

基于 DOA 和 TDOI 的主瓣扫描辐射源定位方法

张翼飞^{①②} 张敏^{*②} 郭福成^②

^①(火箭军工程大学信息工程系 西安 710025)

^②(国防科学技术大学电子科学与工程学院 长沙 410073)

摘要: 针对具有已知扫描周期特性的辐射源无源定位问题, 该文提出一种基于主瓣到达角(DOA)和扫描截获时间差(TDOI)的联合定位体制。通过对其定位误差的克拉美-罗下限(CRLB)推导, 给出了联合定位体制的性能与 DOA 和信号截获时间(TOI)观测量的等效测角噪声功率比的关系。为了利用非线性联合观测量确定扫描辐射源的位置, 通过将 TDOI 观测量转换成等效 DOA 观测量, 给出一种加权伪线性最小二乘(WPLS)定位方法; 为消除观测矩阵相关噪声导致的 WPLS 估计偏差, 提出了一种加权辅助变量(WIV)定位方法, 算法复杂度约为 WPLS 算法的 2 倍。仿真结果表明, WIV 方法的定位误差在辐射源单个扫描周期内即可达到 CRLB, 定位性能与极大似然(ML)定位方法相当; 随着观测次数的增多, WIV 方法可以渐近达到无偏估计。

关键词: 无源定位; 机械扫描; 到达角; 截获时间差; 最小二乘

中图分类号: TN971

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)12-2921-08

DOI: 10.11999/JEIT170141

Scanning Emitter Localization Using DOA and TDOI Measurements

ZHANG Yifei^{①②} ZHANG Min^② GUO Fucheng^②

^①(Department of Information Engineering, Rocket Force University of Engineering, Xi'an 710025, China)

^②(College of Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

Abstract: The determination of the scanning emitter position with known scan rate using Direction Of Arrival (DOA) and Time Difference Of Interception (TDOI) is investigated. The Cramér-Rao Lower Bound (CRLB) of the DOA and TDOI based localization regime is firstly derived. It demonstrates that the equivalent DOA measurements noise power ratio of the individual regime is closely related to the improvement of the combination regime. To exclusively determine the position of the scanning emitter, the TOI measurements are transformed to the corresponding DOA measurements and then a Weighted Pseudo-linear Least Square (WPLS) estimator is proposed. However, the WPLS is biased due to the noise correlation between the regressor and regressand of the pseudo-linear equation. The Instrumental Variable (IV) method is resorted to eliminate the bias caused by the WPLS, and a Weighted IV (WIV) estimator, at the cost of two times computational complexity of the WPLS, is proposed. Simulations show that the WIV performs approximately to the Maximum Likelihood (ML) estimator. It can reach the CRLB in one scan cycle, and is asymptotic unbiased within multiple cycles.

Key words: Passive localization; Mechanical scanning; Direction Of Arrival (DOA); Time Difference Of Interception (TDOI); Least Squares (LS)

1 引言

无源定位技术, 又称被动定位技术, 仅通过接收并测量非合作信号中包含辐射源位置信息的参数来确定辐射源位置, 在侦察、监视、预警等领域中受到广泛关注和研究^[1]。无源定位技术采用一种或多

种被动测量的定位参数建立与辐射源位置的函数关系, 通过最优化估计实现对辐射源的定位。目前常用的定位体制包括辐射源的到达角(Direction Of Arrival, DOA)、到达时间(Time Of Arrival, TOA)、到达频率(Frequency Of Arrival, FOA)、到达时间差(Time Difference Of Arrival, TDOA)、到达频率差(Frequency Difference Of Arrival, FDOA)信息以及它们组合形成的联合定位体制等^[2-10]。

机械扫描雷达辐射源通过发射天线周期性的运动(典型的如水平面内匀速旋转)实现对360°侦搜区

收稿日期: 2017-02-21; 改回日期: 2017-09-18; 网络出版: 2017-11-01

*通信作者: 张敏 zhangmin1984@126.com

基金项目: 上海航天科技创新基金项目(SAST2015028)

Foundation Item: Shanghai Aerospace Science and Technology Innovation Fund (SAST2015028)

域中目标的主动探测。该类辐射源大多具有主瓣信号信噪比高、波束窄、扫描周期稳定等特点^[1]。对机械扫描雷达辐射源的被动定位问题,由于其主瓣信号的窄波束特性,主瓣信号同时覆盖的区域有限,因此多个观测站可能无法同时截获其主瓣信号,从而无法通过测量主瓣信号TDOA或FDOA实现定位^[5,6,9];基于TOA的定位方法通常仅适用于具有固定脉冲重复周期(Pulse Repetition Interval, PRI)特性的辐射源^[3];对于非合作扫描辐射源,由于其发射信号的载波频率和调制参数等先验信息无法精确获得,因此基于FOA定位方法^[4]也很难应用到扫描辐射源的定位中。

目前针对扫描辐射源研究最为深入的是基于DOA或主瓣信号截获时间(Time Of Interception, TOI)的定位方法。基于DOA定位方法研究最早且应用广泛,它不依赖于信号的调制样式和扫描方式,是一种较为通用的定位体制。利用DOA观测量的数学特性,可以很容易转换得到关于辐射源位置的伪线性观测方程^[12],从而得到经典的伪线性最小二乘(Pseudo-linear Least Square, PLS)定位算法^[13],并在此基础之上发展出了辅助变量^[8](Instrumental Variable, IV)、加权辅助变量^[14](Weighted IV, WIV)等多种定位方法。扫描辐射源的信号TOI是信号主瓣峰值到达观测站的时刻^[11]。TOI观测量中包含了辐射源与观测站中的相对位置信息,通过多个观测站在一个扫描周期内(或单个观测站在多个周期^[12])获得的一组TOI来实现定位。在目前的研究中,通常假设辐射源的扫描周期已知^[11];对于周期未知的扫描辐射源,由于其扫描特性在较长时间内保持稳定,因此可通过多次测量TOI估计扫描周期^[15]。利用已知扫描周期,可以将辐射源的TOI观测量转换成截获时间差(Time Difference Of Interception, TDOI)。利用TDOI观测量可以得到关于辐射源位置的伪线性观测方程,类似于DOA观测量,可采用伪线性类定位方法实现扫描辐射源位置估计^[16]。

