

Kempe 变换理论研究进展

许进* 刘小青

(北京大学信息科学技术学院 北京 100871)

(北京大学高可信软件技术教育部重点实验室 北京 100871)

摘要: 给定一个图 G 及它的一个正常顶点着色 f , G 中所有着两种颜色之一的顶点构成的顶点子集导出的子图称为 G 的一个 2-色导出子图, 该 2-色导出子图的分支称为 G 的一个 2-色分支。Kempe 变换是指将图 G 的某个 2-色分支实施颜色互换。自 1879 年 Kempe 引入 Kempe 变换用于证明四色猜想至今, 众多学者从不同的角度对 Kempe 变换展开了研究。该文总结了 Kempe 变换的一些基本性质; 对已有的一些重要成果进行了较为详细的综述; 针对 Meyniel 定理, 即每个平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类, 给出了一个新而简短的证明方法; 提出了一个与着色类型相关的问题, 意在探索不同 Kempe 等价类之间的关系, 以加深 Kempe 变换的研究。

关键词: Kempe 变换; Kempe 等价类; 树着色; 圈着色

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)06-1493-10

DOI: 10.11999/JEIT161299

Research Progress on the Theory of Kempe Changes

XU Jin LIU Xiaoqing

(School of Electronic Engineering and Computer Science, Peking University, Beijing 100871, China)

(Key Laboratory of High Confidence Software Technologies, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract: Given a graph G and a proper vertex coloring of G , a 2-coloring induced subgraph of G is a subgraph induced by all the vertices with one of two colors, a component of a 2-coloring induced subgraph is called a 2-coloring component. To make a Kempe change is to obtain one coloring from another by exchanging the colors of vertices in a 2-coloring component. Since Kempe introduced Kempe changes in his false proof of the Four Color Theorem in 1879, many scholars devote to the research on Kempe changes from different points of view. The main contributions in this paper are as follows: (1) Some basic properties of Kempe changes are summarized; (2) A series of important results with regard to Kempe changes are to be reviewed and analyzed in detail; (3) Another novel and more brief proof method of Meyniel Theorem, that all 5-colorings of a planar graph are Kempe equivalent, is given out; (4) A problem related with types of colorings is proposed here, which intends to explore the relationships between different Kempe equivalent classes, and thus contributes to the further study.

Key words: Kempe changes; Kempe equivalent class; Tree-colored; Cycle-colored

1 引言

本文所言之图皆指有限简单无向图。对于给定图 G , 分别用 $V(G)$, $E(G)$, $d_G(v)$, $N_G(v)$ 和 $\bar{N}_G(v)$ 来表示图 G 的顶点集, 边集, 顶点 v 的度数, 顶点 v

的邻域 (即与顶点 v 相邻的所有顶点构成的集合) 和顶点 v 的闭邻域 (即与顶点 v 相邻的所有顶点和 v 构成的集合), 可分别简记为 V , E , $d(v)$, $N(v)$, $\bar{N}(v)$ 。图 G 的阶是 $V(G)$ 中元素的个数 $|V(G)|$ 。若 $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 且 E' 中每条边的两个端点均在 V' 中, 则称图 $H = (V', E')$ 是图 G 的一个子图。在子图 H 中, 如果对于 $\forall u, v \in V(H)$, u, v 在 G 中相邻当且仅当它们在图 H 中相邻, 则称 H 为 G 的一个由 V' 导出的子图, 记为 $G[V']$ 。对于点不交的两个图 G , H , 若将图 G 中的每个顶点与图 H 中的每个顶点相连, 则得到的新图称为图 G 与图 H 的联图, 记为 $G \vee H$ 。用 K_n 表示 n -阶完全图。平凡图 K_1 与 n 阶圈 C_n 的联

收稿日期: 2016-12-28; 改回日期: 2017-01-19; 网络出版: 2017-02-03

*通信作者: 许进 jxu@pku.edu.cn

基金项目: 国家 973 计划项目(2013CB329600), 国家自然科学基金(61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)

Foundation Items: The National 973 Program of China (2013CB329600), The National Natural Science Foundation of China (61372191, 61472012, 61472433, 61572046, 61502012, 61572492, 61572153, 61402437)

图 $C_n \vee K_1$ 称作轮图 W_n (图 1 分别列出了轮图 W_3, W_4, W_5), 其中 C_n 称为 W_n 的轮圈; K_1 的顶点称为该轮的轮心。若 $V(K_1) = \{x\}$, 则有时也把 W_n 的圈 C_n 用 C^x 来表示。若图 G 的所有顶点的度数都为 k , 则称图 G 是 k -正则图。3-正则图也称为立方图。

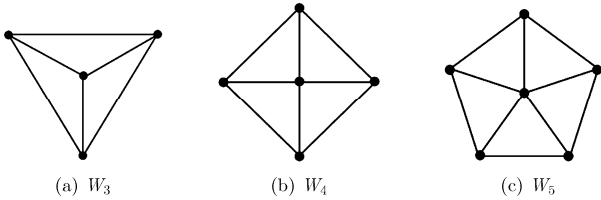


图 1 3 个最小的轮图

图 G 的一个正常 k -边着色, 简称为 k -边着色, 是指从图 G 的边集 E 到颜色集 $C(k) = \{1, 2, \dots, k\}$ 的一个映射 f , 满足对任意的相邻的两条边 e, e' , 有 $f(e) \neq f(e')$ 。图 G 的边色数, 记作 $\chi'(G)$, 是指满足图 G 有一个 k -边着色的最小数值 k 。若两种边着色可通过颜色互换达到对方, 则这两种边着色是相同的。 G 的所有 k -着色构成之集记作 $C_k(G)$ 。

