

一种设计 M 通道双正交过采样图滤波器组的新算法

蒋俊正* 刘松辽 欧阳缮

(桂林电子科技大学信息与通信学院 桂林 541004)

摘要: 针对现有的 M 通道过采样图滤波器组整体性能较差的问题, 该文提出一种过采样图滤波器组设计的新算法。在新算法中, 分两步来设计图滤波器组。首先, 从频谱特性方面考虑来设计分析滤波器, 以分析滤波器的通带波纹和阻带能量为目标函数, 以 3 dB 约束为约束条件, 通过半正定规划求解出频谱选择性较好的分析滤波器; 然后, 从完全重构特性方面考虑来设计综合滤波器, 以综合滤波器的阻带能量为目标函数, 以完全重构条件为约束函数。上述两个约束优化问题都是半正定规划问题, 都可有效地求解。新算法综合考虑了滤波器组的重构特性和频率特性, 因此可以设计得到整体性能良好的 M 通道双正交过采样的图滤波器组。仿真对比表明, 与已有的设计算法相比, 新算法设计所得的图滤波器组具备更小的重构误差。

关键词: 图滤波器组; 过采样; 完全重构; 半正定规划

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)12-2970-06

DOI: 10.11999/JEIT170462

A Novel Method for Designing M -channel Biorthogonal Oversampled Graph Filter Banks

JIANG Junzheng LIU Songliao OUYANG Shan

(School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: This paper presents an efficient algorithm to design M -channel oversampled graph filter banks with better overall performance. In the new algorithm, a two-step scheme is exploited to tackle the design task. Firstly, for controlling the spectral selectivity, the analysis filter is designed by solving a constraint optimization problem that minimizes the passband ripple and stopband energy subject to 3 dB constraint; secondly, by taking the Perfect Reconstruction (PR) condition into account, the design problem of synthesis filters is formulated into an optimization problem that minimizes the stopband energy subject to PR constraint. Both the optimization problems are Semi-Definite Programming (SDP), which can be efficiently solved. Since the proposed method fully considerate the spectral characteristic and PR condition, M -channel biorthogonal oversampled graph filter banks with better performance can be obtained. Numerical examples and comparison show that compared with the existing methods, the proposed method can lead to graph filter banks with smaller reconstruction error.

Key words: Graph filter bank; Oversampled; Perfect Reconstruction (PR); Semi-Definite Programming (SDP)

1 引言

近年来, 图信号处理受到越来越多的学者的关注和研究, 其在社交、生物、交通、传感器网络处理以及图像处理等方面^[1-5]有着重要的应用意义。小波和图滤波器组对于图信号处理有着关键的作用。文献[1]提出了图小波在空间交通图方面的应用。文献[2]对图小波滤波器组在边缘意识的图像处理方

面的应用加以扩展。社交和生物网络作为图信号进行处理在文献[3]可见。文献[4]用提升的小波对针对不规则的传感器网络的两维分布式变换进行优化。文献[5]提出了对于传感器网络图的多分辨率表示的方法, 多分辨率分析可有效提取信号的特征信息, 其在图像和网络数据处理方面都发挥着重要的作用。然而, 对于大数据而言, 小波和滤波器组^[1-12]是较为适合处理大规模的图信号的, 小波和滤波器组可以对图信号进行稀疏表示, 从而对大数据处理更加具有优势。已有学者对图滤波器组进行研究, 图滤波器组从频谱设计角度可以分为正交、双正交两大类; 从信号采样角度分为临界采样和过采样两大类, 按通道数可分为两通道和 M 通道两大类。两通

收稿日期: 2017-05-16; 改回日期: 2017-08-14; 网络出版: 2017-09-14

*通信作者: 蒋俊正 jzjiang@guet.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61261032, 61371186), 桂林电子科技大学研究生教育创新计划项目(2017YJCX21)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61261032, 61371186), Innovation Project of GUET Graduate Education (2017YJCX21)