直观上联合多站测量的DOA和TDOI对扫描辐射源进行定位,可以利用融合不同定位测量的优点从而有效地提高定位精度。一种通用的方法是采用极大似然(Maximum Likelihood, ML)估计方法,采用Taylor级数扩展或Gauss-Newton算法计算得到辐射源^[17]。但是这类迭代类定位方法需要离辐射源真实位置较近的一个初始值,这在实际定位中较难满足。另外,当辐射源与观测站之间的几何构型较差时,这类方法很容易出现计算发散的问题。它存在着初始化困难、迭代计算不收敛和局部最优化问题。另一方面,由于对扫描辐射源的多站DOA和多站

TDOI定位方法都存在伪线性类的解析定位算法,因此似乎可以很容易地得到一种联合的解析定位算法。但是两类观测量的伪线性定位算法存在一个显著的差异:基于DOA的伪线性算法中的待估计量是辐射源的位置;而基于TDOI的算法中待估计量是一个扩展变量^[16],除了辐射源位置外还包括未知中间变量 β_1 。因此很难简单地将两类解析算法进行组合得到新的联合定位算法。

针对以上已知扫描周期的联合DOA和TDOI定位问题,本文重点研究了联合体制下解析定位算法及其理论性能。首先推导了联合定位体制的克拉美-罗下限(Cramér-Rao Lower Bound, CRLB),得到了联合定位体制性能的提升与TOI和DOA等效测角噪声功率比的关系。为得到辐射源位置的解析定位结果,将TDOI观测量转换为等效DOA观测量,得到了关于辐射源位置的伪线性方程组,提出了一种加权伪线性最小二乘(Weighted PLS, WPLS)定位方法。为消除WPLS中由于相关噪声所引起的定位偏差,通过构造适当的IV矩阵和权值矩阵,提出了一种WIV定位方法。仿真结果表明联合定位体制可有效提升单独定位体制的定位精度,并且WIV方法可以在单个扫描周期内达到CRLB,在多个周期内达到渐近无偏估计。

2 定位模型

不失一般性地,本文仅考虑远场条件下2维定位问题,涉及定位模型和方法可以很容易地推广到3维定位中。在2维平面内,假设具有已知扫描周期为 T_p 的固定扫描辐射源位于 $\mathbf{x}_T = [x_T \ y_T]^T$,对应的扫描角速率为 $\omega = -2\pi/T_p$ (逆时针方向扫描时为正)。利用 K 个观测站对该辐射源进行定位,假设在一个扫描周期内,辐射源的主瓣扫描信号依次扫过第1个到第 K 个观测站;在 t_k 时刻, $k = 1, 2, \dots, K$,观测站 $\mathbf{s}_k = [x_{Ok} \ y_{Ok}]^T$ 截获到了主瓣扫描信号,此时的定位几何关系如图1所示。

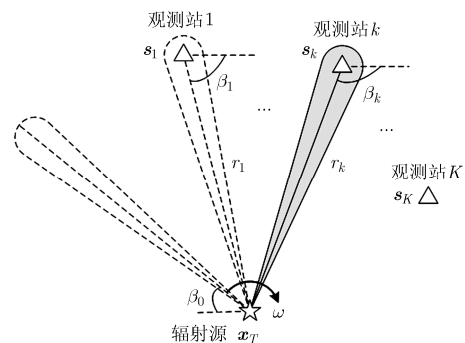


图1 t_k 时刻扫描辐射源定位几何示意图

如图1所示,在观测时刻 t_k ,观测站 s_k 测量得到的辐射源主瓣信号的DOA观测量为

$$\hat{\beta}_k = \beta_k(\mathbf{x}_T) + \eta_k = \arctan(y_k/x_k) + \eta_k \quad (1)$$

式中, $k=1,2,\dots,K$; $x_k = x_T - x_{Ok}$; $y_k = y_T - y_{Ok}$; 假设观测噪声 η_k 为具有方差为 σ_β^2 的独立同分布高斯白噪声。

观测站 s_k 测量得到的辐射源主瓣信号TOI观测量为

$$\hat{t}_k = t_k + \varepsilon_k = \frac{\beta_k - \beta_0}{\omega} + \frac{r_k}{c} + t_0 + \varepsilon_k \quad (2)$$

式中, $k=1,2,\dots,K$; c 为电磁波在自由空间中的传播速度; $r_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$ 为辐射源到观测站的相对距离; t_0 为辐射源信号发射起始时刻; β_0 为主瓣信号发射起始方向角; ε_k 是方差为 σ_t^2 的独立同分布高斯白噪声。

由于辐射源初始状态 t_0 和 β_0 未知,不能直接将 \hat{t}_k 作为观测量进行定位处理。类似于TDOA和FDOA定位方法,通过不同观测站之间的TOI差分的方式,可以消除未知状态 t_0 和 β_0 的影响^[11]。不失一般性,在一个扫描周期内,可以将第1个观测的TOI作为时间基准,得到扫描辐射源主瓣信号的TDOI观测量为

$$\hat{\tau}_k = \hat{t}_k - \hat{t}_1 \approx \tau_k(\mathbf{x}_T) + \xi_k \quad (3)$$

式中, $k=2,3,\dots,K$; $\tau(\mathbf{x}_T) = (\beta_k(\mathbf{x}_T) - \beta_1(\mathbf{x}_T))/\omega$; $\xi_k = \varepsilon_k - \varepsilon_1$ 为TDOI测量噪声。式中的近似是因为 $(r_k - r_1)/c \ll \hat{\tau}_k$,可以忽略其对TDOI的影响^[11,18]。

