上行 3D-MIMO 中利用结构稀疏低秩特性的信道估计算法

刘 凯 冯 辉 杨 涛 胡 波*
(复旦大学电磁波信息科学教育部重点实验室 上海 200433)
(复旦大学电子工程系 上海 200433)

摘 要：3 维多输入多输出(3D-MIMO)系统能有效提升频谱效率，提高系统容量。但用户数和天线数的剧增，无法保证所有用户的导频都正交，给 3D-MIMO 信道估计带来估计精度下降和复杂度增加等问题。该文分析了上行 3D-MIMO 系统信道的结构稀疏特性和低秩特性，并基于这些特性提出一种信道估计算法，给出了算法的收敛性和复杂度。仿真结果表明估计算法能准确地恢复 3D-MIMO 的信道系数，并有较低的复杂度。

关键词：信道估计；3D-MIMO；结构稀疏；低秩；匹配追踪
中图分类号： TN929.5 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2018)01-0116-07
DOI: 10.11999/JEIT170399

Structured Sparse and Low Rank Channel Estimation in Uplink 3D-MIMO

LIU Kai FENG Hui YANG Tao HU Bo
(*Key Laboratory of EMW Information*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *China*)
(*Department of Electronic Engineering*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *China*)

Abstract: Three Dimension Multi-Input Multi-Output (3D-MIMO) systems can effectively improve frequency efficiency and system capacity. However, with the growing number of antennas and users, pilot sequences are non-orthogonal, which will affect the accuracy of 3D-MIMO channel estimation and increase complexity. In this paper, the structured sparseness and low rank property of 3D-MIMO channel are studied. By taking advantage of these properties, a channel estimation algorithm is proposed, and the convergence and complexity of the algorithm are analyzed. Simulation results verify that the proposed algorithm can accurately recover 3D-MIMO channel with low complexity.

Key words: Channel estimation; 3D-MIMO; Structured sparseness; Low rank; Matching pursuit

1 引言

大规模多输入多输出(Multi-Input Multi-Output, MIMO)天线收发已经成为未来无线通信中最主要的技术之一[1]。3D-MIMO 是大规模 MIMO 的主要应用场景之一，由于基站端空间有限，3D-MIMO 可以利用均匀平面阵列(Uniform Planar Arrays, UPA)将几百根天线放置在一个相对较小的空间内[2]。此外，3D-MIMO 可以控制信号在水平方向和垂直方向的波束，合理的发送接收技术可以降低多用户干扰，大大地提高系统性能。3D-MIMO 的主要困难是如何获取准确的信道信息(Channel State Information, CSI)。传统的信道估计方法需要的导频数随着发送天线数线性地增长。但在多用户 3D-MIMO 系统中，基站天线数和用户数大大地增加，受限于系统的频谱利用率，导频数量往往有限，使得用户导频不能正交，从而大大降低信道估计的精确度，进而影响整个系统的性能。

所幸的是，3D-MIMO 信道虽然规模很大，但自由度(Degree of Freedom, DoF)很低[3]。自由度是指能描述信道矩阵所需的最少的元素个数，大规模 MIMO 信道的低自由度特性主要体现在稀疏性、结构性和低秩等方面。文献[3]利用空间信道模型的角度域变换[4]，将 MIMO 信道表示在时域-频域-发送角度域-接收角度域的 4 维空间，并分析了信道在时域、频域和角度域的稀疏性。文献[5]通过实际测量和分析表明不同用户会历经一些共同簇，使得多用户信道具有相关性，文献[6]则结合多用户信道的相关性，分析了大规模 MIMO 信道满足低秩性的原因和条件。文献[7]表明，当满足一定条件时，各天线采样的多径信道的主径时延相同，时域稀疏信道具有相同的支撑，这里的支撑是指稀疏信号中非零元

收稿日期：2017-05-02；改回日期：2017-09-27；网络出版：2017-11-01
*通信作者：胡波 bohu@fudan.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61501124)
Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61501124)

素的位置。根据信道的结构稀疏或低秩特性，出现了基于压缩感知 (Compressive Sensing, CS)或低秩矩阵恢复的信道估计算法[8−12]。因为基于压缩感知和低秩矩阵恢复的信道估计算法可以允许发送非正交的导频，在多用户 3D-MIMO 系统中，导频负载大大地降低了。文献[8]利用稀疏信道的块结构特性，提出了一种改进的子空间追踪(Subspace Pursuit, SP) 算法来估计信道。文献[9]考虑了信道在时域和角度域的稀疏性，提出了一种低复杂度的信道矩阵估计算法。文献[10]利用信道的结构稀疏特性，提出了一种基于多观测向量(Multiple Measurement Vectors, MMV)问题的信道估计算法。文献[11]利用信道的低秩特性，将信道估计问题转化为一个低秩优化问题。文献[12]提出了一种利用信道相关矩阵低秩特性的 MMSE 信道估计算法。目前为止，很少有文献同时考虑多用户信道的低秩特性和结构稀疏特性进行信道估计。事实上，如能利用结构稀疏和低秩的先验知识可以有效提高信道估计精度，降低复杂度，这就是本文的切入点。