设 G 是一个 k -可着色的图, f 是它的一个 k -着色, $\{1, 2, \dots, k\}$ 为颜色集。用 G_{it}^f 表示在 f 下, G 中所有着颜色 i 与颜色 t 的顶点构成的顶点子集导出的子图, 并称之为 2-色导出子图, 其中, $i, t = 1, 2, \dots, k, i \neq t$ 。在不致混淆的情况下, 用 G_{it} 来代替 G_{it}^f ; G_{it}^f 中的分支也称为 it -分支或 2-色分支。

设 G 是一个 k -边着色的图, f 是它的一个 k -边着色, $\{1, 2, \dots, k\}$ 为颜色集。用 G_{it}^f 表示在 f 下, G 中所有着颜色 i 与颜色 t 的边构成的子图, 并称之为 2-边色导出子图, 其中, $i, t = 1, 2, \dots, k, i \neq t$ 。在不致混淆的情况下, 用 G_{it}' 来代替 G_{it}^f ; G_{it}' 中的分支也称为 it -边分支或 2-边色分支。

Kempe^[1]变换, 简称为 K-变换, 是指将图 G 中某个 2-色分支实施颜色互换, 并保持其余顶点着色不变。设 $f, f' \in C_k(G)$, 若从 f 出发, 通过若干次 Kempe 变换可获得 f' , 则称 f 与 f' 是 Kempe 等价的, 简称为 K-等价的。图 G 的基于 f 的 Kempe^[2]等价类是指所有与 f 互为 Kempe 等价的着色构成之集, 记作 $F^f(G)$ 。文中用 $\kappa(G, k)$ 表示图 G 的所有 k -着色构成的 Kempe 等价类数目。

图 G 的线图, 记作 $L(G)$, 是顶点集合为 $E(G)$ 的图, 其中两个顶点相连的充要条件是它们在 G 中为相连的边。显然, $L(G)$ 的顶点着色等同于图 G 的边着色, 因此, 对 $L(G)$ 实施一次 K-变换相当于在 G 中对某个 2-色边分支实施颜色互换。

如果一个图能画在平面上使得它的所有边仅在端点相交, 则称这个图为可平面图。可平面图 G 的这样一种画法称为 G 的一个平面嵌入。显然, G 的任意平面嵌入与 G 同构。通常, 我们把可平面图的一个平面嵌入称为平面图。极大平面图是指在任意一对不相邻的顶点之间添加一条边便可破坏其平面性的平面图。因此, 极大平面图的每个面的边界为三角形, 也称为三角剖分图。对于未提及的概念与记号, 可参阅文献[2]。

K-变换始于 1879 年律师兼数学家 Kempe 的工作, 他在著名的四色猜想的证明中首次引入了 K-变换的方法。尽管该工作在时隔 11 年后被 Heawood^[3]否定, 并给出了图论中第 1 个最著名的例图——Heawood 反例图(如图 2 所示), K-变换至今都被认为是图着色理论中的一个最基本的且极其有用的研究工具。Heawood^[3]就是利用 K-变换的思想, 非常简短地证明了五色定理。在应用方面, K-变换也是时间表^[4], 理论物理^[5,6], 以及 Markov 链^[7]等领域中的一个强有力的工具。故长期以来, 有众多学者从不同的角度对 K-变换展开了研究, 如基于顶点着色的 K-变换, 基于边着色的 K-变换, 基于着色的重构图等。

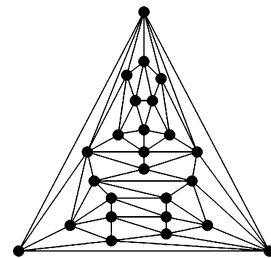


图 2 图论中第 1 个最著名的反例图

本文首先介绍了 K-变换的一些基本性质; 然后分别从基于顶点着色的 K-变换, 基于边着色的 K-变换, 基于着色的重构图等角度对已有的 K-变换的一些重要成果进行了较为详细的综述, 并相应地进行了一定的评述; 针对 Meyniel 定理, 即每个平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类, 给出了一个新而简短的证明; 最后提出了一些与着色类型相关的问题, 这些问题意在探索不同 Kempe 等价类之间的关系, 希望有助于对 K-变换的深入研究。

2 K-变换的基本性质

根据 K-变换定义可知, K-变换本质上是一种导色运算。设 G 是一个 k -色图, f 是它的一个 k -着色。在 f 下, 对 G 的某个 2-色分支实施 K-变换, 很可能

得到一个与 f 不同的 k -着色。

例如, 从如图 3(a)所示图 G 的着色 f_1 出发, 对粗线边所示的 23-分支实施 K-变换, 可得到如图 3(b)所示的着色 f_2 ; 对图 3(a)中粗线顶点所在 24-分支实施 K-变换, 可得到如图 3(c)所示的着色 f_3 ; 对图 3(b)中粗线边所示 24-分支实施 K-变换, 可得到如图 3(d)所示的着色 f_4 ; 对图 3(d)中粗线顶点所在 23-分支实施 K-变换, 可得到如图 3(e)所示的着色 f_5 ; 对图 3(e)中粗线顶点所在 34-分支实施 K-变换, 可得到如图 3(c)所示的着色 f_3 , 由此, 便导出了 G 的所有 4-着色。

当然, 从某个着色出发, 通过 K-变换并不一定总能获得一个与之不同的新着色。若 G 是一个 4-可着色图, f 是 G 的一个 4-着色, 且基于 f 的 G 中仅含 6 个 2-色分支, 则无论对哪个 2-色分支实施 K-变换, 其结果均等同于对 f 中的两种颜色实施置换。设 G 是一个 k -可着色图, f 是 G 的一个 k -着色, 若从 f 出发, 存在一种 K-变换, 得到另一个与之不同的着色, 则称基于 f 的 G 是可 K-变换的。

定理 1 设 G 是一个 k -可着色图, f 是 G 的一个 k -着色。基于 f 的 G 不是可 K-变换的当且仅当在 f 下, G 共有 $k(k-1)/2$ 个 2-色分支。