在一个扫描周期内, K 个观测站可以测量得到 K 个DOA和 $K-1$ 个TDOI观测量,将这些观测量表示成向量的形式

$$\mathbf{b} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_T) + \boldsymbol{\delta} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{b} = [\hat{\beta}_{1:K} \mid \hat{\tau}_{2:K}]^T$ 为DOA和TDOI的含有噪声的测量值; $\mathbf{h}(\mathbf{x}_T) = [\beta_{1:K}(\mathbf{x}_T) \mid \tau_{2:K}(\mathbf{x}_T)]^T$ 为辐射源位置的观测函数; $\mathbf{d} = [\eta_{1:K} \mid \xi_{2:K}]^T$ 为DOA和TDOI的测量噪声。

此时,基于DOA和TDOI对扫描辐射源的联合定位问题即是对式(4)所表示的非线性方程组的求解问题。对于已知扫描周期的辐射源,通过式(3)可将TDOI表示为两次DOA差值的函数,因此在DOA观测量的基础上引入TDOI观测并不会提升DOA的可观测性,DOA和TDOI联合定位体制与仅DOA定位的可观测性相同:至少需要2个固定观测站,且所有观测站不能与辐射源共线^[19]。

3 克拉美-罗下限分析

下面基于定位误差的CRLB分析联合定位体制的理论定位误差。CRLB是任意无偏估计所能达到的最优理论误差下限^[17]。根据CRLB的定义,由式(1)和式(3)可以分别得到仅DOA和仅TDOI定位的CRLB分别为

$$\mathbf{P}_\beta = (\mathbf{J}_\beta^T \mathbf{R}_\beta^{-1} \mathbf{J}_\beta)^{-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{P}_\tau = (\mathbf{J}_\tau^T \mathbf{R}_\tau^{-1} \mathbf{J}_\tau)^{-1} \quad (6)$$

式中, \mathbf{J}_β 和 \mathbf{J}_τ 为相应观测函数关于辐射源位置 \mathbf{x}_T 的Jacobi矩阵; \mathbf{J}_β 中各行元素为 $\mathbf{J}_\beta^{(k)} = [-y_k/r_k^2, x_k/r_k^2]$, $k=1,2,\dots,K$; \mathbf{J}_τ 中各行元素为 $\mathbf{J}_\tau^{(k-1)} = [-y_k/r_k^2 + y_1/r_1^2, x_k/r_k^2 - x_1/r_1^2]/\omega$, $k=2,3,\dots,K$; $\mathbf{R}_\beta = \sigma_\beta^2 \mathbf{I}_K$ 为DOA测量噪声的协方差矩阵; $\mathbf{R}_\tau = \sigma_t^2 \mathbf{1}_{K-1} + \sigma_t^2 \mathbf{I}_{K-1}$ 为TDOI测量噪声的协方差矩阵; \mathbf{I}_k 和 $\mathbf{1}_k$ 分别为 $k \times k$ 阶单位矩阵和全1矩阵。

根据DOA和TDOI观测量误差之间的独立性,可得联合定位误差的CRLB。

$$\mathbf{P} = (\mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \quad (7)$$

式中, $\mathbf{J}^T = [\mathbf{J}_\beta^T \mid \mathbf{J}_\tau^T]$ 和 $\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_\beta, \mathbf{R}_\tau)$ 分别为联合定位体制的Jacobi矩阵和测量噪声协方差矩阵。

将式(5)和式(6)中的定义代入式(7)可得

$$\mathbf{P} = (\mathbf{J}_\beta^T \mathbf{R}_\beta^{-1} \mathbf{J}_\beta + \mathbf{J}_\tau^T \mathbf{R}_\tau^{-1} \mathbf{J}_\tau)^{-1} = (\mathbf{P}_\beta^{-1} + \mathbf{P}_\tau^{-1})^{-1} \quad (8)$$

式中,

$$\mathbf{P}_\beta^{-1} = \frac{1}{\sigma_\beta^2} \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^K \frac{y_k^2}{r_k^4} & -\left(\sum_{k=1}^K \frac{x_k y_k}{r_k^4}\right) \\ -\left(\sum_{k=1}^K \frac{x_k y_k}{r_k^4}\right) & \sum_{k=1}^K \frac{x_k^2}{r_k^4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_\tau^{-1} = \frac{\sigma_\beta^2}{\omega^2 \sigma_t^2} \mathbf{P}_\beta^{-1} - \frac{1}{\omega^2 \sigma_t^2 K} \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad (10)$$

$$\mathbf{a}^T = \left[-\sum_{k=1}^K \frac{y_k}{r_k^2}, \sum_{k=1}^K \frac{x_k}{r_k^2} \right] \quad (11)$$

根据矩阵求逆引理^[20]和代数推导可得

$$\mathbf{P} = \frac{\omega^2 \sigma_t^2}{\omega^2 \sigma_t^2 + \sigma_\beta^2} \left(\mathbf{P}_\beta + \frac{\mathbf{P}_\beta \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{P}_\beta}{(\omega^2 \sigma_t^2 + \sigma_\beta^2) K - \mathbf{a}^T \mathbf{P}_\beta \mathbf{a}} \right) \quad (12)$$

令 $\rho = \omega^2 \sigma_t^2 / \sigma_\beta^2$, $\omega^2 \sigma_t^2$ 为已知扫描周期辐射源的TOI测量等效测角噪声功率。因此可以将 ρ 看作TOI与DOA的等效测角噪声功率比,将其代入式(12)可得

$$\mathbf{P} = \frac{\rho}{1 + \rho} \left(\mathbf{P}_\beta + \frac{\mathbf{P}_\beta \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{P}_\beta}{(1 + \rho) \sigma_\beta^2 K - \mathbf{a}^T \mathbf{P}_\beta \mathbf{a}} \right) \quad (13)$$