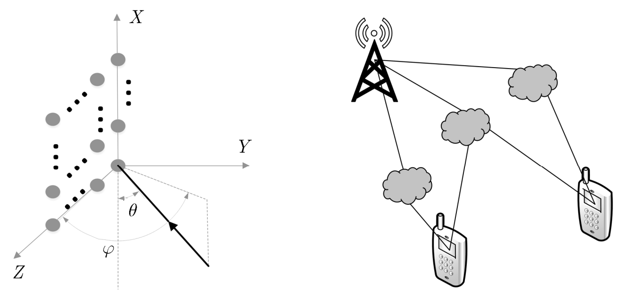
本文首先研究了上行多用户 3D-MIMO 系统信道的结构稀疏性和低秩特性。信道稀疏性是由于多径信道中径的个数远远少于最大时延扩展，结构稀疏性则在于基站所有接收天线接收到的多径信道的主径时延都不可分辨，低秩特性是因为不同用户的信道历经了相同的簇而具有相关性。然后利用这些低自由度的特性，本文提出了一种低秩稀疏匹配追踪 (Low Rank and Sparse Matching Pursuit, LRSMP)信道估计算法，算法利用匹配追踪的思想迭代恢复信道系数。和传统的匹配追踪不同的是，本文考虑的不再是稀疏矢量，而是结构稀疏矩阵，并且加入了矩阵低秩约束。最后，本文对算法的收敛性和复杂度进行分析。分析结果和仿真验证了提出的算法能用较低的复杂度准确地估计出信道。

2　结构稀疏低秩信道模型

考虑上行单小区多用户 3D-MIMO 系统，基站配置了均匀阵列天线 UPA，如图 1(a)所示，天线安置在 X-Z 平面，波束的垂直到达角和水平到达角分别为 θ 和 φ ，在垂直方向和水平方向的天线数分别为 $N_{\rm v}$ 和 $N_{\rm h}$ ，基站天线总数为 $N_{\rm r}=N_{\rm v}\times N_{\rm h}$ ，基站同时服务 K 个单天线用户。每个用户信道均为多径信道，其中第 k 个用户的时域信道冲击响应模型为[13]

$$\widetilde{\boldsymbol{H}}_k=\sum_{l=1}^{L}\beta_{kl}\boldsymbol{e}\left(\varOmega_{k,l}^{\rm v}\right)\boldsymbol{e}^{\rm T}\left(\varOmega_{k,l}^{\rm h}\right)\delta\left(t-\tau_l\right)\in\mathbb{C}^{N_{\rm v}\times N_{\rm h}}\quad(1)$$

其中，L 为信道的最大时延扩展，β_{kl} 和 τ_l 分别为第 l 条径的衰落和延时，$\delta(\bullet)$ 为狄利克雷 δ 函数，上标 T 表示转置。$\boldsymbol{e}(\varOmega^{\rm v})$ 和 $\boldsymbol{e}(\varOmega^{\rm h})$ 分别是垂直方向和水平方向的导向矢量。



(a) UPA信号传播模型　(b)多用户信道共同簇示意图

图 1　3D-MIMO 系统模型

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{e}(\varOmega^{\rm v})&=\frac{1}{\sqrt{N_{\rm v}}}\left[1\quad {\rm e}^{-{\rm j}2\pi\varOmega^{\rm v}}\quad\cdots\quad {\rm e}^{-{\rm j}2\pi(N_{\rm v}-1)\varOmega^{\rm v}}\right]^{\rm T}\\ \boldsymbol{e}(\varOmega^{\rm h})&=\frac{1}{\sqrt{N_{\rm h}}}\left[1\quad {\rm e}^{-{\rm j}2\pi\varOmega^{\rm h}}\quad\cdots\quad {\rm e}^{-{\rm j}2\pi(N_{\rm h}-1)\varOmega^{\rm h}}\right]^{\rm T}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

其中，$\varOmega^{\rm v}=\dfrac{d_{\rm v}}{\lambda}\cos(\theta)$ ，$\varOmega^{\rm h}=\dfrac{d_{\rm h}}{\lambda}\sin(\theta)\cos(\varphi)$ ，λ 是载波频率，$d_{\rm v}$ 和 $d_{\rm h}$ 分别为垂直和水平方向的天线间距。

将式(1)的加法中第 l 个组成成分转化为矢量得到

$$\boldsymbol{h}_{k,l}=\beta_{kl}\boldsymbol{e}\left(\varOmega_{k,l}^{\rm h}\right)\otimes\boldsymbol{e}\left(\varOmega_{k,l}^{\rm v}\right)\in\mathbb{C}^{N_{\rm v}N_{\rm h}\times 1}\quad(3)$$

其中，$\otimes$ 为 Kronecker 积，$\boldsymbol{h}_{k,l}$ 表示用户 k 第 l 条径的信道矢量。将所有径合并，得到式(1)信道模型的时域-空域形式：

$$\boldsymbol{H}_k=\left[\boldsymbol{h}_{k,1}\quad\boldsymbol{h}_{k,2}\quad\cdots\quad\boldsymbol{h}_{k,L}\right]^{\rm T}\in\mathbb{C}^{L\times N_{\rm r}}\quad(4)$$