道图滤波器组设计最早是由 Narang 和 Ortega 提出的，他采用的是完全重构正交的临界采样的小波滤波器组设计方法^[10]，对于二分图用正交镜像滤波的方法来进行处理，此方法设计出的滤波器具有混叠消除，完全重构和正交性特性，但该算法设计是针对二分图或可以分解为二分图的图信号的。此后，Narang 和 Ortega 又提出了对于任意无向图的紧支撑的双正交的小波滤波器组的方法^[11]，松弛正交性条件成为双正交，双正交的图小波是频域紧支撑且节点 K 阶局域化的，仍然满足完全重构条件，可以对任意图信号进行处理，但此方法未考虑滤波器的频谱选择性，从而有一定的局限性。文献[12]提出了两通道双正交的图滤波器组优化设计法，此方法充分考虑了图滤波器的通带平坦性和阻带衰减，但频谱选择性的优化是以重构误差为代价的，可以根据实际需要对比图滤波器组的设计进行权衡和选择。文献[9]接近正交的基于参数化伯恩斯坦多项式近似和约束优化的频谱设计方法提供了过渡带陡峭程度，波纹幅度和重构误差间的权衡方法，但重构误差较双正交的图滤波器组大一些。图信号处理从临界采样到过采样突破了原有的局限性，过采样后的信号包含了原来图信号的全部信息，更加方便图信号的进一步处理。过采样的图拉普拉斯矩阵对于图信号处理的发展和应用至关重要^[13,14]，过采样对于规则信号的处理有更大的设计自由。过采样对于 M ($M > 2$) 通道图滤波器组的设计具有极大的优势， M 通道图滤波器组具有更多的子带划分，对于大规模的信号处理有重大的意义。目前， M 通道图滤波器组的研究相对较少，进一步的研究有待提出。

对图信号的处理可以从顶点域和频谱域^[6,7]出发，现有算法主要从频谱域^[9-12]进行设计。文献[9-12]均从频谱域设计图滤波器组，但是都只考虑了完全重构条件，未考虑图滤波器组^[15,16]的频谱选择性。从实际应用的角度进行考虑，分析滤波器的频谱选择性在信号分解过程中是较为重要的。因此，本文在设计分析滤波器时为了得到较好的频谱选择性先不考虑完全重构条件，然后再在设计综合滤波器时把完全重构条件作为约束条件，为了给设计一定的自由度，只以综合滤波器的阻带能量为目标函数，从而保证在较小的重构误差条件下改善图滤波器组的整体性能。对图滤波器组的整体性能进行优化是研究和设计图滤波器组的关键所在，对图信号的完全重构或以尽可能小的重构误差进行恢复是研究的主要问题。然而，在文献[6]的接近正交的过采样的图滤波器组的设计方法没有充分考虑滤波器组的频谱选择性，使用的接近正交图滤波器组的设计

方法重构误差也相对较大，文献[7]的 M 通道过采样^[8]的使用半带乘积滤波器的方法只考虑了完全重构条件没有考虑滤波器的频谱选择性，且低通滤波器的频谱选择性在半带乘积滤波器分解时严重受限。本文在充分考虑图滤波器组的频谱特性和完全重构条件的情况下，提出了一种新的 M 通道双正交过采样的优化设计方法，使得图滤波器组的整体性能得以改善。首先，设计分析滤波器，以分析滤波器的通带波纹和阻带能量为目标函数，以 3 dB 约束为约束条件，通过半正定规划求解出频谱选择性较好的分析滤波器；然后，设计综合滤波器，以综合滤波器的阻带能量为目标函数，以完全重构条件为约束，从而保证在较小的重构误差条件下改善图滤波器组的整体性能。通过半正定规划可有效求解上述两个约束优化问题。和现有的 M 通道图滤波器组设计方法相比，本文的算法设计有更好的重构性能，从而提升图滤波器组的整体性能。仿真实例和对比可以展现提出算法的性能。

2 M 通道过采样图滤波器组的基本结构

图 1 给出了一个 M 通道过采样图滤波器组，其中上下采样矩阵表示为 $\mathbf{J}, \mathbf{H}_0, \dots, \mathbf{H}_{M/2-1}, \mathbf{H}_{M/2}, \dots, \mathbf{H}_{M-1}$ 构成了分析图滤波器组， $\mathbf{G}_0, \dots, \mathbf{G}_{M/2-1}, \mathbf{G}_{M/2}, \dots, \mathbf{G}_{M-1}$ 构成了综合图滤波器组， \tilde{f} 为输入信号， \hat{f} 为输出信号。分析图滤波器组和综合图滤波器组可分别表示为

$$\mathbf{H}_i = \sum_{\lambda \in \sigma(G)} h_i(\lambda) \mathbf{P}_\lambda, \quad \mathbf{G}_i = \sum_{\lambda \in \sigma(G)} g_i(\lambda) \mathbf{P}_\lambda, \quad i = 0, 1, \dots, M \quad (1)$$