式(13)将DOA和TDOI联合定位误差的CRLB转换为噪声功率比 ρ 和仅DOA定位的CRLB的关系表达式。对于给定辐射源位置、观测站数量 K 和位置的定位场景,联合定位体制的性能提升与 ρ 密切相关。当 $\rho \rightarrow 0$ 时, $\omega^2\sigma_i^2 \ll \sigma_\beta^2$, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_\tau \rightarrow \mathbf{0}$, 即TOI的等效测角精度要远高于DOA的测量精度,此时联合定位误差趋于仅TDOI定位体制; 同理当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时, $\omega^2\sigma_i^2 \gg \sigma_\beta^2$, $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}_\beta$, 即此时的联合定位误差趋于仅DOA定位体制; 当 $0 < \rho < +\infty$ 时, 联合体制定位性能优于任意单独定位体制。

下面以第5节中的仿真场景进一步分析联合定位性能与噪声功率比 ρ 的关系。在DOA测量误差保持不变的情况下, 图2和图3分别给出了理论定位误差与 ρ 和辐射源扫描周期的关系。

从图2中可以看出, 对于给定的DOA测量误差和辐射源扫描周期, 联合定位体制在 $-30 \text{ dB} \leq \rho \leq 10 \text{ dB}$ 时, 比单一定位体制性能提升明显; 当 $\rho > 10 \text{ dB}$ 时, 其定位性能趋于DOA性能; 当 $\rho < -30 \text{ dB}$ 时, 其定位性能趋于TDOI性能。

从图3中可以看出, 对于给定的DOA和TOI测量误差, 辐射源扫描周期越大, TDOI定位性能越好; 同时大扫描周期会使 ρ 变小, 进而使联合定位体制的性能趋于TDOI定位结果, 有效提升DOA定位性能。

4 定位方法

4.1 极大似然(ML)定位方法

为了从DOA和TDOI联合观测中估计出辐射源位置, 最直接的方法可以采用ML估计方法。根据式(4)所确立的定位观测模型, 可以得到关于辐射源位置 \mathbf{x}_T 的似然函数为

$$p(\mathbf{b}; \mathbf{x}_T) = \frac{1}{(2\pi)^{(2K-1)/2} \det(\mathbf{R})^{1/2}} \cdot \exp\left(-(\mathbf{b} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_T))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_T)) / 2\right) \quad (14)$$

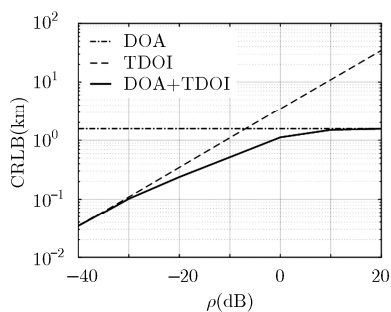


图2 当 $\sigma_\beta = 1^\circ$, $T_n = 2 \text{ s}$ 时CRLB与等效测角噪声功率比的关系

对辐射源位置 \mathbf{x}_T 的ML估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{ML}} = \arg \min_{\mathbf{x}_T} F_{\text{ML}}(\mathbf{x}_T, \mathbf{b}) \quad (15)$$

式中, 代价函数 $F_{\text{ML}}(\mathbf{x}_T, \mathbf{b})$ 表示为

$$F_{\text{ML}} = (\mathbf{b} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_T))^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_T)) \quad (16)$$

在独立高斯噪声假设条件下, ML的求解转换为一个非线性加权最小二乘问题, 通常情况下没有解析解, 常用的方法是通过Gauss-Newton迭代方法计算求解^[17],

$$\hat{\mathbf{x}}_{i+1} = \hat{\mathbf{x}}_i + (\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}_i}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}_i})^{-1} \mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}_i}^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_i)) \quad (17)$$

式中, $i = 1, 2, \dots$; $\hat{\mathbf{x}}_i$ 表示辐射源位置第 i 次的估计值; $\mathbf{J}_{\hat{\mathbf{x}}_i} = \mathbf{J}|_{\mathbf{x}_T = \hat{\mathbf{x}}_i}$ 为用估计值 $\hat{\mathbf{x}}_i$ 计算得到的观测量方程的Jacobi矩阵。

尽管ML定位方法是渐近无偏最优定位方法, 但这种迭代类定位方法需要离辐射源真实位置较近的一个初始值, 这在实际定位中较难满足; 另外, 在观测几何构形较差、观测次数少及观测噪声较大等情况下, 容易出现定位发散现象。因此本文在后文的仿真中, 采用辐射源的真实位置进行迭代计算, 仅将ML定位方法作为一种理论最优估计的对比方法。

4.2 加权伪线性(WPLS)定位方法

对于周期已知扫描辐射源的定位问题, 尽管仅DOA观测量或仅TDOI观测量分别存在对应的解析定位算法, 但是基于TDOI的伪线性解析定位方法的被估计量中不仅包含辐射源的位置, 还需要通过引入一个未知中间变量 β_1 进行扩展^[15,16,18], 这就使得不能将DOA和TDOI体制的解析定位算法进行简单地组合得到联合定位的解析算法。

利用DOA和TDOI观测量的特性, 本文提出了一种新的基于DOA和TDOI的伪线性方法。其基本思想是通过引入一次DOA观测, 将TDOI观测量转换为等效角度观测量; 再将所有DOA观测量和TDOI的等效角度观测量转化为关于 \mathbf{x}_T 的伪线性函数, 进而得到辐射源位置的解析定位结果。

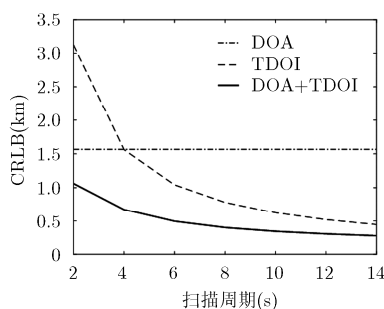


图3 当 $\sigma_\beta = 1^\circ$, $\sigma_\tau = 5 \text{ ms}$ 时CRLB与扫描周期的关系

首先将一次含有噪声的DOA观测量代入式(3)可得

$$\hat{t}_{k,1} = (\beta_k - \hat{\beta}_1 + \eta_1) / \omega + \xi_k \quad (18)$$