$\boldsymbol{H}_k$ 的 $N_{\rm r}$ 列对应着 $N_{\rm r}$ 根基站天线接收到的信道。在物理传播信道中，由于基站周围的簇的个数有限，因此信道冲击响应的主径个数有限，而最大时延扩展一般要大得多，所以信道通常会呈现稀疏的特性[3]，即 $\boldsymbol{H}_k$ 的每一列都是稀疏的，稀疏度 $L_{\rm p}$ 对应着 $L_{\rm p}$ 条主径，即有 $L_{\rm p}\ll L$ 。

用户 k 的信道 $\boldsymbol{H}_k$ 不仅稀疏，而且每一列的稀疏矢量都具有相同的支撑。文献[7]指出当基站天线间距不大时，某个用户的某条径几乎同时到达基站各天线，即基站不同天线采样得到的时域信道具有相同支撑。文献[7]指出，当两条径的到达时间小于 $1/(10B)$ 时，这两条径的到达时间将不可区分，这里 B 为带宽。参考 3GPP LTE 常用参数，设带宽为 $B=20$ MHz，信号的中心频率为 $f_{\rm c}=2.6$ GHz，当 $d_{\max}\le\dfrac{\rm c}{10B}$ 时，相同支撑的特性成立，其中 $d_{\max}$ 为最大天线间距，c 为光速。本文系统模型考虑 $N_{\rm r}=$

8×8 的均匀面阵，相邻天线间距 $d = 0.5\lambda = \dfrac{\mathrm{c}}{2f_\mathrm{c}}$，得到 $d_{\max} = 7\sqrt{2}d = 0.57\ \mathrm{m}$，满足相同支撑的条件 $d_{\max} \le \dfrac{\mathrm{c}}{10B} = 1.5\ \mathrm{m}$。图 2 是信道幅度 $|\boldsymbol{H}_k|$ 的一个例子，其中天线阵列 $N_\mathrm{v}\times N_\mathrm{h} = 8\times 8$，信道径数 $L_\mathrm{p} = 6$，水平角和垂直角都是随机生成。可以看到信道是稀疏的，并且具有相同的支撑。

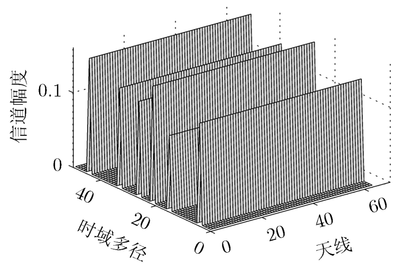


图 2 具有时延相同支撑的稀疏信道

将 K 个用户的信道合并得到上行多用户信道：

$$\boldsymbol{H} = \left[\boldsymbol{H}_1^\mathrm{T} \quad \boldsymbol{H}_2^\mathrm{T} \quad \cdots \quad \boldsymbol{H}_K^\mathrm{T}\right] \in \mathbb{C}^{KL\times N_\mathrm{r}} \tag{5}$$

多用户信道 $\boldsymbol{H}$ 不仅是一个稀疏矩阵，而且还呈现出低秩的特性。这是由于散射体倾向于聚集成拥有相似延时、发射角和接收角的簇，且簇的数量往往很有限，而不同用户的信道很可能是从同一个簇反射到基站的，如图 1(b)所示。即使这些用户的地理位置并不一样，但不同用户的信道系数仍然具有很强的相关性[14]，使得多用户信道 $\boldsymbol{H}$ 具有低秩的特性。

因此我们要估计的多用户信道 $\boldsymbol{H}$ 是一个有相同支撑的稀疏低秩矩阵，其结构稀疏度 $s = KL_\mathrm{p}$ 表示 $\boldsymbol{H}$ 非零行的个数，为所有用户信道主径的个数，秩 r 为基站周围簇的个数。

3 信道估计算法

3.1 估计模型

对于上行 OFDM 系统，传统的正交导频安插方法要将不同用户的导频在时频资源块上错开，随着用户数量的增加，其导频所占用的系统资源也随之增加，这将大大降低系统的频谱效率，增加导频开销。本文采用非正交导频安插方式，所有用户的导频都交叠地安置在同一个时频资源块内，然后通过接收端的信道估计算法将每个用户的信道系数进行恢复。非正交导频数量不会随着用户数量增加而增加，这将减小导频负载，提升频谱效率。设系统的子载波数为 N_c，用户 k 在时隙 t (time slot) 发送的信号为 $\boldsymbol{x}_k(t) = \left[\boldsymbol{x}_{k,\mathrm{p}}^\mathrm{T}(t) \quad \boldsymbol{x}_{k,\mathrm{d}}^\mathrm{T}(t)\right]^\mathrm{T}$，其中下标 p 和 d 分别代表导频和数据，则基站端的接收信号为

$$\boldsymbol{Y}(t) = \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{Y}_k(t) = \boldsymbol{X}(t)\boldsymbol{F}_{KL}\boldsymbol{H}(t) + \boldsymbol{W} \tag{6}$$

其中，$\boldsymbol{X}(t) = \left[\mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_1(t)) \ \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_2(t)) \ \cdots \ \mathrm{diag}(\boldsymbol{x}_K(t))\right] \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{c}\times KN_\mathrm{c}}$ 是所有用户在时隙 t 的发送信号组成的矩阵，$\boldsymbol{H}(t)$ 为式(5)中的上行多用户信道矩阵，$\boldsymbol{W}$ 为高斯白噪声矩阵，设 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{c}\times N_\mathrm{c}}$ 为离散傅里叶矩阵，$\boldsymbol{F}_L$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的前 L 行形成的子矩阵，$\boldsymbol{F}_{KL}$ 为 K 个 $\boldsymbol{F}_L$ 块对角化形成的矩阵。

