一类相互正交的最佳二元零相关区序列集构造法

刘 涛 许成谦* 李玉博
(燕山大学信息科学与工程学院 秦皇岛 066004)

摘 要：该文给出一类相互正交的二元零相关区序列集构造法。基于二元正交矩阵，首先构造得到了一类相互正交的非周期互补序列集，进而构造了相互正交的二元零相关区序列集，每个序列集参数都是最佳的。同已有方法相比，该文方法能生成更多的相互正交的二元零相关区序列集，解决了集合数目大于 2 且相互正交的最佳二元零相关区序列集构造问题，可以为准同步码分多址系统提供更多的序列。

关键词：准同步 CDMA；零相关区序列；相互正交； 正交矩阵
中图分类号： TN911.2 **文献标识码**： A **文章编号**：1009-5896(2017)10-2442-07
DOI: 10.11999/JEIT161365

Construction of Optimal Mutually Orthogonal Sets of Binary Zero Correlation Zone Sequences

LIU Tao XU Chengqian LI Yubo
(*School of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: A class of mutually orthogonal binary Zero Correlation Zone (ZCZ) sequence sets are constructed. Based on binary orthogonal matrices, numbers of mutually orthogonal aperiodic complementary sequence sets are constructed at first, then mutually orthogonal ZCZ sequence sets are obtained from these aperiodic complementary sequence sets. Each ZCZ sequence set is an optimal binary ZCZ sequence set. Compared with existing methods, the presented construction produces more mutually orthogonal ZCZ sequence sets. As a result, the problem of constructing more than two optimal mutually orthogonal sets of binary ZCZ sequences is sloved by the presented approach and more sequences are produced for Quasi-Synchronous Code Division Multiple Access (QS-CDMA) systems.

Key words: Quasi-Synchronous Code Division Multiple Access (QS-CDMA); Zero Correlation Zone (ZCZ) sequence; Mutually orthogonal; Orthogonal matrix

1 引言

零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ)序列是近些年来最新提出的一类适用于准同步码分多址(CDMA)通信系统[1]的扩频地址码。在准同步CDMA 系统中，只要通信用户信号的时间延迟不超过一定范围(零相关区长度)，系统中的多址干扰和多径干扰便可通过ZCZ序列理想的自相关性能及互相关性能加以消除。一般说来，ZCZ 序列集合由 3 个参数刻画，即(N,M,Z)-ZCZ。其中N表示序列长度，M表示序列集中的序列数目，Z表示零相关区长度。根据 Tang-Fan-Matsufuji 界[2]可知，每一个ZCZ 序列集合参数满足不等式$ZM/N \le 1$，特别地，对于二元序列集，有$(Z-1)M/N \le 1$。当等号成立时，称 ZCZ 序列集为最佳的。目前为止，ZCZ 序列设计已经取得较为丰富的研究成果。大量参数达到最佳的二元 ZCZ 序列集[3]、三元 ZCZ 序列集[4,5]、多相 ZCZ 序列集[6,7]以及高斯整数 ZCZ 序列集[8−10]已经被构造出来。然而，这些成果都是针对单个 ZCZ 序列集构造方法的研究。

在实际应用中，每个小区分配一个ZCZ序列集。单个ZCZ序列集只能解决小区内用户间的多址干扰以及用户信号与自身延时信号所造成的多径干扰，来自相邻小区用户信号造成干扰依然存在。因此在多小区环境下，每个小区应分配一个 ZCZ 序列集，不同 ZCZ 序列集合之间应具有良好的互相关性能。具有良好集间互相关的多个ZCZ序列集的构造方法研究成为未来 ZCZ 序列设计的研究重点，主要分为

收稿日期：2016-12-14；改回日期：2017-03-23；网络出版：2017-05-26
*通信作者：许成谦 cqxu@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61501395, 61671402)，河北省自然科学基金(F2014203059, F2015203150, F2015203204)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501395, 61671402), The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2014203059, F2015203150, F2015203204)