式中, $k = 2, 3, \dots, K$ 。根据前文中的定义, $\hat{\beta}_1$ 为一个扫描周期内, 观测站1测量的主瓣信号DOA, η_1 为对应的测量误差。式(18)进一步整理后可得TDOI的等效角度观测量为

$$\hat{\alpha}_k \triangleq \omega \hat{t}_{k,1} + \hat{\beta}_1 = \beta_k + v_k \quad (19)$$

式中, $k = 2, 3, \dots, K$; $v_k = \eta_1 + \omega \xi_k$ 为等效角度测量噪声。

从式(19)可以看出, 通过引入观测站1的一次DOA观测, 将TDOI观测量转换成了观测站 k 对主瓣信号入射角度 β_k 的一次新的测量 $\hat{\alpha}_k$, 等效测角噪声为 v_k , 且此时的等效测角噪声不再相互独立。

利用多站获得的DOA观测量以及由TDOI得到的等效角度观测量, 可得联合观测量关于辐射源位置 \mathbf{x}_T 的伪线性形式为

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x}_T + \mathbf{v} \quad (20)$$

式中, $\mathbf{z}, \mathbf{H}, \mathbf{v}$ 的第 i 行分别为

$$\mathbf{z}^{(i)} = \begin{cases} y_{Ok} \cos \hat{\beta}_k - x_{Ok} \sin \hat{\beta}_k, & k = i, \\ 1 \leq i \leq K \\ y_{Ok} \cos \hat{\alpha}_k - x_{Ok} \sin \hat{\alpha}_k, & k = i - K, \\ K + 1 \leq i \leq 2K - 1 \end{cases} \quad (21)$$

$$\mathbf{H}^{(i)} = \begin{cases} [-\sin \hat{\beta}_k \cos \hat{\beta}_k], & k = i, \\ 1 \leq i \leq K \\ [-\sin \hat{\alpha}_k \cos \hat{\alpha}_k], & k = i - K, \\ K + 1 \leq i \leq 2K - 1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\mathbf{v}^{(i)} = \begin{cases} r_k \sin \eta_k, & k = i, \\ 1 \leq k \leq K \\ r_k \sin(\eta_1 + \omega \xi_k), & k = i - K, \\ K + 1 \leq k \leq 2K - 1 \end{cases} \quad (23)$$

由此可得联合DOA和TDOI的伪线性最小二乘(Pseudo-linear Least Square, PLS)估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{PLS}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z} \quad (24)$$

为了进一步消除PLS估计的误差协方差, 下面给出一种加权伪线性最小二乘(WPLS)定位方法。在观测噪声较小时有

$$r_k \sin \eta_k \approx r_k \eta_k \quad (25)$$

$$r_k \sin(\eta_1 + \omega \xi_k) \approx r_k (\eta_1 + \omega \xi_k) \quad (26)$$

从而可以得到 \mathbf{v} 的均值为 $\mathbf{0}$, 协方差矩阵为

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_\beta & \mathbf{\Sigma}_{\alpha,\beta} \\ \mathbf{\Sigma}_{\alpha,\beta}^T & \mathbf{\Sigma}_\alpha \end{bmatrix} \quad (27)$$

式中, $\mathbf{\Sigma}_\alpha = \omega^2 \sigma_\tau^2 (\text{diag}(\mathbf{d}^T \circ \mathbf{d}^T) + \mathbf{d}\mathbf{d}^T) + \sigma_\beta^2 \mathbf{d}\mathbf{d}^T$; $\mathbf{\Sigma}_\beta = \sigma_\beta^2 \text{diag}([r_1^2, \mathbf{d}^T \circ \mathbf{d}^T])$; $\mathbf{\Sigma}_{\alpha,\beta} = \sigma_\beta^2 [r_1 \mathbf{d} \quad \mathbf{0}]$; $\mathbf{d}^T = [r_2 \ r_3 \ \dots \ r_K]$; “ \circ ”表示向量对应元素相乘运算。由此可以得到扫描辐射源位置的WPLS估计为

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} \quad (28)$$

由于权值矩阵是观测站与辐射源距离 r_k 的函数, 而在实际定位中 r_k 是未知的, 通常可以利用得到的 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{PLS}}$ 重新估计 r_k 并更新权值矩阵 $\mathbf{\Sigma}^{-1}$, 然后再利用 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}}$ 进行两三次迭代得到更加精确的权值矩阵和估计结果。

4.3 加权辅助变量(WIV)定位方法

在WPLS定位算法中, DOA和TDOI的观测噪声同时存在于观测量 \mathbf{z} 和观测系数矩阵 \mathbf{H} 中, \mathbf{z} 和 \mathbf{H} 中的噪声相关性会导致WPLS为有偏估计^[14,21]。为消除相关噪声影响, 可以使用IV方法, 并采用加权的形式(即WIV方法)来减小估计的均方误差(Mean Square Error, MSE)。采用WIV方法对辐射源位置 \mathbf{x}_T 估计的归一化方程为

$$\mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}} = \mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} \quad (29)$$

式中, \mathbf{G} 为IV矩阵; $\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}}$ 为 \mathbf{x}_T 的WIV估计, 即

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{z} \quad (30)$$

IV方法的关键在于如何构造IV矩阵 \mathbf{G} , 它取决于采用的定位体制和伪线性方程的表示形式^[8,14,18,21,22]。最优IV矩阵 \mathbf{G} 是用真值 β_k 和 $t_{k,1}$ 计算得到的 \mathbf{H} 矩阵, 但是该矩阵无法得到, 可以用WPLS估计得到的结果来计算 \mathbf{H} 矩阵作为 \mathbf{G} 的一种构造方法。首先根据 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}}$ 重新估计各观测站可以测量得到的DOA。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= \beta_1(\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}}) \\ \tilde{\alpha}_k &= \tilde{\beta}_k = \beta_k(\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}}), \quad k = 2, 3, \dots, K \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