提取接收信号中的导频信号得到

$$\boldsymbol{Y}_\mathrm{p}(t) = \boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t)\boldsymbol{F}_{KL,\mathrm{p}}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{W} \tag{7}$$

其中，$\boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t)$ 为提取的导频矩阵，$\boldsymbol{F}_{KL,\mathrm{p}}$ 为提取 $\boldsymbol{F}_{KL}$ 对应导频位置得到的子矩阵，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}_\mathrm{p}(t)\boldsymbol{F}_{KL,\mathrm{p}} \in \mathbb{C}^{N_\mathrm{p}\times KL}$ 为观测矩阵。接收信号 $\boldsymbol{Y}(t)$ 的维度为 $N_\mathrm{p}\times N_\mathrm{r}$，待估计的多用户信道 $\boldsymbol{H}$ 的维度为 $KL\times N_\mathrm{r}$，如第 2 节所述，$\boldsymbol{H}$ 具有结构稀疏低秩特性，其结构稀疏度 $s = |\mathrm{supp}(\boldsymbol{H})| = KL_\mathrm{p}$，其秩 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{H}) = r$。我们的目标是用接收信号 $\boldsymbol{Y}_\mathrm{p}$ 和观测矩阵 $\boldsymbol{A}$ 恢复出低秩稀疏信道 $\boldsymbol{H}$。为叙述简便，下文将时隙索引 t 和导频下标 p 略去。

3.2 算法说明

本文提出的低秩稀疏匹配追踪(LRSMP)算法采用匹配追踪的思想迭代地估计稀疏矩阵的支撑和数据。但跟传统的匹配追踪不同，本文的估计算法从以下两个方面进行了改进：(1)从稀疏向量恢复扩展到结构稀疏矩阵恢复上，由于稀疏矩阵中每列的支撑都一样，相当于样本增加，支撑检测的精度也增加；(2)把低秩特性加入估计算法中，估计精度更高。

估计算法的核心思想是用稀疏矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的替代(proxy) $\boldsymbol{A}^\mathrm{H}\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}$ 来进行 $\boldsymbol{H}$ 的支撑检测。因为观测矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是由导频信号生成的，我们可以通过设计导频使得 $\boldsymbol{A}$ 的 RIP(Restricted Isometry Property)常数很小，由于 $\boldsymbol{H}$ 的能量集中在支撑对应的 s 行上，且 $\boldsymbol{A}$ 的 RIP 常数很小，所以替代信号能量最大的 s 行应该逼近 $\boldsymbol{H}$ 的支撑。迭代过程中，首先计算残差 **Res** 的替代 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{A}^\mathrm{H}\mathbf{Res}$，为并选取其中能量最大的 $2s$ 行作为残差支撑检测的候选集合，如式(8)和式(9)所示。然后将候选集合与上次迭代选取的支撑合并，并用 LS 估计和支撑检测估计出本次迭代选取的支撑，如式(10)、式(11)和式(12)所示。最后对式(12)检测的支撑做 LS 估计和最优低秩估计，如式(13)和式(14)所示，得到本次迭代的估计结果，并用式(15)更新残差。其算法流程图如表 1 所示。其中上标 H 表示共轭转置，上标 † 表示伪逆，$\boldsymbol{A}_T^\dagger$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应索引集合 T 所在的列组成的子矩阵 $\boldsymbol{A}_T$ 的伪逆，

表 1　LRSMP 算法流程图

输入：接收信号 $\boldsymbol{Y}$，观测矩阵 $\boldsymbol{A}$，结构稀疏度 s 和秩 r。
初始化：残差 $\mathbf{Res}=\boldsymbol{Y}$，待估矩阵 $\widehat{\boldsymbol{H}}_0=\mathbf{0}$，待估支撑 $\widehat{T}_0=\varnothing$，迭代索引 $i=0$，收敛阈值 ε。
While
　　$i=i+1$;
　　$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{Res}$　　(8)
　　$\overline{T}=\mathrm{supp}(\boldsymbol{F},2s)$　　(9)
　　$\widetilde{T}=\overline{T}\cup\widehat{T}_{i-1}$　　(10)
　　$\widehat{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{A}_{\widetilde{T}}^{\dagger}\boldsymbol{Y}$　　(11)
　　$\widehat{T}_i=\mathrm{supp}\left(\widehat{\boldsymbol{H}},s\right)$　　(12)
　　$\widehat{\boldsymbol{H}}_s=\boldsymbol{A}_{\widehat{T}_i}^{\dagger}\boldsymbol{Y}$　　(13)
　　$\widehat{\boldsymbol{H}}_i=\mathrm{svd}\left(\widehat{\boldsymbol{H}}_s,r\right)$　　(14)
　　$\mathbf{Res}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{H}}_i$　　(15)
　　if $\left\|\widehat{\boldsymbol{H}}_i-\widehat{\boldsymbol{H}}_{i-1}\right\|_F\Big/\left\|\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F\le\varepsilon$
　　　break;
　end
end
输出：$\widehat{\boldsymbol{H}}=\widehat{\boldsymbol{H}}_i$。