证明 充分性。由于 f 是 G 的一个 k -着色, 故 G 共有 $k(k-1)/2$ 个 2-色导出子图。又因为在 f 下, G 共有 $k(k-1)/2$ 个 2-色分支, 故 G 的每个 2-色导出子图是连通的, 故在 f 下对 G 实施一次 K-变换仅仅是对 f 中的两种颜色实施置换, 即基于 f 的 G 不是可 K-变换的, 结论成立。

必要性。因为基于 f 的 G 不是可 K-变换的, 则 G 的每个 2-色导出子图是连通的, 故在 f 下, G 共有 $k(k-1)/2$ 个 2-色分支。证毕

即使基于某个着色 f 的图 G 是可 K-变换的, 但

也往往不一定能够从 f 出发通过一系列的 K-变换导出 G 的所有着色。设 G 是一个 k -色图, 若 G 的所有 k -着色是 K-等价的, 则称 G 为 Kempe 图。

设 H 是图 G 的一个子图, f 是 G 的一个着色。我们用 $f(H)$ 表示 H 在 f 着色下的颜色集, 用 $\{1, 2, \dots, k\}$ 表示 G 的颜色集。若 $\exists i, t \in \{1, 2, \dots, k\}$, 使得 G_{it}^f 中含圈, 则称 f 为圈着色, 并称 G 为可圈着色的; 反之, 若 $\forall i, t \in \{1, 2, 3, 4\}$, G_{it}^f 中均无圈, 则称 f 为图 G 的树着色, 并称 G 为可树着色的; 若 G 是可树着色, 但非可圈着色, 则称 G 为纯树着色的; 若 G 是可圈着色, 但非可树着色, 则称 G 为纯圈着色的; 若 G 既是可圈着色, 又是可树着色, 则称 G 为混合型着色的。设 C 是 G 的一个偶圈, 若 $\forall f \in F^f(G)$, 均有 $|f(C)|=2$, 则称 C 为 f 的一个 2-色不变圈, 并称 f 是 G 的一个 2-色不变圈着色。

设 G 是一个 4-可着色的非 Kempe 平面图, $f \in C_4(G)$ 。若 f 是 G 的一个树着色, 则将等价类 $F^f(G)$ 称为树型 Kempe 等价类; 若 f 是 G 的一个 2-色不变圈着色, 则将等价类 $F^f(G)$ 称为圈型 Kempe 等价类; 若 f 是 G 的一个圈着色, 且不为 2-色不变圈着色, 则将等价类 $F^f(G)$ 称为循环圈型 Kempe 等价类。

对于 4-色非 Kempe 极大平面图, Kempe 等价类要么为树型, 要么为圈型, 要么为循环圈型, 且这 3 种类型可同时存在于一个极大平面图的 4-着色集中^[8]。如图 4 所示的极大平面图, 从 f_1 出发, 通过 K-变换能够导出 f_2, f_3, f_5, f_6 , 但不能导出 f_4, f_7 , 其根本原因是 f_4, f_7 均是 2-色不变圈着色, 且它们在同一个圈型 Kempe 等价类中, 而 f_2, f_3, f_5, f_6 在同一个循环圈型 Kempe 等价类中。