以下几类：(1)相互正交的 ZCZ 序列集[11]；(2)具有集间零相关区的多子集 ZCZ 序列集[12–14]；(3)具有集间低相关性能的多个 ZCZ 序列集[15]。针对多子集 ZCZ 序列集的研究成果还不是很多，文献[11]最早在 2004 年提出相互正交的 ZCZ 序列集的概念，利用迭代法构造了两个相互正交的 ZCZ 序列集。遗憾的是，序列集合的数目局限为 2，远远达不到应用的需求。2006 年，文献[16]利用完备序列做为初始序列，成功构造了数目大于 2 的相互正交的 ZCZ 序列集。然而序列集的参数依然达不到理论界限。近年来，文献[17]利用 DFT 矩阵构造了数目大于 2 的相互正交的多相 ZCZ 序列集，序列集参数也不能达到理论界限。文献[18]将文献[17]方法进行扩展，构造了第 1 例参数达到理论界限的相互正交多相 ZCZ 序列集，并且序列集合数目大于 2。一般来讲，在实际应用中，二元序列相比多相序列更加容易实现，因此二元序列应用更加广泛。然而上述几种方法主要是针对多相序列进行构造。例如，文献[16]基于完备序列。由于只存在一个长度为 4 的二元完备序列，因此文献[16]的方法只能产生 2 例相互正交的二元 ZCZ 序列集。文献[17,18]则不能用于二元序列的构造。目前来看，参数达到最佳的相互正交的二元零相关区序列集的构造问题还没有得到解决。针对这个问题，该文基于二元正交矩阵，通过构造一类相互正交的非周期互补序列集，进而得到了相互正交的二元 ZCZ 序列集。每个 ZCZ 序列集参数达到最佳并且序列集数目大于 2。

2　基本概念

定义 1　两个长度为 N 的序列 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，分别表示为：$\boldsymbol{a}=(a(0),a(1),\cdots,a(N-1))$，$\boldsymbol{b}=(b(0),b(1),\cdots,b(N-1))$。序列的非周期相关函数 $C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)$ 用式(1)定义：

$$C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{t=0}^{N-1-\tau}a(t)b(t+\tau), & 0\le\tau\le N-1\\ \displaystyle\sum_{t=0}^{N-1+\tau}a(t-\tau)b(t), & 1-N\le\tau<0\\ 0, & |\tau|\ge N\end{cases}\tag{1}$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，上述定义为非周期自相关函数，当 $\boldsymbol{a}\ne\boldsymbol{b}$ 时为非周期互相关函数。序列的周期互相关函数 $R_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)$ 定义如式(2)：

$$R_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)=C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau)+C_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}(\tau-N)\tag{2}$$

定义 2　设 $\boldsymbol{U}$ 是包含有 M 个长度 N 序列的序列集，如果对于任意 $\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\in\boldsymbol{U}$，满足式(3)：

$$\left|R_{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j}(\tau)\right|=\begin{cases}0, & i\ne j,\ 0\le\tau\le Z-1\\ 0, & i=j,\ 0<\tau\le Z-1\end{cases}\tag{3}$$

则序列集 $\boldsymbol{U}$ 被称为零相关区(Zero Correlation Zone, ZCZ)序列集，序列集参数可以用 (N,M,Z)-ZCZ 来表示，其中 N 表示序列的长度，M 表示序列集合中的序列数目，Z 为零相关区的长度。

定义 3　根据 Tang-Fan-Matsufuji 界[2]，对于参数为 (N,M,Z)-ZCZ 的二元 ZCZ 序列集有式(4)成立：

$$\frac{M(Z-1)}{N}\le\frac{1}{2}\tag{4}$$

当等号成立时，该零相关区序列集称为二元最佳 ZCZ 序列集。

定义 4　令 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{M-1}\}$ 表示一个序列集，该序列集含有 M 个互补序列。其中每个互补序列可以用 $\boldsymbol{A}_m=\left\{\boldsymbol{A}_{m,0},\boldsymbol{A}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{A}_{m,N-1}\right\}$ 表示，每个互补序列包含 N 个长度为 L 的子序列，表示为 $\boldsymbol{A}_{m,n}=(a_{m,n}(0),a_{m,n}(1),\cdots,a_{m,n}(L-1))$。如果序列相关函数满足：

$$\begin{aligned}C_{\boldsymbol{A}_{m_1},\boldsymbol{A}_{m_2}}(\tau)&=\sum_{n=0}^{N-1}C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n}}(\tau)\\&=\begin{cases}NL, & m_1=m_2,\tau=0\\ 0, & 其它\end{cases}\end{aligned}\tag{5}$$

则称序列集 $\boldsymbol{A}$ 为非周期互补序列集，表示为 (M,N,L)-ACS，其中 M 表示为互补序列数目，N 表示每个互补序列包含的子序列数目，L 为子序列长度。

3　基于互补序列集构造零相关区序列集

文献[3,12]给出了一类基于互补序列集构造零相关区序列集的方法，基于这种思想，本文通过构造相互正交的互补序列集合，进而得到了相互正交的零相关区序列集。为了方便读者，下面给出基于互补序列集的零相关区序列集构造法及证明。