系统的输入输出关系可表示为

$$\hat{f} = \mathbf{T} \tilde{f} \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{T} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M-1} \mathbf{G}_k \mathbf{H}_k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{M/2-1} \mathbf{G}_k \mathbf{J} \mathbf{H}_k + \frac{1}{2} \sum_{k=M/2}^{M-1} \mathbf{G}_k \mathbf{J} \mathbf{H}_k \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$\sigma(G)$ 是由图 G 的拉普拉斯矩阵所有特征值构成

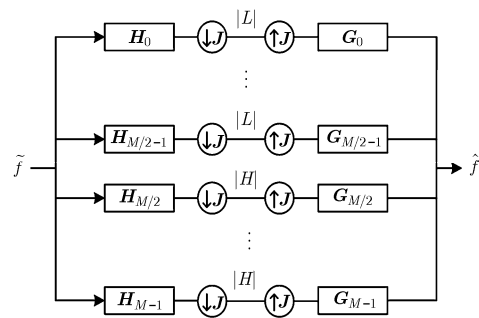


图 1 M 通道过采样图滤波器组的基本结构

成的特征空间, $\mathbf{P}_\lambda, \lambda \in \sigma(G)$ 是特征空间的投影矩阵^[10], $h_i(\lambda), g_i(\lambda)$ 分别是分析和综合子带滤波器, \mathbf{T} 是传递函数。

通道数为 M (M 为偶数) 的情况下, 若 $g_k(\lambda) = h_{k+M/2}(2-\lambda), g_{k+M/2}(\lambda) = h_k(2-\lambda)$, 则完全重构条件可以表示为

$$\sum_{k=0}^{M/2-1} g_k(\lambda) h_k(\lambda) + g_k(2-\lambda) h_k(2-\lambda) = 2 \quad (3)$$

式中, $\lambda \in [0, 2], \lambda$ 是连续变量。

3 图滤波器组的优化设计

3.1 图滤波器组的性能指标

本文在设计双正交过采样图滤波器组的过程中, 同时考虑图滤波器组的频谱选择性和重构误差, 为了获得更好的频谱选择性主要考虑设计的图滤波器要通带更加平坦, 阻带衰减更高, 这两个特性可通过控制图滤波器的通带波纹和阻带能量来获得; 同时期望得到的重构误差更小, 重构误差可通过完全重构条件在一定程度上适当来控制, 所以本文考虑的图滤波器组的性能指标有: (1) 频谱选择性: 通带波纹和阻带衰减; (2) 重构特性: 重构误差。下面对图滤波器组的性能指标及其相关的参量逐一进行分析。

本文的设计是在频谱域进行的, 为了便于理解, 我们以 4 通道图滤波器组为例进行分析。不难发现, 分析过程可以推广到任意 M ($M > 2$ 且为偶数) 通道图滤波器组。4 通道图滤波器组的子带滤波器表示为

$$h_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{L_{hi}-1} h_{0,k} \lambda^k = \mathbf{c}_{L_{hi}}^T(\lambda) \mathbf{h}_i, \\ g_i(\lambda) = \sum_{k=0}^{L_{gi}-1} g_{0,k} \lambda^k = \mathbf{c}_{L_{gi}}^T(\lambda) \mathbf{g}_i, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4)$$

式中, L_{hi}, L_{gi} 分别表示分析滤波器 h_i 和综合滤波器 g_i 的长度。

$$\mathbf{c}_L(\lambda) = [1, \lambda, \dots, \lambda^{L-1}]^T, \mathbf{h}_i = [h_{i,0}, h_{i,1}, \dots, h_{i,L_{hi}-1}]^T, \\ \mathbf{g}_i = [g_{i,0}, g_{i,1}, \dots, g_{i,L_{gi}-1}]^T, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (5)$$