$\mathrm{supp}(\boldsymbol{X},s)$ 表示选取矩阵 $\boldsymbol{X}$ 中能量最大的 s 行，作为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的支撑估计。$\mathrm{svd}(\boldsymbol{X},r)$ 表示对矩阵 $\boldsymbol{X}$ 做 SVD 分解，并选取其中 r 个最大奇异值和其对应的向量重新生成一个秩为 r 的矩阵，作为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的最优低秩逼近。

因为待估计的稀疏矩阵 $\boldsymbol{H}$ 具有结构稀疏特性，每一行要么都是零，要么都不是零，所以可以用传统的匹配追踪算法的思想，通过支撑检测、LS 估计和残差更新来迭代地恢复稀疏信号。但不同的是，在支撑检测时，提出的算法是通过计算估计信号或替代信号某一行的能量作为度量的，相比起矢量稀疏信号的支撑检测只考虑某个元素的能量，本算法检测的准确率更高。另外，因为待估矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的低秩特性，提出的算法在每一步迭代计算中加入最优低秩逼近，能进一步提高估计的精确度。

3.3 收敛性和性能分析

要证明算法的性能和收敛性，首先给出多观测向量问题场景的 RIP 条件。

定义 1　MMV 场景的 RIP 条件[15]，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 s-阶 RIP 常数 δ_s 为满足：

$$\sqrt{(1-\delta_s)}\|\boldsymbol{X}\|_F\le\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_F\le\sqrt{(1+\delta_s)}\|\boldsymbol{X}\|_F \tag{16}$$

对任意 $\mathrm{supp}(\boldsymbol{X})\le s$ 都成立的最小的常数，$\|\boldsymbol{X}\|_F$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的 Frobenius 范数。

引理 1　设 LRSMP 算法中式(10)的候选支撑集合和式(12)的支撑检测分别为 $\widetilde{T}$ 和 $\widehat{T}$，则有

$$\left\|\boldsymbol{H}_{\widehat{T}^C}\right\|_F\le c_1\left\|\boldsymbol{H}_{\widetilde{T}^C}\right\|_F+d_1\sigma_n^2 \tag{17}$$

其中，$c_1=\left(1+\dfrac{2\delta_{4s}}{1-\delta_{3s}}\right)$, $d_1=\dfrac{2}{\sqrt{(1-\delta_{3s})}}$, $\sigma_n^2=\|\boldsymbol{W}\|_F^2$ 为噪声功率，$\widehat{T}^C$ 表示 $\widehat{T}$ 的补集。

引理 2　设 LRSMP 算法第 $i+1$ 次迭代的结果为 $\widehat{\boldsymbol{H}}_{i+1}$，则

$$\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_{i+1}\right\|_F\le c_2\left\|\boldsymbol{H}_{\widehat{T}^C}\right\|_F+d_2\sigma_n^2 \tag{18}$$

其中，$c_2=\left(2+\dfrac{2\delta_{2s}}{1-\delta_s}\right)$, $d_2=\dfrac{2}{\sqrt{(1-\delta_s)}}$。

引理 1 和引理 2 的证明略。

定理 1　对于结构稀疏度 $s=KL_{\mathrm{p}}$，秩为 r 的信道 $\boldsymbol{H}$，和接收信号 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{W}$，设 LRSMP 算法第 i 次估计的结果为 $\widehat{\boldsymbol{H}}_i$，则有

$$\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_{i+1}\right\|_F\le C\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F+D\sigma_n^2 \tag{19}$$

其中，C 和 D 为跟矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 RIP 常数 δ_s 有关的常数。

证明　设 $\widetilde{T}$ 为式(10)选择的支撑集合，根据文献[16]的引理 4.2 和引理 4.3 有

$$\left\|\boldsymbol{H}_{\widetilde{T}^C}\right\|_F\le c_3\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F+d_3\sigma_n^2 \tag{20}$$

其中，$c_3=\dfrac{\delta_{2s}+\delta_{4s}}{1-\delta_{2s}}$, $d_3=\dfrac{2\sqrt{1+\delta_{2s}}}{1-\delta_{2s}}$。根据式(17)、式(18)和式(20)得到

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_{i+1}\right\|_F&\le c_2\left\|\boldsymbol{H}_{\widehat{T}^C}\right\|_F+d_2\sigma_n^2\\&\le c_1c_2\left\|\boldsymbol{H}_{\widetilde{T}^C}\right\|_F+(c_2d_1+d_2)\sigma_n^2\\&\le c_1c_2c_3\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F\\&\quad+(c_1c_2d_3+c_2d_1+d_2)\sigma_n^2\end{aligned} \tag{21}$$

其中，$C=c_1c_2c_3$, $D=c_1c_2d_3+c_2d_1+d_2$。　证毕

考虑定理 1 中的常数 C：

$$C=2\left(1+\frac{\delta_{2s}}{1-\delta_s}\right)\left(1+\frac{2\delta_{4s}}{1-\delta_{3s}}\right)\left(\frac{\delta_{2s}+\delta_{4s}}{1-\delta_{2s}}\right) \tag{22}$$