引理 1[12]　设一个序列集参数为 (M,N,L)-ACS 的互补序列集 $\boldsymbol{A}$，该互补集合包含有 M 个序列的非周期互补序列 $\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{A}_0,\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_{M-1}\}$，每个互补序列包含 N 个子序列，$\boldsymbol{A}_m=\left\{\boldsymbol{A}_{m,0},\boldsymbol{A}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{A}_{m,N-1}\right\}$，子序列 $\boldsymbol{A}_{m,n}=\left(a_{m,n}(0),a_{m,n}(1),\cdots,a_{m,n}(L-1)\right)$ 长度为 L。构造序列集合 $\boldsymbol{S}=\left\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\cdots,\boldsymbol{S}^{M-1}\right\}$，其中每个序列 $\boldsymbol{S}^m$ 长度为 $2NL$，由子序列的顺序联接为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}^m=\big(&\boldsymbol{A}_{m,0},\boldsymbol{A}_{m,1},\cdots,\boldsymbol{A}_{m,N-2},\boldsymbol{A}_{m,N-1},-\boldsymbol{A}_{m,0},\\&\boldsymbol{A}_{m,1},\cdots,-\boldsymbol{A}_{m,N-2},\boldsymbol{A}_{m,N-1}\big)\end{aligned}\tag{6}$$

式中，$-\boldsymbol{A}_{m,0}$ 表示序列元素逐位取反，如：$-\boldsymbol{A}_{m,0}=\left(-a_{m,0}(0),-a_{m,0}(1),\cdots,-a_{m,0}(L-1)\right)$。则序列集 $\boldsymbol{S}$ 是一

个零相关区序列集合，参数为$(2NL, M, L+1)$-ZCZ。

证明 设$\boldsymbol{S}^{m_1}, \boldsymbol{S}^{m_2} \in \boldsymbol{S}$，计算互相关函数如下：

当$0 \le \tau \le L-1$时，有

$$\begin{aligned} R_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n}}(\tau) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n+1}}(\tau - L) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n}}(\tau) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n+1}}(\tau - L) \\ &= 2\sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n}}(\tau) \end{aligned} \tag{7}$$

当$m_1 = m_2$, $0 < \tau \le L-1$或者$m_1 \ne m_2$，$0 \le \tau \le L-1$时，都有$R_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = 0$。当$m_1 = m_2$，$\tau = 0$时，$R_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(\tau) = 2NL$。

当$\tau = L$时，有

$$\begin{aligned} R_{\boldsymbol{S}^{m_1},\boldsymbol{S}^{m_2}}(L) &= \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n+1}}(0) \\ &\quad - \sum_{n=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{m_1,n},\boldsymbol{A}_{m_2,n+1}}(0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

综合上述可知，引理成立。 证毕

4 相互正交的零相关区序列集的构造

步骤 1 设$\boldsymbol{U} = \left[u_j^i\right]_{N\times N}$和$\boldsymbol{H} = \left[h_j^i\right]_{N\times N}$表示两个$N$行$N$列的二元正交矩阵，满足$N = p-1$, p为素数。$\boldsymbol{u}^i$, $\boldsymbol{h}^i$分别表示矩阵$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$的第i行，$\boldsymbol{u}_j$, $\boldsymbol{h}_j$分别表示矩阵$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$的第j列。u_j^i，h_j^i分别表示矩阵$\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$的第i行第j列元素。

步骤 2 构造M个互补序列集$\boldsymbol{A} = \left\{\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{A}^1, \cdots, \boldsymbol{A}^{M-1}\right\}$，其中每个序列集包含$N$个互补序列，如$\boldsymbol{A}^m = \left\{\boldsymbol{A}_0^m, \boldsymbol{A}_1^m, \cdots, \boldsymbol{A}_{N-1}^m\right\}$，每个互补序列包含$N$个长度为$L$的子序列，如$\boldsymbol{A}_n^m = \left\{\boldsymbol{A}_{n,0}^m, \boldsymbol{A}_{n,1}^m, \cdots, \boldsymbol{A}_{n,N-1}^m\right\}$，$\boldsymbol{A}_{n,q}^m = \left(a_{n,q}^m(0), a_{n,q}^m(1), \cdots, a_{n,q}^m(L-1)\right)$。具体构造如式(9)：

$$a_{n,q}^m(t) = u_q^{\varsigma} \cdot h_t^n \tag{9}$$

式中，$\varsigma = \left(\dfrac{m+1}{t+1} \bmod p\right) - 1$，其中$0 \le m \le M-1$，$0 \le n, q \le N-1$, $0 \le t \le L-1$, $M = L = N$。

更加具体地，式(9)得到的序列具体构造过程可以用向量乘积的形式描述为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_{n,q}^m &= \left(u_q^{\varsigma_0} \cdot h_0^n, u_q^{\varsigma_1} \cdot h_1^n, u_q^{\varsigma_2} \cdot h_2^n, \cdots, u_q^{\varsigma_{L-1}} \cdot h_{L-1}^n\right) \\ &= \boldsymbol{u}_q' \cdot \boldsymbol{h}^n \end{aligned}$$

