10.1109/LGRS.2009.2013876.
- [8] O'SHEA P. A fast algorithm for estimating the parameters of a quadratic FM signal[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(2): 385–393. doi: 10.1109/TSP.2003.821097.
- [9] 欧国建, 杨士中, 蒋清平, 等. 一种三阶多项式相位信号去噪的字典学习算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(2): 255–259. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00726.
- [10] JAFARI M G and PLUMBLEY M D. Fast dictionary learning for sparse representations of speech signals[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2011, 5(5): 1025–1031. doi: 10.1109/JSTSP.2011.2157892.
- [11] ZHAO Y, WU Z, YANG Z, et al. A novel signal sparse decomposition based on modulation correlation partition[J]. *Neurocomputing*, 2016, 171(1): 736–743. doi: 10.1016/j.neucom.2015.07.013.
- [12] MOHAMMADI M R, FATEMIZADEH E, and MAHOOR M H. Non-negative sparse decomposition based on constrained smoothed  $\ell^0$  norm[J]. *Signal Processing*, 2014, 100: 42–50. doi: 10.1016/j.sigpro.2014.01.010.
- [13] MARTI-LOPEZA F and KOENIG T. Approximating method of frames[J]. *Digital Signal Processing*, 2003, 13(3): 519–529. doi: 10.1016/S1051-2004(02)00024-6.
- [14] GORODNITSKY I F and BHASKAR D R. Sparse signal reconstruction from limited data using FOCUSS: A re-weighted minimum norm algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1997, 45(3): 600–616. doi: 10.1109/78.558475.
- [15] CHEN S, DONOHO D, and SAUNDERS M. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1999, 20(1): 33–61. doi: 10.1137/S1064827596304010.
- [16] MOHAMED A and DAVATZIKOS C. Shape representation via best orthogonal basis selection[C]. *International Conference on Medical Image Computing & Computer-Assisted Intervention*, 2004, 3216: 225–233. doi: 10.1007/978-3-540-30135-6\_28.
- [17] MALLAT S and ZHANG Z. Matching pursuits with time-frequency dictionaries[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1993, 41(12): 3397–3415. doi: 10.1109/78.258082.
- [18] 赵学军, 李育珍, 雷书或. 基于遗传算法优化的稀疏表示图像融合算法[J]. *北京邮电大学学报*, 2016, 39(2): 73–76. doi: 10.13190/j.jbupt.2016.02.015.

- ZHAO Xuejun, LI Yuzhen and LEI Shuyu. An Image fusion method with sparse representation based on genetic algorithm optimization[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2016, 39(2): 73-76. doi: 10.13190/j.jbupt.2016.02.015.
- [19] 全盛荣, 张天骐, 王俊霞, 等. 基于稀疏分解的SFM信号的时频分析方法[J]. *电子技术应用*, 2016, 42(6): 87-90. doi: 10.16157/j.issn.0258-7998.2016.06.024.
- QUAN Shengrong, ZHANG Tianqi, WANG Junxia, *et al.* A new time-frequency analysis method of sinusoidal frequency modulation signals based on sparse decomposition[J]. *Application of Electronic Technique*, 2016, 42(6): 87-90. doi: 10.16157/j.issn.0258-7998.2016.06.024.
- [20] 李应, 陈秋菊. 基于优化的正交匹配追踪声音事件识别[J]. *电子与信息学报*, 2017, 39(1): 183-190. doi: 10.11999/JEIT160120.
- LI Ying and CHEN Qiuju. Sound event recognition based on optimized orthogonal matching pursuit[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(1): 183-190. doi: 10.11999/JEIT160120.
- [21] 王丽, 冯燕. 基于粒子群优化的图像稀疏分解算法研究[J]. *计算机仿真*, 2015, 32(11): 363-367. doi: 10.3969/j.issn.1006-9348.2015.11.080.
- WANG Li and FENG Yan. Sparse decomposition of images based on particle swarm optimization[J]. *Computer Simulation*, 2015, 32(11): 363-367. doi: 10.3969/j.issn.1006-9348.2015.11.080.
- [22] 王在磊, 和红杰, 王建英, 等. 基于核心原子库和FHT的图像MP稀疏分解快速算法[J]. *铁道学报*, 2012, 34(9): 51-57. doi: 10.3969/j.issn.1001-8360.2012.09.009.
- WANG Zailei, HE Hongjie, WANG Jianying, *et al.* Fast algorithm for image MP sparse decomposition based on FHT and core dictionary[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2012, 34(9): 51-57. doi: 10.3969/j.issn.1001-8360.2012.09.009.
- [23] 邵君, 尹忠科, 王建英, 等. 信号稀疏分解中过完备原子库的集合划分[J]. *铁道学报*, 2006, 28(1): 68-71. doi: 10.3321/j.issn:1001-8360.2006.01.015.
- SHAO Jun, YIN Zhongke, WANG Jianying, *et al.* Set partitioning of the over-complet dictionary in signal sparse decomposition[J]. *Journal of the China Railway Society*, 2006, 28(1): 68-71. doi: 10.3321/j.issn:1001-8360.2006.01.015.
- [24] 王聪, 徐敏强, 李志成. 齿轮箱故障诊断中的正交匹配追踪算法[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2017, 49(4): 126-130. doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.201505053.
- WANG Cong, XU Minqiang, and LI Zhicheng. Gearbox fault diagnosis based on orthogonal matching pursuit algorithm[J]. *Journal of Harbin of Technology*, 2017, 49(4): 126-130. doi: 10.11918/j.issn.0367-6234.201505053.
- [25] WU Y, SO H C, and LIU H. Subspace-based algorithm for parameter estimation of polynomial phase signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2008, 56(10): 4977-4983. doi: 10.1109/TSP.2008.927457.
- 欧国建: 男, 1975年生, 副教授, 博士, 研究方向为多项式相位信号处理、稀疏分解和压缩感知.
- 蒋清平: 男, 1976年生, 讲师, 博士, 研究方向为循环谱信号处理、稀疏分解和压缩感知.
- 秦长春: 男, 1978年生, 副教授, 硕士, 研究方向为数据挖掘、信号处理和压缩感知.