可以看到 RIP 常数 δ 越小，C 就越小。根据文献[16]的推论 3.4，有 $\delta_{ps}\le p\delta_{2s}$, p 为正整数，于是，

$$\begin{aligned}C&\le2\left(1+\frac{\delta_{2s}}{1-\delta_{2s}}\right)\left(1+\frac{8\delta_{2s}}{1-3\delta_{2s}}\right)\left(\frac{5\delta_{2s}}{1-\delta_{2s}}\right)\\&=\frac{10\delta_{2s}(1+5\delta_{2s})}{(1-\delta_{2s})^2(1-3\delta_{2s})}\end{aligned} \tag{23}$$

当 $\delta_{2s}\le0.057$ 时，$C\le1$。经过递归，可以得到，其中 $\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F\le C^i\|\boldsymbol{H}\|_F+D'\sigma_n^2$，其中 D' 为与常数 C 和 D 相关的常数，因此有 $\lim\limits_{i\to\infty}\left\|\boldsymbol{H}-\widehat{\boldsymbol{H}}_i\right\|_F\le D'\sigma_n^2$。

算法复杂度主要在式(8)的替代计算，式(11)和式(13)的 LS 估计和式(14)的低秩估计这几步运算上。其中替代计算为矩阵乘法，其复杂度为 $O\left(N_{\rm p}N_{\rm r}KL\right)$。LS 估计为矩阵求伪逆，可以用 Richardson 迭代，复杂度为 $O\left(sN_{\rm r}KL\right)$。低秩估计为 SVD 分解，可以用 Lanczos[17]算法迭代，其复杂度为 $O\left(rsN_{\rm r}N_{it}\right)$，其中 N_{it} 为 Lanczos 算法的迭代次数。在本算法中有 $r \le s \ll N_{\rm p} < KL$，所以计算复杂度主要集中在替代计算上，即 $O\left(N_{\rm p}N_{\rm r}KL\right)$。本文两种对比算法 MSBL 算法[18]和 MFOCUSS 算法[19]的复杂度均为 $O\left(\left(N_{\rm p}\right)^2 KL\right)$。对于上行系统，虽然导频数 $N_{\rm p}$ 和基站天线数 $N_{\rm r}$ 没有必然的联系，但 $N_{\rm p} > N_{\rm r}$ 通常是成立的。对于本文中由导频和傅里叶变换矩阵相乘得来的观测矩阵 $\boldsymbol{A}$，文献[20]给出了一个所需导频数的充分条件 $N_{\rm p} \ge \eta s^2 \log(KL)$，其中 η 为常数。对一般的多用户多径信道模型，所需导频数常常达到数百。而对于基站天线数 $N_{\rm r}$，3GPP 协议最多支持的天线配置为 64 根[21]，远小于所需的导频数。因此 LRSMP 算法每次迭代的复杂度要低于 MSBL 算法和 MFOCUSS 算法。另外，根据图 3 的仿真结果，LRSMP 算法的收敛速度也是远比 MSBL 算法和 MFOCUSS 算法快。因此，本文提出的 LRSMP 算法有较低的复杂度。

4 仿真结果

本小节对提出的 LRSMP 算法进行仿真验证。基站端阵列天线配置为 $N_{\rm v} \times N_{\rm h} = 8\times 8$，载波数 $N_{\rm c} = 1024$，其中插入的导频数为 $N_{\rm p} = 100$。基站同时服务 $K = 4$ 个用户，用户信道采用物理信道模型(Physical Channel Model)[4]，其中主径的个数为 $L_{\rm p} = 6$，最大时延为 $L = 50$，每根径的衰落 $\beta_{\rm p}$ 从[0,1]随机生成，水平入射角 $\varphi_{\rm p} \in [0, 2\pi/3]$ 和垂直入射角 $\theta_{\rm p} \in [0, \pi/2]$ 均随机生成。基站周围的簇的个数 $r \ge 6$。我们用归一化的均方误差 NMSE 来度量估计性能：NMSE=$\left\|\boldsymbol{H} - \widehat{\boldsymbol{H}}\right\|_F \Big/ \left\|\boldsymbol{H}\right\|_F$，其中 $\boldsymbol{H}$ 为真实的信道，$\widehat{\boldsymbol{H}}$ 为估计的信道。NMSE 是通过 $N_{\rm run} = 100$ 次仿真后做平均得到。本节采用的对比算法包括 CoSaMP 算法[16]，MSBL 算法[18]和 MFOCUSS 算法[19]。MSBL 算法和 MFOCUSS 算法是多观测向量问题中的两种经典算法，其中 MSBL 算法用贝叶斯 EM 迭代恢复稀疏矩阵，而 MFOCUSS 算法是范数优化类算法。CoSaMP 算法是一种经典的匹配追踪算法。另外 Oracle-LRS 为给定真实的结构稀疏度和秩，先用 LS 估计，再用最优秩 r 逼近得到的参考曲线。Oracle-LS 为只给定结构稀疏度，用 LS 估计得到的曲线，常作为稀疏信号恢复的参考曲线。