将它们代入 \mathbf{H} 中计算得到IV矩阵:

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}|_{\hat{\alpha}_k = \tilde{\beta}_k = \tilde{\beta}_k, \hat{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1}, \quad k = 2, 3, \dots, K \quad (32)$$

根据IV理论^[23], 因为 \mathbf{G} 是由 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}}$ 计算得到的, 式(20)就可以变为相容矩阵的形式 $\mathbf{G}\hat{\mathbf{x}}_{\text{WPLS}} = \tilde{\mathbf{z}}$, 式中 $\tilde{\mathbf{z}}$ 由 $\tilde{\alpha}_k$ 和 $\tilde{\beta}_k$ 计算得到。该线性方程中不存在噪声项, 因此该过程近似消除了 \mathbf{G} 与噪声项 \mathbf{v} 的相关性, 从而使得式(30)的估计为渐近无偏估计^[14], 即有

$$\begin{aligned} \text{bias} &= E\{\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}} - \mathbf{x}_T\} \\ &= E\left\{(\mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \mathbf{v}\right\} \approx \mathbf{0} \end{aligned} \quad (33)$$

与WPLS方法中权值矩阵计算类似, WIV算法中的权值矩阵也可以根据当前 $\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}}$ 的估计结果迭代计算得到, 从而使得

$$\begin{aligned} \text{cov} &= E\left\{(\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}} - \mathbf{x}_T)(\hat{\mathbf{x}}_{\text{WIV}} - \mathbf{x}_T)^T\right\} \\ &\approx (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} \\ &\quad \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{G} (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \approx (\mathbf{H}_0^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{H}_0)^{-1} \quad (34) \end{aligned}$$

式中, \mathbf{H}_0 为用不含噪声的DOA和TDOI计算得到的系数矩阵; $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 为用辐射源与观测站真实距离计算得到的权值矩阵。将式(22)和式(27)代入式(34)并利用矩阵求逆引理可以得到

$$\text{cov} \approx (\mathbf{H}_0^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{H}_0)^{-1} = (\mathbf{J}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{J})^{-1} = \mathbf{P} \quad (35)$$

式(35)表明在误差较小的情况下, WIV方法可以渐近达到定位的CRLB。

4.4 算法复杂度分析

算法的复杂度主要体现在乘法运算的计算量上, 以上3种算法中由乘法运算量所表征的算法复杂度如表1所示。

表1中, n 为DOA与TOI总的观测次数, m 为被估计参数的维数, s 为ML算法中迭代初始化的复杂度, l 为迭代次数, l_1 为计算权值矩阵的复杂度, l_2 为重新计算观测量时的复杂度。由于ML算法在实际使用过程中很大程度上依赖于初始化的精确程度和迭代次数^[17], 即 s 的大小约定了ML算法的复杂度, 而 s 的值通常较大, 因此ML算法复杂度明显高于WPLS和WIV算法; 对于大量观测 n , l_1 和 l_2 可以认为是较小常数, 以 $m=2$ 时可以计算得到WIV算法计算量大约是WPLS算法的2倍, 这是由于WIV算法需要通过WPLS算法的结果来得到IV矩阵, 再利用IV矩阵重新得到辐射源位置, 相当于进行了两次WPLS计算。

5 仿真验证

通过计算机数字仿真的方法对提出的定位算法进行分析。根据文献[16]中的扫描辐射源定位场景, 4个观测站与辐射源之间的相对位置关系如图4所示, 辐射源主瓣信号沿顺时针方向扫描。观测站 s_1 到 s_4 依次截获主瓣扫描信号, 测角误差均为 1° , 不考虑数据丢失。基于Monte-Carlo仿真比较ML, WPLS和WIV估计方法的定位偏差和均方根误差^[17](Root

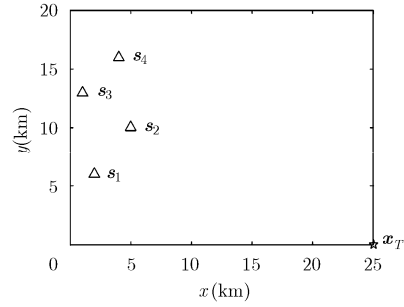


图4 扫描辐射源定位场景

MSE, RMSE), 仿真次数为10000次。

首先在单扫描周期条件下, 比较各算法对不同扫描周期辐射源和不同TOI测量误差的定位性能。图5给出了TOI测量误差为5 ms时, 对不同扫描周期辐射源的定位RMSE和偏差。图6给出了辐射源扫描周期为2 s时, 不同TOI测量误差下的定位RMSE和偏差。

辐射源扫描周期的增大和TOI测量误差的减小都会使等效测角噪声功率比 ρ 减小。从图5(a)和图6(a)中可以看出随着 ρ 的减小, 各算法的定位性能逐渐提高, RMSE均可以渐近达到CRLB。由图5(b)和图6(b)可以看出, 由于相关噪声的影响, 随着 ρ 的增大WPLS的定位偏差明显大于WIV和ML算法。WIV的偏差与ML算法近似相同, 但是在 ρ 较大时仍然存在偏差, 这是因为ML算法的渐近无偏特性和WIV对噪声相关性的消除均需要较多的观测次数, 在1个扫描周期内很难满足这一条件。

在10个扫描周期条件下, 比较各算法对不同扫描周期辐射源和不同TOI测量误差的定位性能。图7给出了TOI测量误差为5 ms时, 对不同扫描周期辐射源的定位RMSE和偏差。图8给出了辐射源扫描周期为2 s时, 不同TOI测量误差下的定位RMSE和偏差。