式中，$\boldsymbol{h}^n = \left(h_0^n, h_1^n, h_2^n, \cdots, h_{L-1}^n\right)$表示矩阵$\boldsymbol{H}$的第$n$行，$\boldsymbol{u}_q' = \left(u_q^{\varsigma_0}, u_q^{\varsigma_1}, u_q^{\varsigma_2}, \cdots, u_q^{\varsigma_{L-1}}\right)$表示分别由矩阵$\boldsymbol{U}$的第$\varsigma_0$行第$q$列，第$\varsigma_1$行第$q$列，…，第$\varsigma_{L-1}$行第$q$列元素组成的 1 维向量。$\varsigma_0 = ((m+1) \bmod p) - 1$，$\varsigma_1 = \left(\dfrac{(m+1)}{2} \bmod p\right) - 1, \cdots, \varsigma_{L-1} = \left(\dfrac{(m+1)}{L} \bmod p\right) - 1$。

定理 1 对于互补序列集合$\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{A}^1, \cdots, \boldsymbol{A}^{M-1}\}$，设$\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1} \in \boldsymbol{A}^{m_1}$, $\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2} \in \boldsymbol{A}^{m_2}$，有式(10)成立：

$$C_{\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2}}(\tau) = \begin{cases} N^2, & m_1 = m_2, n_1 = n_2, \tau = 0 \\ 0, & m_1 = m_2, n_1 = n_2, 0 < \tau \le N-1 \\ 0, & m_1 = m_2, n_1 \ne n_2, 0 \le \tau \le N-1 \\ 0, & m_1 \ne m_2, \tau = 0 \end{cases} \tag{10}$$

证明 设$\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1} \in \boldsymbol{A}^{m_1}$, $\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2} \in \boldsymbol{A}^{m_2}$，计算互相关函数如下：

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2}}(\tau) &= \sum_{q=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{n_1,q}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2,q}^{m_2}}(\tau) \\ &= \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1-\tau} a_{n_1,q}^{m_1}(t) \cdot a_{n_2,q}^{m_2}(t+\tau) \\ &= \sum_{q=0}^{N-1}\sum_{t=0}^{N-1-\tau} u_q^{\varsigma_1} \cdot u_q^{\varsigma_2 \bmod N} \cdot h_t^{n_1} \cdot h_{(t+\tau)\bmod N}^{n_2} \\ &= \sum_{t=0}^{N-1-\tau} h_t^{n_1} \cdot h_{(t+\tau)\bmod N}^{n_2} \cdot \sum_{q=0}^{N-1} u_q^{\varsigma_1} \cdot u_q^{\varsigma_2 \bmod N} \\ &= \sum_{t=0}^{N-1-\tau} h_t^{n_1} \cdot h_{(t+\tau)\bmod N}^{n_2} \cdot R_{\boldsymbol{u}^{\varsigma_1},\boldsymbol{u}^{\varsigma_2}}(0) \end{aligned} \tag{11}$$

式中，$\varsigma_1 = \left(\dfrac{m_1+1}{t+1} \bmod p\right) - 1$，$\varsigma_2 = \left(\dfrac{m_2+1}{t+\tau+1} \bmod p\right) - 1$。分以下几种情况讨论：

(1) $m_1 = m_2$, $0 < \tau \le N-1$时，有$\dfrac{m_1+1}{t+1} \bmod p \ne \dfrac{m_1+1}{t+\tau+1} \bmod p$，进一步得$\varsigma_1 \ne \varsigma_2 \bmod N$。根据正交矩阵$\boldsymbol{U}$不同两行相互正交的性质可得$R_{\boldsymbol{u}^{\varsigma_1},\boldsymbol{u}^{\varsigma_2}}(0) = 0$，因此有$C_{\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2}}(\tau) = 0$。

(2) $m_1 = m_2$, $n_1 \ne n_2$, $\tau = 0$时，有$\varsigma_1 = \varsigma_2$，此时$R_{u^{\varsigma_1},u^{\varsigma_2}}(0) = N$，可得

$$C_{\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2}}(\tau) = N \cdot \sum_{t=0}^{N-1} h_t^{n_1} \cdot h_t^{n_2} = N \cdot R_{\boldsymbol{h}^{n_1},\boldsymbol{h}^{n_2}}(0) = 0 \tag{12}$$

(3) $m_1 \ne m_2$, $\tau = 0$时，有$\varsigma_1 \ne \varsigma_2 \bmod N$，故$R_{\boldsymbol{u}^{\varsigma_1},\boldsymbol{u}^{\varsigma_2}}(0) = 0$，因此有$C_{\boldsymbol{A}_{n_1}^{m_1},\boldsymbol{A}_{n_2}^{m_2}}(\tau) = 0$。