类似于传统滤波器组, $\lambda_{pd0}, \lambda_{sd0}$ 表示 $\mathbf{h}_0, \mathbf{g}_0$ 的通带和阻带的截止频率, $\lambda_{pd1}, \lambda_{pd2}, \lambda_{sd1}, \lambda_{sd2}$ 表示 $\mathbf{h}_1, \mathbf{g}_1$ 的通带和阻带的截止频率。低通滤波器的通带波纹可用式(6)来衡量:

$$E_p(\mathbf{h}_i) = \int_a^b |\sqrt{2} - h_i|^2 d\lambda \\ = \mathbf{h}_i^T \left\{ \int_a^b \mathbf{c}_{L_{hi}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{hi}}^T(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{h}_i \\ - \left\{ 2\sqrt{2} \int_a^b \mathbf{c}_{L_{hi}}(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{h}_i + 2(b-a) \\ = \mathbf{h}_i^T \mathbf{R}_{L_{hi}} \mathbf{h}_i - \mathbf{r}_{L_{hi}}^T \mathbf{h}_i + 2(b-a) \quad (6)$$

当 $i = 0, a = 0, b = \lambda_{pd0}$ 时式(6)为 $E_p(\mathbf{h}_0)$, 即 \mathbf{h}_0 的通带波纹的能量; 当 $i = 1, a = \lambda_{pd1}, b = \lambda_{pd2}$ 时式(6)为 $E_p(\mathbf{h}_1)$, 即 \mathbf{h}_1 的通带波纹的能量。阻带衰减由阻带能量来决定:

$$\left. \begin{aligned} E_s(\mathbf{h}_0) &= \int_{\lambda_{sd0}}^2 |h_0(\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \mathbf{h}_0^T \left\{ \int_{\lambda_{sd0}}^2 \mathbf{c}_{L_{h_0}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{h_0}}^T(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{h}_0 \\ &= \mathbf{h}_0^T \mathbf{S}_{L_{h_0}} \mathbf{h}_0 \\ E_s(\mathbf{g}_0) &= \int_{\lambda_{sd0}}^2 |g_0(\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \mathbf{g}_0^T \left\{ \int_{\lambda_{sd0}}^2 \mathbf{c}_{L_{g_0}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{g_0}}^T(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{g}_0 \\ &= \mathbf{g}_0^T \mathbf{S}_{L_{g_0}} \mathbf{g}_0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} E_s(\mathbf{h}_1) &= \int_0^{\lambda_{sd1}} |h_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\lambda_{sd2}}^2 |h_1(\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \mathbf{h}_1^T \left\{ \int_{\lambda_{sd2}}^2 \mathbf{c}_{L_{h_1}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\lambda_{sd1}} \mathbf{c}_{L_{h_1}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_1^T \mathbf{S}_{L_{h_1}} \mathbf{h}_1 \\ E_s(\mathbf{g}_1) &= \int_0^{\lambda_{sd1}} |g_1(\lambda)|^2 d\lambda + \int_{\lambda_{sd2}}^2 |g_1(\lambda)|^2 d\lambda \\ &= \mathbf{g}_1^T \left\{ \int_{\lambda_{sd2}}^2 \mathbf{c}_{L_{g_1}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{g_1}}^T(\lambda) d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\lambda_{sd1}} \mathbf{c}_{L_{g_1}}(\lambda) \mathbf{c}_{L_{g_1}}^T(\lambda) d\lambda \right\} \mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_1^T \mathbf{S}_{L_{g_1}} \mathbf{g}_1 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在 4 通道图滤波器组中, 若 $g_0(\lambda) = h_2(2-\lambda), g_1(\lambda) = h_3(2-\lambda), g_2(\lambda) = h_0(2-\lambda), g_3(\lambda) = h_1(2-\lambda)$, 则图滤波器组是双正交的^[11,12]。完全重构条件可以表示为

$$g_0(\lambda) h_0(\lambda) + g_0(2-\lambda) h_0(2-\lambda) + g_1(\lambda) h_1(\lambda) \\ + g_1(2-\lambda) h_1(2-\lambda) = 2 \quad (9)$$

为了方便表示, 记 $\mathbf{c}_{L_{h_0}}^T(\lambda) \mathbf{h}_0 \mathbf{c}_{L_{g_0}}^T(\lambda) \mathbf{g}_0 + \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(\lambda) \mathbf{h}_1 \mathbf{c}_{L_{g_1}}^T(\lambda) \mathbf{g}_1 = l(\lambda)$, 完全重构条件可表示为

$$l(\lambda) + l(2-\lambda) = 2, \quad \forall \lambda \in [0, 2] \quad (10)$$

重构误差可表示为 $E(\lambda) = l(\lambda) + l(2-\lambda) - 2$, 设计中希望重构误差尽可能小。

3.2 图滤波器组的设计

基于上面的分析, 可以将图滤波器组的设计问题归结为带约束优化问题, 通过两步法来设计图滤波器组。本文将图滤波器组的设计分为两个步骤:

第 1 步 设计分析滤波器, 以分析滤波器组的通带和阻带能量为目标函数, 在 3 dB 约束条件下求解使得通带失真和阻带能量最小的分析滤波器, 优化是半正定规划问题, 可有效地求解。

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_1} E_p(\mathbf{h}_0) + \alpha E_s(\mathbf{h}_0) + E_p(\mathbf{h}_1) + \beta E_s(\mathbf{h}_1) \\ \text{s.t. } \mathbf{c}_{L_{h_0}}^T(0.5)\mathbf{h}_0 = 1, \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(0.5)\mathbf{h}_1 = 1, \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(1)\mathbf{h}_1 = 1 \end{array} \right\} (11)$$

3 dB 约束即 $h_0(0.5) = 1, h_1(0.5) = 1, h_1(1) = 1$; α, β 为权值, 通常取 $\alpha = \beta$ 。为了便于求解, 记

$$\mathbf{h} = [\mathbf{h}_0; \mathbf{h}_1]; \mathbf{h}_0 = [\mathbf{I}_0, \mathbf{0}]\mathbf{h} = \mathbf{B}_0\mathbf{h}; \mathbf{h}_1 = [\mathbf{0}, \mathbf{I}_1]\mathbf{h} = \mathbf{B}_1\mathbf{h} \quad (12)$$

其中, \mathbf{B}_0 是大小为 $L_{h_0} \times (L_{h_0} + L_{h_1})$ 的矩阵, \mathbf{B}_1 是大小为 $L_{h_1} \times (L_{h_0} + L_{h_1})$ 的矩阵, \mathbf{I}_0 为 $L_{h_0} \times L_{h_0}$ 的单位矩阵, \mathbf{I}_1 为 $L_{h_1} \times L_{h_1}$ 的单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为零矩阵。约束求解问题可简化为式(13):

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{h}} E_p(\mathbf{h}) + \alpha E_s(\mathbf{h}) \\ \text{s.t. } \mathbf{c}_{L_{h_0}}^T(0.5)(\mathbf{B}_0\mathbf{h}) = 1, \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(0.5)(\mathbf{B}_1\mathbf{h}) = 1, \\ \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(1)(\mathbf{B}_1\mathbf{h}) = 1 \end{array} \right\} (13)$$

第 2 步 以解出的分析滤波器为已知条件, 在完全重构约束条件下, 考虑到最大化综合滤波器阻带衰减, 以综合滤波器组的阻带能量为目标函数来求解综合滤波器。

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1} \alpha E_s(\mathbf{g}_0) + \beta E_s(\mathbf{g}_1) \\ \text{s.t. } |E(\lambda_k)| \leq \varepsilon_r, \mathbf{g}_1(0) = 0 \end{array} \right\} (14)$$

其中, $\lambda_k = \frac{2k}{N} \in [0, 2]$; $k=0, 1, \dots, N$, ε_r 是重构误差容限, $N+1$ 是离散点数, 许多实例表明 $N=100$ 则可保证重构误差精确度。为方便计算, 做式(15)所示的代换:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= [\mathbf{g}_0; \mathbf{g}_1], \mathbf{g}_0 = [\mathbf{I}_0, \mathbf{0}]\mathbf{g} = \mathbf{C}_0\mathbf{g}, \\ \mathbf{g}_1 &= [\mathbf{0}, \mathbf{I}_1]\mathbf{g} = \mathbf{C}_1\mathbf{g} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, \mathbf{C}_0 是大小为 $L_{g_0} \times (L_{g_0} + L_{g_1})$ 的矩阵, \mathbf{C}_1 是大小为 $L_{g_1} \times (L_{g_0} + L_{g_1})$ 的矩阵, \mathbf{I}_0 为 $L_{g_0} \times L_{g_0}$ 的单位矩阵, \mathbf{I}_1 为 $L_{g_1} \times L_{g_1}$ 的单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为零矩阵。上述问题可等效写为

$$\left. \begin{array}{l} \min_{\mathbf{g}} \alpha E_s(\mathbf{g}) \\ \text{s.t. } |\mathbf{a}^T(\lambda_k)\mathbf{g} - b_k| \leq \varepsilon_r, \mathbf{g}_1(0) = 0 \end{array} \right\} (16)$$