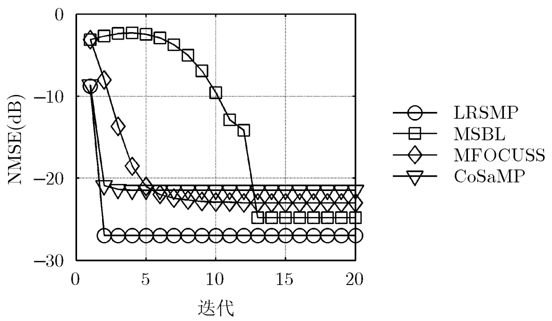
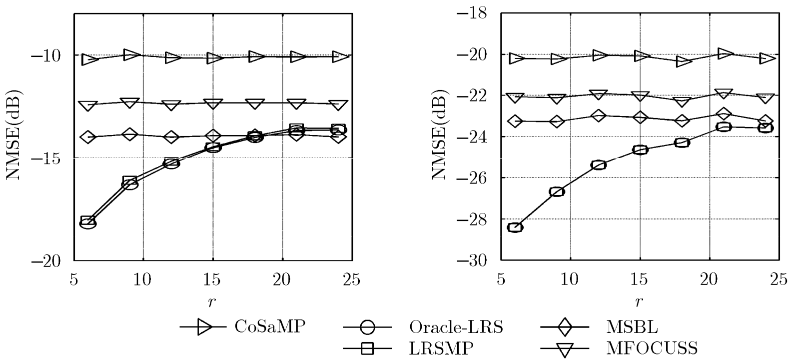


图 3 几种算法收敛性对比

图 3 为信噪比 SNR = 20 dB 时，对比算法的迭代收敛曲线。从图中可以看出，利用匹配追踪的 CoSaMP 算法和本文的 LRSMP 算法收敛最快，其次是 MFOCUSS 算法，而 MSBL 算法收敛最慢。另外，LRSMP 算法收敛到的 NMSE 最低，其次是 MSBL 算法，最差的是 CoSaMP 算法。因此，本文提出的 LRSMP 算法不仅收敛最快，而且收敛时的估计误差最低。

图 4 为所有算法在信噪比 SNR = 10 dB 和 20 dB 时，NMSE 性能随着秩 r 变化的曲线。从图中可以看到，3 个对比算法 MSBL, MFOCUSS 和 CoSaMP 算法对秩 r 的变化不敏感，而本文的 LRSMP 算法在低秩的场景下，性能有明显的提升，并且 NMSE 逼近 Oracle-LRS 算法。这是因为传统的稀疏恢复算法并没有考虑到低秩的特性，虽然 3D-MIMO 场景中信道具有低秩稀疏的特性，传统的算法并不能很好地利用这些特性。而本文的 LRSMP 算法充分利用了低秩特性，并提高了性能。另外在图 4(a)中，当秩 $r \ge 18$ 之后，Oracle-LRS 和 LRSMP 算法的性能反而要略低于 MSBL 算法，这是因为 Oracle-LRS 是 LS 意义下的最优性能，但 LS 本身对噪声很敏感，在低信噪比的情况下性能较差，而 MSBL 算法是以贝叶斯框架下的后验均值为估计结果，对噪声的鲁棒性强于 LS，因此信噪比较小，且秩 r 比较大时，MSBL 算法的性能优于 Oracle-LRS。作为对比，图 4(b)为信噪比 SNR = 20 dB 时，各算法性能随秩变化的曲线，结果与图 4(a)类似，低秩能给 Oracle-LRS 和 LRSMP 算法带来性能提升，但与图 4(a)不同的是在秩 r 很大时，Oracle-LRS 和 LRSMP 算法的性能仍然优于 MSBL 算法。

图 5 为秩 $r = 6$ 时，所有算法在不同信噪比下的 NMSE 性能。可以看到，LRSMP 算法性能只有在



(a) SNR=10 dB (b) SNR=20 dB

图 4 几种算法的 NMSE 在不同信道秩 r 下的性能

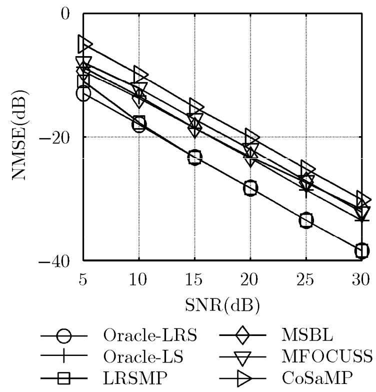


图 5 几种算法的 NMSE 在不同信噪比 SNR 下的性能

低信噪比 SNR = 5 dB 的情况下比 Oracle-LRS 性能略低，随着信噪比增加，性能逼近最优算法的性能。这是因为 LRSMP 算法为贪婪算法，实际上对噪声比较敏感，低信噪比时性能会略受影响。LRSMP 算法比 MSBL 和 MFOCUSS 性能提高了约 5 dB，比 CoSaMP 提高了约 8 dB。这是因为提出的 LRSMP 能充分利用信道的低秩系数特性。另外 Oracle-LRS 和 LRSMP 算法性能比 Oracle-LS 提升了约 5 dB，这是引入低秩这个先验信息带来的性能提升。

5 结束语

本文研究了上行多用户 3D-MIMO 系统的信道估计问题，提出了一种基于匹配追踪的信道估计算法 LRSMP，并分析了算法的收敛性和复杂度。提出的算法充分利用了 3D-MIMIO 信道的结构稀疏性和低秩特性，结构稀疏性可以把信道估计问题转化为多观测向量问题，不仅降低了稀疏信号的规模，减少了复杂度，并且增加了支撑检测的精确度；利用信道的低秩特性，在迭代计算中加入最优低秩逼近，可以提高恢复算法的精度。仿真结果表明提出的算法比其他多观测向量算法收敛更快，复杂度更低，且估计精度更高。

参 考 文 献

[1] MARZETTA T. Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2010, 9(11): 3590–3600. doi: 10.1109/TWC.2010.092810.091092.