综合 3 种情况，可得定理成立。 证毕

定理 1 得到了N个互补序列集(N, N, N)-ACS，不同集合间的互补序列是正交的，即同相非周期相

关函数值为零。下面利用互补序列集来构造零相关区序列集。

定理 2 设$\left\{\boldsymbol{A}^m \mid 0 \le m \le N-1\right\}$是由定理 1 得到的 N 个互补序列集(N,N,N)-ACS。基于每个互补序列集$\boldsymbol{A}^m$按式(6)构造一个序列集$\boldsymbol{S}^m$，可知每个序列集$\boldsymbol{S}^m$包含有 N 个长度为 $2N^2$ 的序列，$\boldsymbol{S}^m = \left\{\boldsymbol{S}_0^m, \boldsymbol{S}_1^m, \cdots, \boldsymbol{S}_{N-1}^m\right\}, \boldsymbol{S}_n^m = \left(s_n^m(0), s_n^m(1), \cdots, s_n^m(2N^2-1)\right)$，$0 \le m,n \le N-1$。则每个序列集$\boldsymbol{S}^m$是一个参数为$\left(2N^2, N, N+1\right)$-ZCZ 序列集，且集合$\boldsymbol{S}^0, \boldsymbol{S}^1, \cdots, \boldsymbol{S}^{N-1}$是相互正交的。

证明 根据引理 1，由于序列集$\boldsymbol{A}^m$是一个互补序列集(N,N,N)-ACS，因此按式(6)构造的序列集$\boldsymbol{S}^m$是一个零相关区序列集$\left(2N^2, N, N+1\right)$-ZCZ。下面证明不同集合是正交的。

设$\boldsymbol{S}_{n_1}^{m_1} \in \boldsymbol{S}^{m_1}$, $\boldsymbol{S}_{n_2}^{m_2} \in \boldsymbol{S}^{m_2}$, $0 \le m_1 \ne m_2 \le N-1$。计算同相互相关函数如式(13)：

$$R_{\boldsymbol{S}_{n_1}^{m_1}, \boldsymbol{S}_{n_2}^{m_2}}(0) = 2\sum_{q=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{n_1,q}^{m_1}, \boldsymbol{A}_{n_2,q}^{m_2}}(0) \tag{13}$$

根据定理 1 可知，当$m_1 \ne m_2$时，$\sum_{q=0}^{N-1} C_{\boldsymbol{A}_{n_1,q}^{m_1}, \boldsymbol{A}_{n_2,q}^{m_2}}(0) = 0$，因此有$R_{\boldsymbol{S}_{n_1}^{m_1}, \boldsymbol{S}_{n_2}^{m_2}}(0) = 0$成立。 证毕

5 序列集性能分析及对比

定理 3 序列集$\boldsymbol{S}^m$参数达到理论界限，是最佳二元 ZCZ 序列集。

证明 由定理 2 可知，序列集$\boldsymbol{S}^m$参数为$(2N^2, N, N+1)$-ZCZ。可得

$$N(N+1-1)\big/\left(2N^2\right) = \frac{1}{2} \tag{14}$$

根据定义 3，序列集$\boldsymbol{S}^m$参数达到了理论界限，是最佳二元 ZCZ 序列集。 证毕

表 1 对目前已有的几类相互正交的零相关区序列集构造法进行对比。

文献[11,19]方法构造了相互正交的二元零相关区序列集，其参数达到了最佳。然而序列集数目局限为两个，远远不能达到应用的需求。文献[16]利用完备序列做初始序列，首次得到了数目大于 2 的相互正交的 ZCZ 序列集，遗憾的是序列集参数不能达到理论界限。由于完备序列存在数目非常有限，尤其对于二元序列，只存在长度为 4 的二元完备序列。因此文献[16]的方法只能构造出两类相互正交的二元 ZCZ 序列集，即 k 个相互正交的$(4n, 2n, 3)$-ZCZ，其中$n = \{2,4\}$, $k < n$。文献[17,18]利用 DFT 矩阵构造了相互正交的多相 ZCZ 序列集，序列集合数目大于 2，且序列集参数达到了多相 ZCZ 序列集的理论界限。因此相互正交的最佳多相零相关区序列集构造问题已经解决[18]。然而文献[17,18]方法不能用于构造二元序列。本文提出的构造方法可以得到数目大于 2 且序列集参数达到理论界限的相互正交的二元 ZCZ 序列集，因此相互正交的二元最佳 ZCZ 序列集构造问题得以解决。

例 1 设$N = 4$，取两个4×4阶二元正交矩阵如下，利用“$+$”表示“1”，“$-$”表示“-1”。

$$\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ - & + & + & - \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{bmatrix}$$

基于正交矩阵构造得互补序列集合$\left\{\boldsymbol{A}^0, \boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^3\right\}$。以互补序列集合$\boldsymbol{A}^0$为例具体描述构造步骤如下。