与单周期条件下的定位性能相比可以看出, 随着扫描次数的增加定位CRLB明显降低。图7(a)和图8(a)表明WIV和ML的RMSE均可以达到CRLB, 而

表1 算法复杂度比较

算法	ML	WPLS	WIV
初始化	m^2s	式(24) $nm^2+nm+m^3+m^2$	式(24) $nm^2+nm+m^3+m^2$
乘法运算次数	式(17) $(2nm^2+m^3+mn^2+mn)l$	式(27) l_1	式(27) l_1
		式(28) $nm^2+2n^2m+n^3+m^2$	式(28) $nm^2+2n^2m+n^3+m^2$
			式(31)(32) l_2
			式(30) $nm^2+2n^2m+n^3+m^2$
复杂度	$(2nm^2+m^3+mn^2+mn) m^2ls$	$2(nm^2+m^2+n^2m)+nm+m^3+n^3+l_1$	$3(nm^2+m^2)+4n^2m+nm+m^3+2n^3+l_1+l_2$

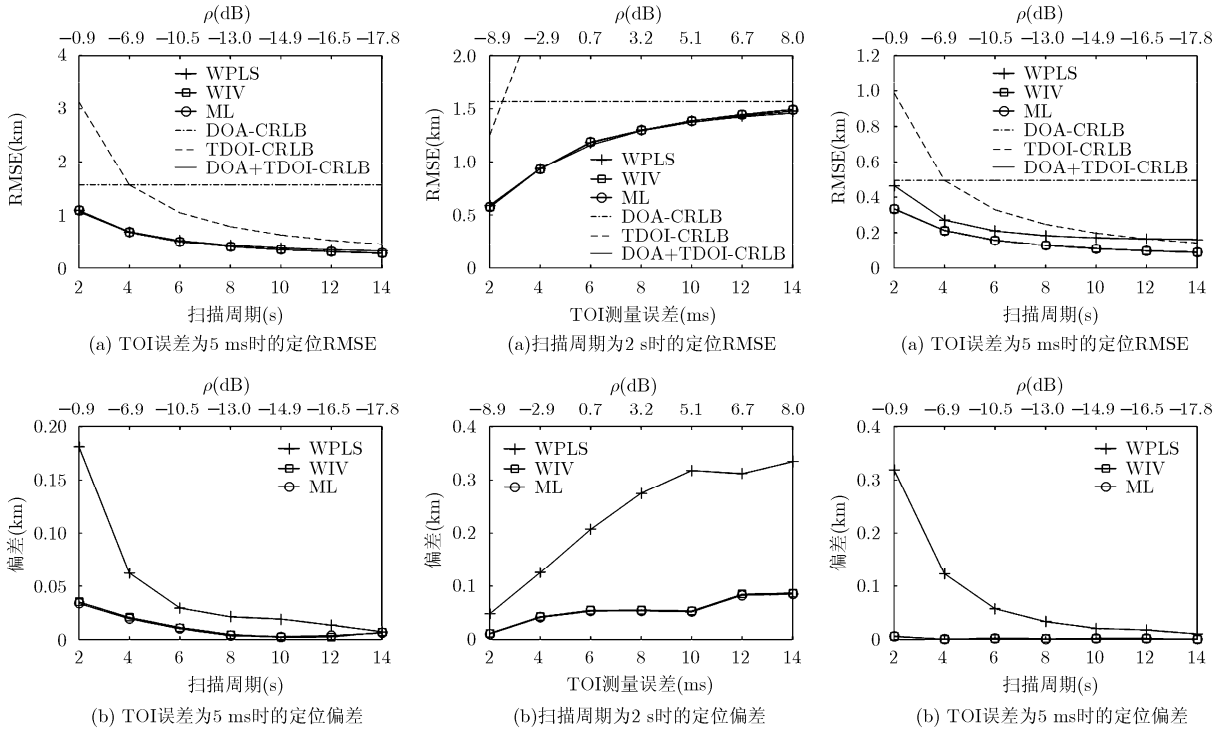


图5 单扫描周期条件下, 对不同扫描周期辐射源的定位性能

图6 单扫描周期条件下, 对不同TOI测量误差的定位性能

图7 10个扫描周期条件下, 对不同扫描周期辐射源的定位性能

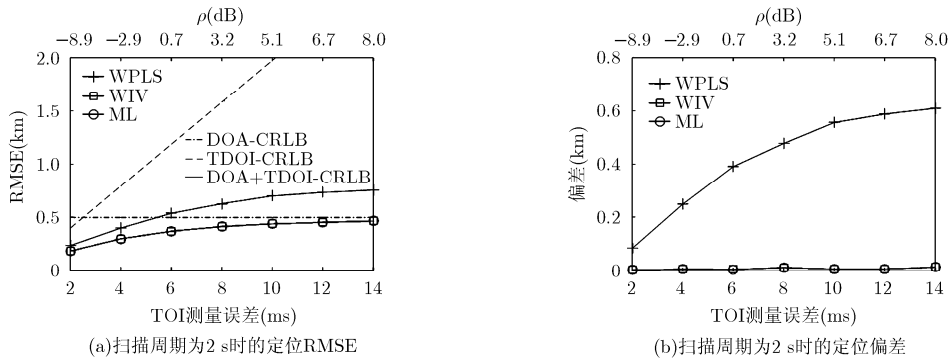


图8 10个扫描周期条件下, 对不同TOI测量误差的定位性能

WPLS的RMSE不能达到CRLB, 甚至在 $\rho < -16.5$ dB时高于仅TDOI的CRLB, 在 $\rho > 0.7$ dB时高于仅DOA的CRLB。这一原因可以从图7(b)和图8(b)中看出, 在10个扫描周期条件下, WIV和ML为无偏估计, 而WPLS由于相关噪声的影响, 虽然定位精度会随着观测次数的增多而提高, 但定位偏差会形成累积效应从而无法达到CRLB。

6 结束语

本文提出了一种基于DOA和TOI的已知扫描周期辐射源的联合定位算法和性能。通过对联合体制定位误差的CRLB的推导分析, 给出了联合定位性能与等效测角噪声功率比的理论关系, 建立了一种无需扩展变量的联合定位伪线性方程, 并提出了一

种WPLS解析定位算法; 为消除WPLS中由于相关噪声引起的定位偏差, 通过构造适当IV矩阵和权值矩阵, 提出了一种计算复杂度为WPLS两倍的WIV定位算法。仿真结果表明, WIV定位算法在较小噪声和多周期观测条件下可有效消除相关噪声的影响, 渐近得到无偏估计结果, 定位性能可以达到联合定位体制的CRLB。

参考文献

[1] 孙仲康, 郭福成, 冯道旺, 等. 单站无源定位跟踪技术[M]. 北京: 国防工业出版社, 2008: 3-10.
SUN Zhongkang, GUO Fucheng, FENG Daowang, et al. Single Observer Passive Location and Tracking Technology [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2008: 3-10.