如图 5(a)所示的图是正二十面体, 其共有 10 个 4-着色, 且均为树着色(如图 5(a)-图 5(j)所示), 故

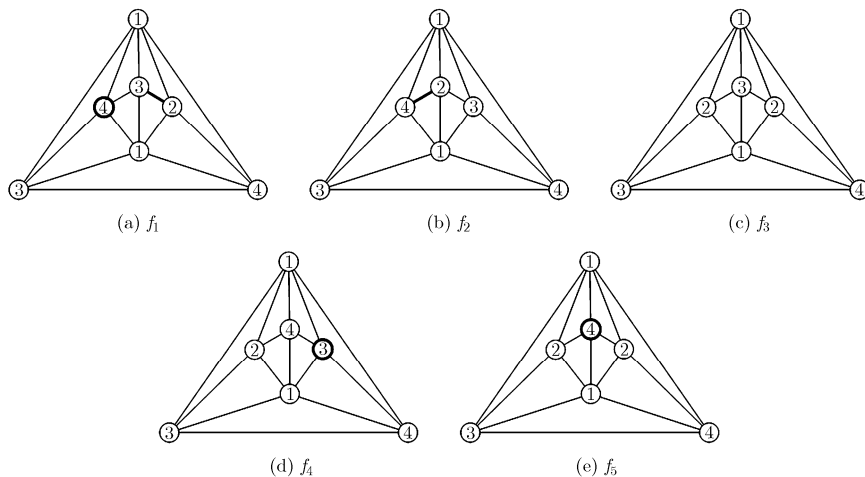


图 3 阶数最小的度数 ≥ 4 的 4-色极大平面图所有着色

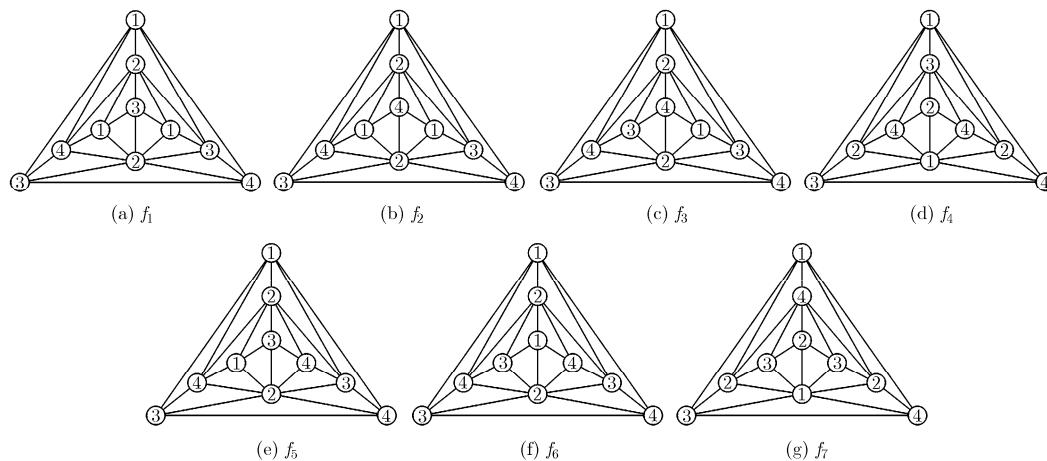


图 4 一个 10-阶极大平面图及它的所有 4-着色

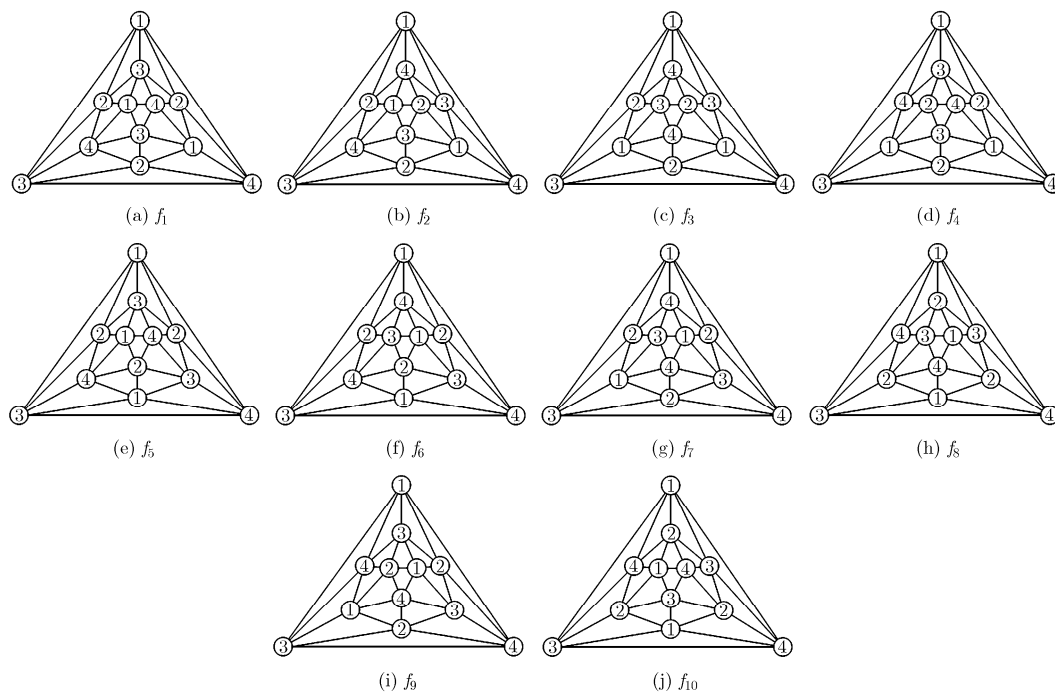


图 5 正二十面体和它的所有 4-着色

该图的 4-着色集构成 10 个 Kempe 等价类。若通过某种运算, 能够从一个 Kempe 等价类的某个着色出发, 导出另外一个 Kempe 等价类的某个着色, 则自然能够解决四色猜想和唯一 4-色平面图猜想。

值得一提的是, 对于有些 k -可着色图 G , 它有 $\kappa(G, k) = 1$, 但 $\kappa(G, k+1)$ 不一定为 1^[9]。

定理 2^[9] 对于任意的两个整数 l, k , 其中 $l \geq 3$, $k > l$, 存在一个色数为 l 的图 G , 使得 $\kappa(G, l) = 1$, $\kappa(G, k) > 1$ 。

如图 6 所示的 6-正则图 G , 它仅含一个 3-着色, 记为 f , 且 $f(v_{ij}) = i$, 其中 $i = \{1, 2, 3\}$, $j = \{1, 2, 3, 4\}$, 因此 $\kappa(G, 3) = 1$ 。另外, G 有一个 4-着色 f' , 使得

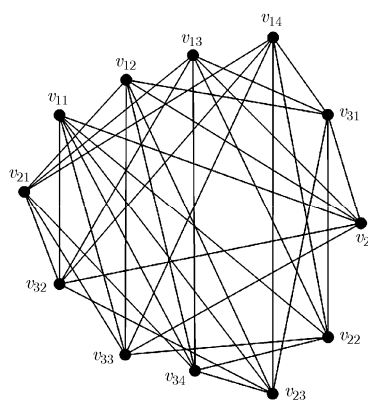


图 6 一个 12-阶的 6-正则图

$f(v_{ij}) = j$ 。则在 f' 下, G 的所有 2-色导出子图是连通的, 即基于 f' 的 G 不是可 K-变换的, 因此 $\kappa(G, 4) > 1$ 。

3 基于顶点着色的 K-变换

K-变换是攻克 4-色猜想的一个非常有力的工具, 尽管还没有成功, 但是在研究过程中得到了许多可以借鉴的思想和结论。另外, K-变换不仅局限于平面图, 在一般图上也有深入的研究, 并得到了一些很好的结果。在基于顶点着色的 K-变换方面, 其相应的研究成果主要表现在如下 4 个方面: 一是平面图的 Kempe 等价性研究; 二是非平面图的 Kempe 等价性研究; 三是完美图的 Kempe 等价性研究; 四是正则图的 Kempe 等价性研究。

自 Kempe 引入 K-变换之后^[2], Fisk 是首先对 K-变换进行研究的学者。他在 1977 年文献[10]中证明了如下结论:

定理 3^[10] 设 G 是 3-可着色的极大平面图, 则 $\kappa(G, 4) = 1$ 。

由 Fisk^[10]给出的上述结论可知, 对于任意一个 3-可着色的极大平面图 G , 从 G 的任意一个 3-着色或 4-着色出发, 均可通过 K-变换的方法导出 G 的所有 4-着色(包括 3-着色)。而对于 4-色平面图, 往往不能通过 K-变换的方法, 由一个 4-着色导出另一个 4-着色。文献[8]对 4-色非 Kempe 平面图的 Kempe 等价性进行了深入剖析, 并对上述问题予以了解释。