当$m = 0$时，首先计算得$\varsigma_0 = 0, \varsigma_1 = 2, \varsigma_2 = 1$, $\varsigma_3 = 3$。构造互补序列集合$\boldsymbol{A}^0 = \left\{\boldsymbol{A}_0^0, \boldsymbol{A}_1^0, \boldsymbol{A}_2^0, \boldsymbol{A}_3^0\right\}$，其中$\boldsymbol{A}_0^0 = \left\{\boldsymbol{A}_{0,0}^0, \boldsymbol{A}_{0,1}^0, \boldsymbol{A}_{0,2}^0, \boldsymbol{A}_{0,3}^0\right\}, \boldsymbol{A}_1^0 = \left\{\boldsymbol{A}_{1,0}^0, \boldsymbol{A}_{1,1}^0, \boldsymbol{A}_{1,2}^0, \boldsymbol{A}_{1,3}^0\right\}, \boldsymbol{A}_2^0 = \left\{\boldsymbol{A}_{2,0}^0, \boldsymbol{A}_{2,1}^0, \boldsymbol{A}_{2,2}^0, \boldsymbol{A}_{2,3}^0\right\}, \boldsymbol{A}_3^0 = \left\{\boldsymbol{A}_{3,0}^0, \boldsymbol{A}_{3,1}^0, \boldsymbol{A}_{3,2}^0, \boldsymbol{A}_{3,3}^0\right\}$。具体地

$$\boldsymbol{A}_{0,0}^0 = \left(u_0^0 \cdot h_0^0, u_0^2 \cdot h_1^0, u_0^1 \cdot h_2^0, u_0^3 \cdot h_3^0\right) = (-++-)$$
$$\boldsymbol{A}_{0,1}^0 = \left(u_1^0 \cdot h_0^0, u_1^2 \cdot h_1^0, u_1^1 \cdot h_2^0, u_1^3 \cdot h_3^0\right) = (--++)$$
$$\boldsymbol{A}_{0,2}^0 = \left(u_2^0 \cdot h_0^0, u_2^2 \cdot h_1^0, u_2^1 \cdot h_2^0, u_2^3 \cdot h_3^0\right) = (-+-+)$$
$$\boldsymbol{A}_{0,3}^0 = \left(u_3^0 \cdot h_0^0, u_3^2 \cdot h_1^0, u_3^1 \cdot h_2^0, u_3^3 \cdot h_3^0\right) = (----)$$

表 1 几类相互正交的 ZCZ 序列集

方法	序列集数目	序列集参数	相数	是否最佳
文献[11]	2	$\left(4^n L_0 M_0, 2^m M_0, 2^{n-1} L_0 + 1\right)$-ZCZ	二元	是
文献[19]	2	$\left(2^{m+2} M, 2M, 2^m + 1\right)$-ZCZ	二元	是
文献[16]	n	$(mn, n, m-1)$-ZCZ	二元、多相	否
文献[17]	T	$\left(TN, \lfloor N/T \rfloor, T\right)$-ZCZ	多相	否
文献[18]	T	(TN, N, T)-ZCZ	多相	是
本文定理 2	N	$\left(2N^2, N, N+1\right)$-ZCZ	二元	是

因此互补序列 $\boldsymbol{A}_0^0=\{-++-;--++;-+-+;----\}$ 。同理可得 $\boldsymbol{A}_1^0=\{+-+-;++++;+--+;++--\};\boldsymbol{A}_2^0=\{++--;+--+;++++;+-+-\}$; $\boldsymbol{A}_3^0=\{++++;+-+-;++--;+--+\}$ 。利用互补序列集 $\boldsymbol{A}^0=\left\{\boldsymbol{A}_0^0,\boldsymbol{A}_1^0,\boldsymbol{A}_2^0,\boldsymbol{A}_3^0\right\}$ ，按照式(6)构造零相关区序列集合如下：

$$\boldsymbol{S}^0=\left\{\boldsymbol{S}_0^0,\boldsymbol{S}_1^0,\boldsymbol{S}_2^0,\boldsymbol{S}_3^0\right\}$$

$$\boldsymbol{S}_0^0=(-++---++-+-+----+--+++-+-----)$$

$$\boldsymbol{S}_1^0=(+-+-+++++--+++---+-+++++-++-++--)$$

$$\boldsymbol{S}_2^0=(++--+--++++++-+---+++--+----+-+-)$$

$$\boldsymbol{S}_3^0=(+++++-+-++--+--+----+-+---+++--+)$$

同理，由定理 2 可得其他 ZCZ 序列集合 $\left\{\boldsymbol{S}^1,\boldsymbol{S}^2,\boldsymbol{S}^3\right\}$ 如下：

$$\boldsymbol{S}^1=\left\{\boldsymbol{S}_0^1,\boldsymbol{S}_1^1,\boldsymbol{S}_2^1,\boldsymbol{S}_3^1\right\}$$