- [2] WANG Y and HO K C. An asymptotically efficient estimator in closed-form for 3-D AOA localization using a sensor network[J]. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2015, 14(12): 6524–6535. doi: 10.1109/TWC.2015.2456057.
- [3] NGUYEN N H and DOGANCA Y K. Optimal geometry analysis for multistatic TOA localization[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(16): 4180–4193. doi: 10.1109/TSP.2016.2566611.
- [4] KALANTARI A, MALEKI S, CHATZINOTAS S, *et al.* Frequency of arrival-based interference localization using a single satellite[C]. 2016 8th Advanced Satellite Multimedia Systems Conference and the 14th Signal Processing for Space Communications Workshop (ASMS/SPSC), Palma de Mallorca, 2016: 1–6.
- [5] LIU Y, GUO F, YANG L, *et al.* An improved algebraic solution for TDOA localization with sensor position errors[J]. *IEEE Communications Letters*, 2015, 19(12): 2218–2221. doi: 10.1109/LCOMM.2015.2486769.
- [6] 李金洲, 郭福成. 传感器误差条件下仅用到达频率差的无源定位性能分析[J]. *航空学报*, 2011, 32(8): 1497–1505.
LI Jinzhou and GUO Fucheng. Performance analysis for passive source localization using merely FDOA measurements with erroneous receiver positions[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2011, 32(8): 1497–1505.
- [7] LIU D, LIU K, MA Y, *et al.* Joint TOA and DOA localization in indoor environment using virtual stations[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(8): 1423–1426. doi: 10.1109/LCOMM.2014.2333006.
- [8] CHAN Y T and RUDNICKI S W. Bearings-only and Doppler-bearing tracking using instrumental variables[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 1992, 28(4): 1076–1083. doi: 10.1109/7.165369.
- [9] YIN J, WAN Q, YANG S, *et al.* A simple and accurate TDOA-AOA localization method using two stations[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2016, 23(1): 144–148. doi: 10.1109/LSP.2015.2505138.
- [10] HMAM H. Optimal sensor velocity configuration for TDOA-FDOA geolocation[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2017, 65(3): 628–637. doi: 10.1109/TSP.2016.2621724.
- [11] HMAM H. Scan-based emitter passive localization[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2007, 43(1): 36–54. doi: 10.1109/TAES.2007.357153.
- [12] AIDALA V J and NARDONE S C. Biased estimation properties of the pseudo-linear tracking filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 1982, 18(4): 432–441. doi: 10.1109/TAES.1982.309250.
- [13] NARDONE S C, LINDGREN A G, and GONG K F. Fundamental properties and performance of conventional bearings-only target motion analysis[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29(9): 775–787. doi: 10.1109/TAC.1984.1103664.
- [14] DOGANCA Y K. Passive emitter localization using weighted instrumental variables[J]. *Signal Processing*, 2004, 84(3): 487–497. doi: 10.1016/j.sigpro.2003.11.014.
- [15] HMAM H and DOGANCA Y K. Passive localization of scanning emitters[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2010, 46(2): 944–951. doi: 10.1109/TAES.2010.5461671.
- [16] DOGANCA Y K. A closed-form pseudolinear estimator for geolocation of scanning emitters[C]. 2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Dallas, 2010: 3546–3549.
- [17] KAY S M. 统计信号处理基础—卷 I 估计理论[M]. 罗鹏飞, 张文明, 刘忠, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2014: 3–10, 23–41, 129–155.
- [18] ZHANG Y F, ZHANG M, and GUO F C. Scanning emitter TMA by two fixed observers using time of interception[C]. IEEE 2016 Sensor Signal Processing for Defence (SSPD), Edinburgh, UK, 2016: 144–148.
- [19] BECKER K. Simple linear theory approach to TMA observability[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 1993, 29(2): 575–578. doi: 10.1109/7.210096.
- [20] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 第2版, 北京: 清华大学出版社, 2013: 54–61.
ZHANG Xianda. Matrix Analysis and Applications[M]. Second Edition, Beijing: Tsinghua University Press, 2013: 54–61.
- [21] NGUYEN N H and DOGANCA Y K. Single-platform passive emitter localization with bearing and Doppler-shift measurements using pseudolinear estimation techniques[J]. *Signal Processing*, 2016, 125: 336–348. doi: 10.1016/j.sigpro.2016.01.023.
- [22] DOGANCA Y K. Self-localization from landmark bearings using pseudolinear estimation techniques[J]. *IEEE Transactions on Aerospace & Electronic Systems*, 2014, 50(3): 2361–2368. doi: 10.1109/TAES.2014.130461.
- [23] WONG K Y and POLAK E. Identification of linear discrete time systems using the instrumental variable method[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(6): 707–718. doi: 10.1109/TAC.1967.1098734.
- 张翼飞: 男, 1985年生, 博士生, 研究方向为无源定位、跟踪滤波技术。
- 张敏: 男, 1984年生, 博士, 讲师, 研究方向为无源定位、跟踪滤波技术等。
- 郭福成: 男, 1975年生, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为无源定位、跟踪滤波、信号处理、综合电子信息技术等。