设 G 是一个 4-色平面图, $f \in C_4(G)$, C 是 G 的一个圈, 满足 C 上的任意两个顶点在 C 的内部和外部均无连边, $f(C) = \{1, 2\}$ 。设 x, y 是 C 上的一对同色顶点, 把从顶点 x 到顶点 y 之间的一条顶点数 ≥ 3 , 且非颜色 1 与颜色 2 构成的 2-色路 $P(x, y)$ 称为圈 C 的一个 2-色耳。基于此, 文献[8]指出, 导致一个平面图的两个 4-着色是 K-等价的关键子图为 2-色耳。 $\forall f \in C_4(G)$, 若 f 是一个树着色, 则 f 不含 2-色圈, 故也不存在 2-色耳, 因而 f 与 $C_4(G)/f$ 中的任意着色均不是 K-等价的。此外, 当 $f \in C_4(G)$ 是一个圈着色时, f 也不一定能够通过 K-变换导出任意一个给定的圈着色。原因是 G 可能同时含有圈型和循环圈型 Kempe 等价类, 或者含有多个圈型或循环圈型 Kempe 等价类。对于 4-色非 Kempe 极大平面图, 文献[8]指出, Kempe 等价类可分为树型, 圈型和循环圈型, 且这 3 种类型可同时存在于一个极大平面图的 4-着色集中。

尽管对于 4-色平面图, 其所有 4-着色可能构成多个 Kempe 等价类, 但 Meyniel^[11]对基于 5-着色的平面图的 Kempe 等价类进行了研究。

定理 4 (Meyniel 定理^[11]) 设 G 是一个平面图, 则 $\kappa(G, 5) = 1$ 。

由 Meyniel 定理可知, 对于任意的 4-可着色平面图 G , 从 G 的一个 5-着色出发, 一定可通过 K-变换的方法得到 G 的一个 4-着色。该结论似乎也为四色猜想的证明提供了一个思路。对于任意的一个平面图 G , 从 G 的一个 5-着色出发, 若我们能够给出一个确切的 K-变换过程, 由此导出 G 的一个 4-着色, 则自然证明了四色猜想。

Mohar^[9]和 Vergnas^[12]等人后来分别对 Meyniel 定理给予了一定的扩展, 获得了如下结论:

定理 5^[9] 设 G 是一个平面图, k 是一个整数。若 $\chi(G) < k$, 则 $\kappa(G, k) = 1$ 。

定理 6^[12] 设 G 是一个不可收缩至 K_5 的简单图, 则 $\kappa(G, 5) = 1$ 。

由五色定理知, 任意一个平面图是 5-可着色的, 故结合定理 4 和定理 5, 可直接推出下述:

定理 7 设 G 是一个平面图, k 是一个整数。若 $k \geq 5$, 则 $\kappa(G, k) = 1$ 。

基于定理 6, 对非平面图的 Kempe 等价性研究, 仅需再考虑不可收缩至 $K_{3,3}$ 的这一类简单图的情形。

设 S 是 $V(G)$ 的一个子集, 若由 S 导出的子图是一个完全图, 则 S 称为 G 的一个团。如果 G 中不包含适合 $|S'| > |S|$ 的团 S' , 则称 S 为 G 的一个最大团。 G 的最大团的规模记作 $\omega(G)$ 。若图 G 的每个导出子图 H 均满足 $\chi(H) = \omega(H)$, 这称 G 为优美图。设 $u, v \in V(G)$, $u \neq v$ 。若 u, v 间的任意一条路满足路长为偶数, 则称 u, v 构成一个偶对。对 u, v 实施缩点运算是指: 在图 G 中, 用一个新的顶点来替代 u 和 v , 使得 G 中原来与 u, v 相邻的顶点变成与该新的顶点相邻。在图 G 中对 u, v 实施缩点运算后, 将所得之图记作 G^{uv} 。若存在一个图序列 G_0, G_1, \dots, G_s , 其中, 每个 G_i ($i = 1, 2, \dots, s$) 是通过在 G_{i-1} 中对一个偶对实施缩点运算得到, $G_0 = G$, G_s 是一个完全图, 则称图 G 是偶可收缩的。若图 G 的每个导出子图是偶可收缩的, 则称 G 是完全可收缩的。Bertschi^[13]研究了优美图的 Kempe 等价性问题, 并发现了优美图中存在一类 k -可着色图满足其所有 k -着色是 K-等价的, 即:

定理 8^[13] 设 G 是一个完全可收缩图。则 G 是优美图, 且若整数 $k \geq \chi(G)$, 则有 $\kappa(G, k) = 1$ 。

正则图的 Kempe 等价性问题也是 K-变换领域中的研究热点。Mohar 猜想所有的非完全 k -正则图的所有 k -着色构成一个 Kempe 等价类, 其中

$k \geq 3$ (以下称为 Mohar^[9]猜想)。但 Mohar 未能给出证明。

2015 年, Feghali 等人^[14]证明了 Mohar 猜想在 $k = 3$ 时, 除 K_4 或三角柱外, 3-正则图的所有 3-着色是 K-等价的。K-变换的最新成果是, Bonamy 等人^[15]证明了 Mohar 猜想在 $k \geq 4$ 时是成立的。

以上是基于顶点着色的 K-变换的研究进展, 可以看出, 所得结果基本上都是针对某一个特定的图类, 要想给出一个图是 Kempe 图或非 Kempe 图的充要条件, 目前看来是极其困难的。这些问题对于图论着色研究者来说, 是一件非常有趣而意义重大的工作。