$$\boldsymbol{S}_0^1=(-+-+-++-++++++--+-+--++-----++--)$$

$$\boldsymbol{S}_1^1=(+--++-+---++------++-+-+-++------)$$

$$\boldsymbol{S}_2^1=(++++++---+-+-++-----++--+-+--++-)$$

$$\boldsymbol{S}_3^1=(++--++++-++--+-+--+++++++--+-+-+)$$

$$\boldsymbol{S}^2=\left\{\boldsymbol{S}_0^2,\boldsymbol{S}_1^2,\boldsymbol{S}_2^2,\boldsymbol{S}_3^2\right\}$$

$$\boldsymbol{S}_0^2=(--++++++-++-+-+-++--+++++--++-+-)$$

$$\boldsymbol{S}_1^2=(++++--+++-+--++-------++-+-+-++-)$$

$$\boldsymbol{S}_2^2=(+--+-+-+++-------++--+-+--++----)$$

$$\boldsymbol{S}_3^2=(+-+--++-++++--++-+-+-++-------++)$$

$$\boldsymbol{S}^3=\left\{\boldsymbol{S}_0^3,\boldsymbol{S}_1^3,\boldsymbol{S}_2^3,\boldsymbol{S}_3^3\right\}$$

$$\boldsymbol{S}_0^3=(++++-+-+--+++--+-----+-+++--+--+)$$

$$\boldsymbol{S}_1^3=(--+++--+++++-+-+++--+--+-----+-+)$$

$$\boldsymbol{S}_2^3=(-+-++++++--+--+++-+-++++-++---++)$$

$$\boldsymbol{S}_3^3=(-++-++--+-+------+--+++---+-+----)$$

可以验证每个序列集是一个二元零相关区序列集，参数为 (32, 4, 5) -ZCZ，达到理论界限，并且不同集合是相互正交的。部分相关函数分布如图 1–图 4 所示。

由图 1，图 2 可知，序列集合 $\boldsymbol{S}^0$ 中序列的自相关函数与互相关函数在一个零相关区内为零，序列集是一个零相关区序列集。图 3，图 4 表明，不同序列集合中的序列互相关函数值在位移 $\tau=0$ 处为零，是相互正交的。因此得到的 4 个 ZCZ 序列集 $\left\{\boldsymbol{S}^0,\boldsymbol{S}^1,\boldsymbol{S}^2,\boldsymbol{S}^3\right\}$ 是相互正交的序列集。

6 结束语

本文基于二元正交矩阵，首先构造了一类非周期互补序列集。每个集合都是完全互补序列集，不同序列集合间的序列的同相互相关为零。基于这类互补序列进一步构造了相互正交的零相关区序列集。序列集参数达到二元 ZCZ 序列集的理论界限，是一类相互正交的最佳二元 ZCZ 序列集，这是已有方法不能得到的。本文提出的方法在理论上解决了相互正交的最佳二元 ZCZ 序列集的构造问题，填补了序列存在表的空白。在应用上可以为多小区准同步 CDMA 系统提供更多的可用序列。

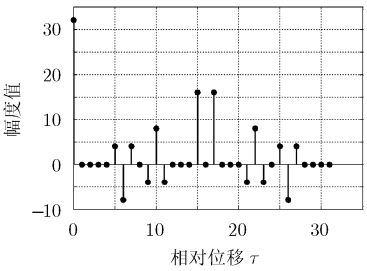

图 1 序列 $\boldsymbol{S}_0^0$ 的自相关函数分布

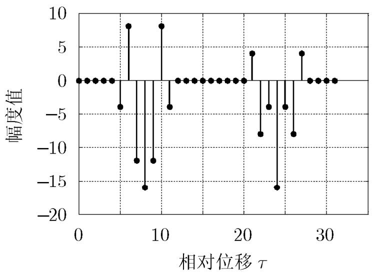

图 2 序列 $\boldsymbol{S}_0^0$ 与 $\boldsymbol{S}_1^0$ 互相关函数分布

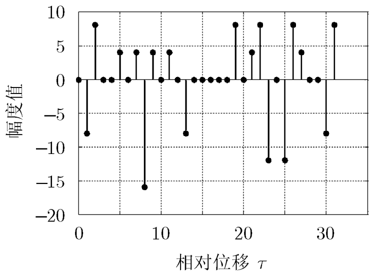

图 3 序列 $\boldsymbol{S}_0^0$ 与 $\boldsymbol{S}_0^1$ 互相关函数分布

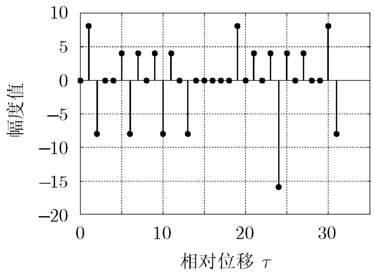

图 4 序列 $\boldsymbol{S}_0^2$ 与 $\boldsymbol{S}_0^3$ 互相关函数分布

参 考 文 献

[1] FAN Pingzhi and HAO Li. Generalized orthogonal sequences and their applications in synchronous CDMA systems[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2000, E83-A(11): 2054–2069.