其中, $b_k = 2$, $k = 0, 1, \dots, N$, 记 $\mathbf{d}(\lambda_k) = \mathbf{c}_{L_{h_0}}^T(\lambda_k)\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{h}\mathbf{c}_{L_{g_0}}^T(\lambda_k)\mathbf{C}_0 + \mathbf{c}_{L_{h_1}}^T(\lambda_k)\mathbf{B}_1\mathbf{h}\mathbf{c}_{L_{g_1}}^T(\lambda_k)\mathbf{C}_1$, 向量 $\mathbf{a}^T(\lambda_k)$ 表示为

$$\mathbf{a}^T(\lambda_k) = \mathbf{d}(\lambda_k) + \mathbf{d}(2 - \lambda_k), \quad k=0, 1, \dots, N \quad (17)$$

上述优化问题均为半正定规划问题, 可通过半正定规划求解器 SDPT3 有效求解, 解得的图滤波器为 λ 的实值函数。

4 仿真结果与分析

这一节给出一些仿真实例, 对图滤波器组的重

构误差、正交性和信噪比进行对比, 所有的仿真都是在相同的环境下运行。

例 1 设计一个图滤波器组, 参数如下:

$L_{h_0} = 12, L_{h_1} = 12, L_{g_0} = 11, L_{g_1} = 11, \lambda_{pd0} = 0.4, \lambda_{pd1} = 0.6, \lambda_{pd2} = 0.8, \lambda_{sd0} = 0.75, \lambda_{sd1} = 0.25, \lambda_{sd2} = 1.3, \alpha = 0.1, \varepsilon_r = 10^{-9}$; 得到的图滤波器组幅度响应如图 2 所示, 图中 PR 表示 $l(\lambda) + l(2 - \lambda), \lambda \in [0, 2]$ 的取值, 用于度量图滤波器组的重构误差。仿真计算得到的最大重构误差^[6]和正交性^[11]的值分别为 $E_{\max} = 3.9346 \times 10^{-9}, \Theta = 0.9353$, 相同的图滤波器组长度和运行环境下, 表 1 给出了本文算法与文献[6]算法设计的图滤波器组的重构性能和边界对比。 R_B 为边界比^[6], $R_B \leq \sqrt{\frac{1+E_{\max}}{1-E_{\max}}}$, 仿真时取 R_B

的最大值进行对比, R_B 等于 1 表明滤波器组是完全重构的, 此时滤波器组的重构特性较好。本文算法设计出的图滤波器组的最大边界比为 1, 明显优于文献[6]设计的图滤波器组。通常情况下, 采用正交的方法设计出的图滤波器组重构误差较双正交的大, 因此, 本文的设计方法在重构特性上有着显著的优势。从表 1 中可以看出本文所设计的双正交图滤波器组显著降低了重构误差。从图滤波器组幅度响应可以看出两种算法设计的图滤波器组的整体频谱特性相当。在图滤波器组的设计中, 为了尽可能无失真地恢复原信号, 期望得到的图滤波器组的重构误差更小, 本文设计算法有着更好的重构性能, 所以本文设计所得的图滤波器组整体性能更佳。

表 1 本文所设计的滤波器组与文献[6]的性能指标对比

设计算法	重构误差 ($L_h = 12$)	R_B
文献[6]算法	4.75×10^{-4}	1.0005
本文算法	3.93×10^{-9}	1.0000

例 2 设计一个图滤波器组, 参数如下:

$L_{h_0} = 8, L_{h_1} = 8, L_{g_0} = 7, L_{g_1} = 7, \lambda_{pd0} = 0.3, \lambda_{pd1} = 0.6, \lambda_{pd2} = 0.8, \lambda_{sd0} = 0.75, \lambda_{sd1} = 0.25, \lambda_{sd2} = 1.3, \alpha = 0.1, \varepsilon_r = 10^{-13}$; 得到的图滤波器组幅度响应如图 3 所示。相同的图滤波器组长度和运行环境下, 表 2 给出了本文算法与文献[7]算法设计的图滤波器组的重构性能和正交性对比。正交性 Θ ^[11]越接近于 1 表明滤波器组的正交性越好。对比可知, 本文算法设计的图滤波器组的重构误差明显比文献[7]小, 其正交性和整体频谱特性比文献[7]略好。与例 1 相