4 基于边着色的 K-变换

设 G 是一个 k -边着色的图, f 是它的一个 k -边着色, $\{1, 2, \dots, k\}$ 为颜色集。基于边着色的 Kempe 变换, 简称为 K-变换, 是指将图 G 中某个 2-边分支实施颜色互换, 并保持其余边的着色不变。设 $f, f' \in C_k(G)$, 若从 f 出发, 通过若干次 K-边变换可获得 f' , 则称 f 与 f' 是 Kempe 等价的, 简称为 K-等价的。图 G 的基于边着色 f 的 Kempe 等价类是指所有与 f 互为 K-等价的着色构成之集, 记作 $F_E^f(G)$ 。文中用 $\kappa_E(G, k)$ 表示图 G 的所有 k -边着色构成的 Kempe 等价类数目。用 $L(G)$ 表示 G 的线图, 则有 $\kappa_E(G, k) = \kappa(L(G), k)$ 。

在基于边着色的 K-变换中, 也有一些很好的工作。Mohar 对任意给定图 G 的边着色的 Kempe 等价性进行了研究, 得到了一个图在何种情况下有 $\kappa_E(G, k) = 1$ 的一般性结论。

定理 9^[9] 设 G 是一个图, 其边色数为 $\chi'(G)$ 。若整数 $k \geq \chi'(G) + 2$, 则 $\kappa_E(G, k) = 1$ 。

同时, Mohar 还研究了一个图的最大度 Δ 与它的基于边着色的 Kempe 等价性的关系, 并得到如下结论:

定理 10^[9] 若 G 是一个最大度 $\Delta \leq 3$ 的图, 则 $\kappa_E(G, 4) = 1$; 若 G 是一个最大度为 Δ 的 2-部图, 整数 $k \geq \Delta + 1$, 则 $\kappa_E(G, k) = 1$ 。

针对立方 2-部图, Mohar 提出了一个开放性问题: 哪些立方 2-部图(Cubic Bipartite Graphs)满足其所有 3-边着色构成一个 Kempe 等价类^[9]? 随后, Mcdonald 等人^[16]和 Belcastro 等人^[17]分别对此问题继续展开了研究。其中, Mcdonald 等人首先对定理 10 进行了扩展, 即:

定理 11^[16] 若 G 是一个最大度 $\Delta \leq 3$ 的图, 则

$\kappa_E(G, \Delta + 1) = 1$; 若 G 是一个最大度 $\Delta \leq 4$ 的图, 则 $\kappa_E(G, \Delta + 2) = 1$ 。

此外, Mcdonald 等人还研究了什么样的图满足 $\kappa_E(G, \Delta + 1) = 1$, 有下述结论:

定理 12^[16] 若 G 是一个最大度为 Δ 的图, 且 $\kappa_E(G, \Delta + 1) = 1$, 则 $\Delta \leq 3$ 。

Belcastro 等人找到了一类满足其所有 3-边着色构成一个 Kempe 等价类的立方 2-部图, 即

定理 13^[17] 每个边色数为 3 的平面立方 2-部图 G , 有 $\kappa_E(G, 3) = 1$ 。

另外, 文献[16]还指出, 存在使得 $\kappa_E(G, 3) > 1$ 的 3-边可着色的非平面立方 2-部图 G 。

以上是基于边着色的 K-变换的研究进展。由于四色猜想等价于判断每个 2-边连通立方平面图是否为 3-边可着色, 故基于边着色的 K-变换的主要研究对象是最大度 $\Delta \leq 3$ 的图。但从目前已有的结果来看, 已有的基于边着色的 K-变换的结论还是非常稀少, 也没有给出一般的 2-边连通立方平面图的 Kempe 等价性情况, 要解决此问题是非常困难的。正如前面所述, K-变换是图着色理论中的一件最基本而又强大的工具, 其与四色猜想息息相关。有关 K-变换的每一项新结论的出现, 都可能进一步缩小四色猜想的研究范围。

5 基于着色重构图的 K-变换

图 G 的 k -色重构图, 记作 $P_k(G)$, 其顶点集为 G 的所有 k -着色构成的集合, 两个 k -着色相连边当且仅当它们在 G 中仅有一个顶点着不同颜色。若 $P_k(G)$ 是连通的, 则称图 G 是 k -混合的。研究 k -色重构图的主要目的是, 判断给定一个图 G 是否为 k -混合的^[18], 这是着色的重新配置问题, 属于组合问题。在 k -色重构图 $P_k(G)$ 方面, Cereceda^[19,20]做了比较多的工作。下面先介绍一个基本的事实。

定理 14^[19] 若图 G 的色数 $k \in \{2, 3\}$, 则 $P_k(G)$ 不连通; 若图 G 的色数 $k \geq 4$, 则存在使得 $P_k(G)$ 连通的 G , 也存在使得 $P_k(G)$ 不连通的 G 。

判定一个 3-可着色图是否为 3-混合的是 P-问题^[20]; 判定一个 $k(\geq 4)$ -可着色图是否为 k -混合的是 PSPACE-完全问题^[21]。一个图 G 的混合数 $m(G)$, 是满足下述条件的最小值: 对于任意的 $k \geq m(G)$, G 是 k -混合的。对于任意图的混合数, Jerrum^[22]给出了一个上界, 即:

定理 15^[22] 设图 G 的最大度为 Δ , 则 G 的混合数 $m(G) \leq \Delta + 2$ 。

若图 G 的任意子图均有度数 $\leq d$ 的顶点, 则称 G 为 d -退化图。一个 k -混合图 G 的 k -重着色直径是

指 k -色重构图 $P_k(G)$ 的直径, 将 G 的树宽记为 $tw(G)$ 。Cereceda^[23]证明了存在 $m(G)$ 比使图 G 为 k -混合的最小 k 值任意大的情况, 且对于一个 k -退化的图 G , 若 $tw(G) = k$, 则 G 是 $(k+2)$ 混合的。Bonamy 和 Bousquet 两人^[24]在该结论基础上做了进一步的研究, 证明了对于任意的图 G , 若 $k \geq tw(G) + 2$, 则它的 k -重着色直径 $\leq (2 \cdot n^2 + n)$ 。