[2] TANG Xiaohu, FAN Pingzhi, and MATSUFUJI Shinya. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 551–552. doi: 10.1049/el:20000462.

[3] DENG Xinmin and FAN Pingzhi. Spreading sequence sets with zero correlation zone[J]. *Electronic Letters*, 2000, 36(11): 993–994. doi: 10.1049/el:20000720.

[4] 王扬志, 许成谦. 一类三元非周期零相关区序列集的构造[J]. 电子与信息学报, 2008, 30(11): 2626–2629. doi: 10.3724/SP.J.1146.2007.00738.

WANG Yangzhi and XU Chengqian. Construction of ternary sequence sets with aperiodic zero correlation zone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(11): 2626–2629. doi: 10.3724/SP.J.1146.2007.00738.

[5] 李玉博, 许成谦, 李刚, 等. 一类三元多子集零相关区序列集构造法[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(12): 2876–2880. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00187.

LI Yubo, XU Chengqian, LI Gang, *et al.* A class of ternary ZCZ squence set with multiple subsets[J] *Journal of Electronics & Information Technology*, 2012, 34(12): 2876–2880. doi: 10.3724/SP.J.1146.2012.00187.

[6] LIU Yencheng, CHEN Chingwei, and SU Yut. New constructions of zero corrlelation zone sequences[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2013, 59(8): 4994–5007. doi: 10.1109/TIT.2013.2253831.

[7] ZHOU Zhengchun and TANG Xiaohu. A new class of sequences with zero or low correlation zone based on interleaving technique[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2008, 54(9): 4267–4273. doi: 10.1109/TIT.2008.928256.

[8] 刘凯, 姜昆. 交织法构造高斯整数零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

LIU Kai and JIANG Kun. Construction of Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

[9] LI Yubo and XU Chengqian. A new construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016, 20(12): 2418–2421. doi: 10.1109/LCOMM.2016.2609383.

[10] CHEN Xiaoyu, KONG Deming, XU Chengqian *et al.* Constructions of Gaussian integer sequences with zero corelation zone[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(6): 1260–1263.

[11] RATHINAKUMAR A and CHATURVEDI A K. Mutually orthogonal sets of ZCZ sequences[J]. *Electronics Letters*, 2004, 40(18): 1133–1134. doi: 10.1049/el:20045628.

[12] TANG Xiaohu, FAN Pingzhi, and LINDNER J. Multiple binary ZCZ sequence sets with good cross-correlation propety based on complementary sequence sets[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(8): 4038–4045. doi: 10.1109/TIT.2010.2050796.

[13] WANG Longye, ZENG Xiaoli, and WEN Hong. Families of asymmetric sequence pair set with zero correlation zone via interleaved technique[J]. *IET Communications*, 2016, 10(3): 229–234. doi: 10.1049/iet-com.2015.0075.

[14] 严李强, 曾晓莉, 王龙业, 等. 基于交织技术的非对称零相关区序列偶集构造[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(10): 2483–2489. doi: 10.11999/JEIT150030.

YAN Liqiang, ZENG Xiaoli, WANG Longye, *et al.* Design of asymmetric sequence pairs set with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(10): 2483–2489. doi: 10.11999/JEIT150030.

[15] TORII Hideyuki, NAKAMURA Makoto, and SUEHIRO Naoki. A new calss of polyphase sequence sets with optimal zero-correlation zones[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2005, E88-A(7): 1987–1994.

[16] 曾祥勇, 程池, 胡磊, 等. 一类相互正交的零相关区序列集的构造[J]. 电子与信息学报, 2006, 28(12): 2347–2350.

ZENG Xiangyong, CHENG Chi, HU Lei, *et al*. Construction of mutually orthogonal sets of zero correlation zone sequences [J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2006, 28(12): 2347–2350.

[17] ZENG Fanxin. New perfect polyphase sequences and mutually orthogonal ZCZ polyphase sequence sets[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2009, E92-A(7): 1731–1736.

[18] LI Yubo, XU Chengqian, and LIU Kai. Construction of mutually orthogonal zero correlation zone polyphase sequence sets[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2011, E94-A(4): 1159–1164.

[19] 刘凯, 俞赛, 李玉博, 等. 新的相互正交二元零相关区序列集构造法[J]. 北京邮电大学学报, 2012, 35(6): 30–33.
LIU Kai, YU Sai, LI Yubo, *et al*. New construction of mutually orthogonal binary sequence sets with zero correlation zone[J]. *Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications*, 2012, 35(6): 30–33.

刘　涛：　女，1987 年生，博士生，研究方向为序列设计.

许成谦：　男，1961 年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.

李玉博：　男，1985 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为序列设计、编码理论.