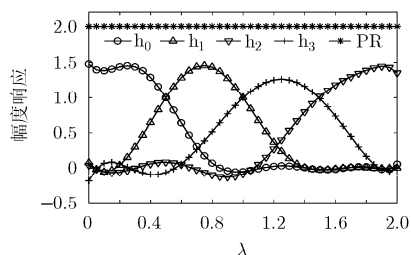
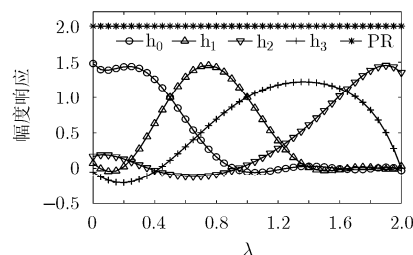
图 2 本文算法设计的图滤波器组的幅度响应 ($L_n = 12$)图 3 本文算法设计的图滤波器组的幅度响应 ($L_n = 8$)

表 2 本文所设计的滤波器组与文献[7]的性能指标对比

设计算法	$E_{\max}(L_n = 8)$	θ
文献[7]算法	6.86×10^{-4}	0.8096
本文算法	9.22×10^{-13}	0.8834

比, 改变图滤波器组的参数设置, 综合滤波器的频谱特性会有所变差, 但是可以获得更小的重构误差, 重构误差是衡量图滤波器组整体性能的主要性能指标, 所以本文设计所得的图滤波器组整体性能更好。适当松弛重构误差容限可得到频谱选择性更好的图滤波器, 可根据需要灵活设计图滤波器组。

用上述例 2 参数设计的图滤波器组对 Minnesota 交通图进行去噪实验, 噪声标准差 $\sigma = 1/2$ 时, 使用文献[11]算法和本文算法去噪的仿真结果如图 4(c), 图 4(d)。表 3 给出了噪声 σ 取不同值时的信噪比对比。相同的参数和运行环境下, 本文设计的算法, 与文献[11]相比具有较高的信噪比, 与文献[7]相比, 信噪比相差 1.5 dB 左右。

表 3 本文算法与已有图滤波器组算法信噪比对比(dB)

σ	文献[11]算法	文献[7]算法	本文算法
1/32	31.25	33.89	30.12
1/16	25.66	28.52	26.13
1/8	20.16	22.99	21.38
1/4	14.25	17.03	15.24
1/2	8.51	11.42	10.01

5 结束语

本文提出了一种基于两步法的 M 通道过采样双正交的图滤波器组的设计算法, 充分考虑了图滤波器组的频谱选择性和重构误差, 分两步来设计图滤波器组, 通过半正定规划求解图滤波器组, 从而设计出频谱性能较好和重构误差更低的图滤波器组。本文的设计方法可以更好地权衡图滤波器组的频谱特性和重构误差, 从而获得整体性能更好的图滤波器组, 仿真表明算法设计的有效性。后续工作将考虑图滤波器组的实际应用问题。