给定一个正整数 k , 一个 k -可着色的 n -阶图 G 称为 k -色稠的, 如果下列条件之一成立:

- (1) G 是不相交的团的并, 每个团至多含 k 个顶点;
- (2) G 有一个割集 S , $G - S$ 有两个连通分支 D 和 D' , $u \in D, v \in D'$, 满足:
 - (a) $|D| = 1$ 或 $|D \cup S| \leq k$;
 - (b) $S \subseteq N(v)$;
 - (c) 对 G 中的 u, v 实施缩点运算后所得之图 G' 是 k -色稠的。

Bonamy 和 Johnson 等人^[25]引入了 k -色稠的概念, 并对 k -色稠图的着色重构图予以了研究, 得到了如下结论:

定理 16^[25] 设 G 是一个 k -色稠图, 整数 $l \geq k + 1$ 。则 G 的 l -色重构图 $P_l(G)$ 是连通的, 且 $P_l(G)$ 的直径为 $O(|V|^2)$ 。

另外, Bonamy 和 Johnson 等人^[25]发现了两类 k -色稠图, 即所有的 $k(\geq 1)$ -可着色弦图属于 k -色稠图, 所有的弦 2-部图属于 2-色稠图; 对于任意的 $k \geq 2$, 均存在一个 k -可着色弦图 G , 使得其对应的 $(k+1)$ -色重构图 $P_{k+1}(G)$ 的直径为 $\Theta(|V|^2)$ 。

Feghali 和 Johnson 等人^[26]研究了 k 值与 $P_k(G)$ 连通性之间的关系, 得到了下述结论:

定理 17^[26] 设 G 是一个最大度为 Δ 的图, k 为整数。则:

- (1) 当 $k \leq \Delta$ 时, $P_k(G)$ 可能不连通, 且 $P_k(G)$ 的某个连通分支具有超多项式直径;
- (2) 当 $k = \Delta + 1$ 时, $P_k(G)$ 含孤立顶点, 且最多有一个直径为 $O(n^2)$ 的分支;
- (3) 当 $k \geq \Delta + 2$ 时, $P_k(G)$ 是连通的, 且直径为 $O(n^2)$;
- (4) 当 $k > \Delta$ 时, 若 G 不是完全图、奇圈或 $k = \Delta + 1$ 的 Δ -正则图, 则从 G 的一个 k -着色出发, 最多通过 $O(n^2)$ 的 K-变换(每次 K-变换只改变 G 中一个顶点的颜色, 且仅使用初始的 k 个颜色), 可得到一个 Δ -着色。

此外, 文献^[26]还关注了判断两个顶点在 $P_k(G)$ 中是否连通的困难程度问题。对于一个最大度为 Δ 的图 G , 判定它的两个 k -着色是否在 $P_k(G)$ 的同一

个分支上, 当 $k = 3$ 时, 其时间复杂度为 $O(n^2)$, 当 $4 \leq k \leq \Delta(G)$ 时, 其为 PSPACE-完全问题, 当 $k = \Delta(G) + 1$ 时, 其时间复杂度为 $O(n)$, 当 $k \geq \Delta(G) + 2$ 时, 猜想其时间复杂度为 $O(1)$ ^[26]。Bousquet 等人^[27]也研究了此类问题, 证明了对于平均最大度远小于 d 的图 G , 它的任意两个 $(d+1)$ -着色可通过着色数的多项式倍数的 K-变换(每次 K-变换只改变 G 的一个顶点颜色)达到对方。

文献^[8]定义了 σ -运算与 σ -特征图。 σ -运算的对象图是平面图, 一次 σ -运算等同于若干次的 K-变换。设 C 是平面图 G 的一个无弦圈, $f \in C_4(G)$, 若 $f(C) = \{1, 2\}$, 则 f 关于 C 的 σ -运算, 记作 $\sigma(f, C)$, 是指: 将 C 内所有颜色 3 与颜色 4 的顶点颜色互换, 同时保持其它顶点着色不变。针对 σ -运算给出的 σ -特征图, 可使得在给定一个平面图情况下, 更加直观地确定各个着色之间的关系。设 G 是一个 4-色平面图。 G 的 σ -特征图, 记作 G_4^σ , 其顶点集为 G 的所有 4-着色, $V(G_4^\sigma)$ 中两个顶点相邻当且仅当它们在 G 中可通过一次 σ -运算到达对方。由此定义, G 的 σ -特征图即为 G 的 4-色重构图的母图。 G_4^σ 具有如下性质:

定理 18^[8] 设 G 是一个 4-色平面图, G_4^σ 是它的 σ -特征图。则:

- (1) G_4^σ 中任一顶点 $f, d_{G_4^\sigma}(f) = k$ 的充分必要条件是 f 中含 k 个 2-色圈;
- (2) G_4^σ 不含三角形;
- (3) G_4^σ 中任意一对相邻顶点的度数不可能是 1 和 2。

研究一个图的 k -色重构图或 σ -特征图是很有现实意义的。例如, 给定一个图 G 及它的一个着色, 能够从该着色出发导出 G 的任意的其它着色是使用 Glauber 动力模型实现着色采样的先决条件。此外, 无线通信网络中的无线电频率分配问题也通常被模型化为图着色问题, 即无线通信网络中的频率重新分配问题可视为图的重新着色问题。

6 Meyniel 定理的另一种证明方法

1978 年, Meyniel 证明了任一平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类, 即所谓的 Meyniel 定理, 并发表于 *Journal of Combinatorial Theory, Series B*^[11], 这也是目前为止 Kempe 变换中最漂亮的结论之一。本节中, 我们给出了 Meyniel 定理的一个新的更简短的证明方法。