[2] NAM Y H, NG B L, SAYANA K, *et al.* Full-Dimension MIMO (FD-MIMO) for next generation cellular technology [J]. *IEEE Communications Magazine*, 2013, 51(6): 172–179. doi: 10.1109/MCOM.2013.6525612.

[3] BAJWA W U, HAUPT J, SAYEED M S, *et al.* Compressed channel sensing: A new approach to estimating sparse multipath channels[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2010, 98(6): 1058–1076. doi: 10.1109/ JPROC.2010.2042415.

[4] TSE D and VISWANATH P. Fundamentals of Wireless Communication[M]. New York: Cambridge University Press, 2005: 290–328.

[5] POUTANEN J, HANEDA K, SALMI J, *et al.* Significance of common scatters in multi-link indoor radio wave propagation [C]. Proceedings of the Fourth European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), Barcelona, Spain, 2010: 1–5.

[6] XIE Hongxiang, GAO Feifei, and JIN Shi. An overview of low-rank channel estimation for massive MIMO systems[J]. *IEEE Access*, 2016, 4: 7313–7321. doi: 10.1109/ACCESS. 2016.2623772.

[7] BARBOTIN Y, HORMATI A, RANGAN S, *et al.* Estimation of sparse MIMO channels with common support [J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2012, 60(12): 3705–3716. doi: 10.1109/TCOMM.2012.091112.110439.

[8] NAN Yang, ZHANG Li, and SUN Xin. Efficient downlink channel estimation scheme based on block-structured compressive sensing for TDD massive MU-MIMO systems[J]. *IEEE Wireless Communications Letters*, 2015, 4(4): 345–348. doi: 10.1109/LWC.2015.2414933.

[9] LIU Kai, FENG Hui, YANG Tao, *et al.* Structured sparse channel estimation for 3D-MIMO systems[C]. IEEE Vehicular Technology Conference (VTC), Nanjing, China, 2016: 1–6.

[10] TSAI Chengrung, CHEN Chianghen, LIU Yuhsin, *et al.* Joint spatially sparse channel estimation for millimeter-wave cellular systems[C]. IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP), Washington D.C., USA, 2016: 605–609.

[11] NGUYEN S L H and GHRAYEB A. Compressive sensing-based channel estimation for massive multiuser MIMO systems[C]. IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC), Shanghai, China, 2013:

2890–2895.

[12] FANG Jun, LI Xingjian, LI Hongbin, *et al*. Low-rank covariance-assisted downlink training and channel estimation for FDD massive MIMO systems[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2017, 16(3): 1935–1947. doi: 10.1109/TWC.2017.2657513.

[13] ZHU Yi, LIU Lingjia, and ZHANG Jianzhong. Joint angle and delay estimation for 2D active broadband MIMO-OFDM systems[C]. IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM), Atlanta, USA, 2013: 3300–3305.

[14] RUSEK F, PERSSON D, LAU B K, *et al*. Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2013, 30(1): 40–60. doi: 10.1109/MSP.2011.2178495.

[15] GAO Zhen, DAI Linglong, DAI Wei, *et al*. Structured compressive sensing-based spatio-temporal joint channel estimation for FDD massive MIMO[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(2): 607–617. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2508809.

[16] NEEDELL D and TROPP J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. *Communications of the ACM*, 2008, 53(12): 93–100.

[17] GOLUB G H and VAN LOAN C F. Matrix Computations [M]. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996: 470–499.

[18] WIPF D P and RAO B D. An empirical Bayesian strategy for solving the simultaneous sparse approximation problem[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(7): 3704–3716. doi: 10.1109/TSP.2007. 894265.

[19] COTTER S F, RAO B D, ENGAN K, *et al*. Sparse solutions to linear inverse problems with multiple measurement vectors [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2005, 53(7): 2477–2488. doi: 10.1109/TSP.2005.849172.

[20] WU Xiaying, GU Lixin, WANG Wenjin, *et al*. Pilot design and AMP-based channel estimation for massive MIMO-OFDM uplink transmission[C]. IEEE Annual International Symposium on Personal Indoor and Mobile Radio Communications (PIMRC), Valencia, Spain, 2016: 1–7.

[21] 3GPP TR 36.897. Study on elevation beamforming/ Full-Dimension (FD) MIMO for LTE[OL]. http://www.3gpp.org 2015.

刘 凯： 男，1988 年生，博士生，研究方向为稀疏信道估计和波束成形.

冯 辉： 男，1980 年生，副教授，研究方向为分布式信号处理与应用.

杨 涛： 男，1970 年生，副教授，研究方向为无线网络与通信信号处理.

胡 波： 男，1968 年生，教授，博士生导师，研究方向为数字通信、数字图像处理与电子系统设计.