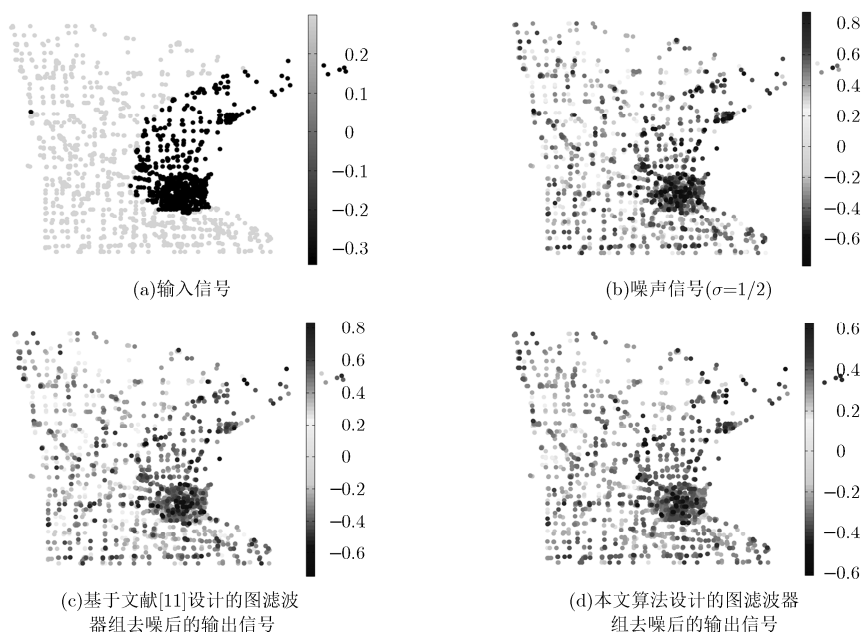


图 4 图滤波器组去噪实验仿真结果

参 考 文 献

- [1] CROVELLA M and KOLACZYK E. Graph wavelets for spatial traffic analysis[C]. Joint Conference of the IEEE Computer and Communications, San Francisco, CA, USA, 2003: 1848–1857. doi: 10.1109/INFCOM.2003.1209207.
- [2] NARANG S K, CHAO Y H, and ORTEGA A. Graph-wavelet filterbanks for edge-aware image processing[C]. Statistical Signal Processing Workshop, IEEE, Ann Arbor, MI, 2012: 141–144. doi: 10.1109/SSP.2012.6319643.
- [3] GIRVAN M and NEWMAN M E. Community structure in social and biological networks[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 2002, 99(12): 7821–7826. doi: 10.1073/pnas.122653799.
- [4] SHEN G and ORTEGA A. Optimized distributed 2D transforms for irregularly sampled sensor network grids using wavelet lifting[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Las Vegas, NV, 2008: 2513–2516. doi: 10.1109/ICASSP.2008.4518159.
- [5] WANG W and RAMCHANDRAN K. Random multiresolution representations for arbitrary sensor network graphs[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Toulouse, 2006: IV161–IV164. doi: 10.1109/ICASSP.2006.1660930.
- [6] TAY D B H, TANAKA Y, and SAKIYAMA A. Near orthogonal oversampled graph filter banks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(2): 277–281. doi: 10.1109/LSP.2016.2514490.
- [7] TANAKA Y and SAKIYAMA A. M-channel oversampled graph filter banks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(14): 3578–3590. doi: 10.1109/TSP.2014.2328983.
- [8] SAKIYAMA A and TANAKA Y. Oversampled graph Laplacian matrix for graph filter banks[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(24): 6425–6437. doi: 10.1109/TSP.2014.2365761.
- [9] TAY D B H and LIN Z. Design of near orthogonal graph filter banks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(6): 701–704. doi: 10.1109/LSP.2014.2368128.
- [10] NARANG S K and ORTEGA A. Perfect reconstruction two-channel wavelet filter banks for graph structured data[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(6): 2786–2799. doi: 10.1109/TSP.2012.2188718.
- [11] NARANG S K and ORTEGA A. Compact support biorthogonal wavelet filterbanks for arbitrary undirected graphs[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2013, 61(19): 4673–4685. doi: 10.1109/TSP.2013.2273197.
- [12] JIANG J Z, ZHOU F, and SHUI P L. Optimization design of two-channel biorthogonal graph filter banks[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2016, 35(2): 685–692. doi: 10.1007/s00034-015-0073-x.
- [13] SAKIYAMA A and TANAKA Y. Oversampled graph Laplacian matrix for graph signals[C]. IEEE, Signal Processing Conference, Lisbon, Portugal, 2014: 2225–2229.
- [14] SAKIYAMA A and TANAKA Y. Edge-aware image graph expansion methods for oversampled graph Laplacian matrix[C]. IEEE International Conference on Image Processing, Paris, France, 2014: 2958–2962. doi: 10.1109/ICIP.2014.7025598.
- [15] CHEN S, SANDRYHAILA A, MOURA J M F, *et al.* Signal denoising on graphs via graph filtering[C]. IEEE, Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). Atlanta, GA, 2015: 872–876. doi: 10.1109/GlobalSIP.2014.7032244.
- [16] SHI X, FENG H, ZHAI M, *et al.* Infinite impulse response graph filters in wireless sensor networks[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1113–1117. doi: 10.1109/LSP.2014.2387204.
- 蒋俊正: 男, 1983 年生, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为多速率滤波器组理论与应用、图信号处理理论及应用。
- 刘松辽: 女, 1993 年生, 硕士生, 研究方向为图滤波器组的优化设计及应用。
- 欧阳缙: 男, 1960 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为自适应信号处理、通信信号处理。