定理 19 每个极大平面图的所有 5-着色构成一

个 Kempe 等价类。

证明 设 G 是一个极大平面图, 由 Heawood 给出的五色定理^[3]知, G 有一个 5-着色。设 $n = |V(G)|$, 对 n 实施数学归纳。

阶数最小的极大平面图 G 为一个三角形, 如图 7(a)所示, 即 $n=3$, 此时 $\kappa(G, 5) = 1$ 。当 $n=4$ 时, G 为 K_4 , 如图 7(b)所示, 结论显然成立。假设当 $n \geq 4$ 时, 结论均成立, 考察 $|V(G)| = n+1$ 的情况。由于 $3 \leq \delta(G) \leq 5$, 故下面分 3 种情况讨论。

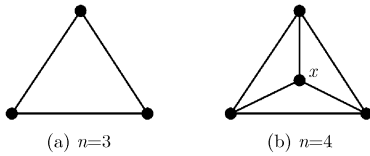


图 7 定理 19 证明示意图

情况 1 $\delta(G) = 3$;

设 $x \in V(G)$, $d_G(x) = 3$, 如图 7(b)所示。由于 $G-x$ 是极大平面图, 故由归纳假设知, $\kappa(G-x, 5) = 1$ 。又由于 $d_G(x) = 3$, 故有 $\kappa(G, 5) = 1$ 。

情况 2 $\delta(G) = 4$;

设顶点 $x \in V(G)$, $d_G(x) = 4$, $N(x) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 如图 8(a)所示。删除顶点 x , 并将 v_2, v_4 收缩为一个新顶点(记为 v_4^2), 且使原来与 v_2, v_4 相邻的顶点变成与 v_4^2 相邻, 所得之图记作 G' , 如图 8(b)所示。则由归纳假设知 $\kappa(G', 5) = 1$, 故对于 G , 所有使得 v_2, v_4 着相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。同理, 在 G 中, 所有使得 v_1, v_3 着相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。

在 G 中, 删除顶点 x , 并使 v_2, v_4 连边, 所得之图记作 G'' , 如图 8(c)所示。则由归纳假设知 $\kappa(G'', 5) = 1$, 故对于 G , 所有使得 v_2, v_4 着不相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。同理, 在 G 中, 所有使得 v_1, v_3 着不相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。

若 $\exists f \in C_5(G) \wedge f' \in C_5(G)$, 使得 $f(v_1) \neq f(v_3)$, $f'(v_1) = f'(v_3)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 则自然有 $\kappa(G, 5) = 1$ 。同理, 若 $\exists g \in C_5(G) \wedge g' \in$

$C_5(G)$, 使得 $g(v_2) \neq g(v_4)$, $g'(v_2) = g'(v_4)$, 且 g 与 g' 是 K-等价的, 则有 $\kappa(G, 5) = 1$ 。

下面假设对于任意使得 v_1, v_3 着不相同颜色的 $f \in C_5(G)$, 以及对于任意使得 v_1, v_3 着相同颜色的 $f' \in C_5(G)$, f 与 f' 不是 K-等价的; 且对于任意使得 v_2, v_4 着不相同颜色的 $g \in C_5(G)$, 以及对于任意使得 v_2, v_4 着相同颜色的 $g' \in C_5(G)$, g 与 g' 不是 K-等价的。

不妨设 $f(v_1) = 1$, $f(v_3) = 2$, 则在 f 下, v_1, v_3 之间必然存在一条 12-路, 如图 8(d)所示。若 $f(v_2) \neq f(v_4)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f'(v_2) = f'(v_4)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾; 若 $f(v_2) = f(v_4)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f'(v_2) \neq f'(v_4)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾。

情况 3 $\delta(G) = 5$;

设 $x \in V(G)$, $d_G(x) = 5$, $N(x) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 如图 9(a)所示。删除顶点 x , 并将 v_2, v_5 收缩为一个新顶点(记为 v_5^2), 且使原来与 v_2, v_5 相邻的顶点变成与 v_5^2 相邻, 所得之图记作 G' , 如图 9(b)所示。则由归纳假设知 $\kappa(G', 5) = 1$, 故对于 G , 所有使得 v_2, v_5 着相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。同理, 在 G 中, 所有使得 $\{v_1, v_4\}$, $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ 或 $\{v_3, v_5\}$ 中的顶点对着相同颜色的 5-着色构成一个 Kempe 等价类。

下面假设 $\forall f \in C_5(G) \wedge f' \in C_5(G)$, 若 $f(v_1) = f(v_4)$, $f'(v_1) \neq f'(v_4)$ (或 $f(v_1) = f(v_3)$, $f'(v_1) \neq f'(v_3)$; 或 $f(v_2) = f(v_4)$, $f'(v_2) \neq f'(v_4)$; 或 $f(v_2) = f(v_5)$, $f'(v_2) \neq f'(v_5)$; 或 $f(v_3) = f(v_5)$, $f'(v_3) \neq f'(v_5)$), 则有 f 与 f' 不是 K-等价的。

不妨设 $f \in C_5(G)$, $f(v_1) = 1$, $f(v_3) = 2$ 。由假设知, 在 f 下, v_1, v_3 之间存在一条 12-路。分如下 3 种情况讨论。

情况 3.1 $f(v_4) \neq 1, f(v_5) \neq 2$; 如图 9(c)所示。

若 $f(v_2) \neq f(v_5)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f(v_2) = f(v_5)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾; 若 $f(v_2) = f(v_5)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f(v_2) \neq f(v_5)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾。

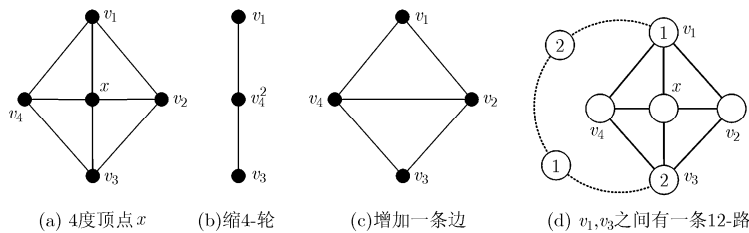


图 8 定理 19 证明示意图

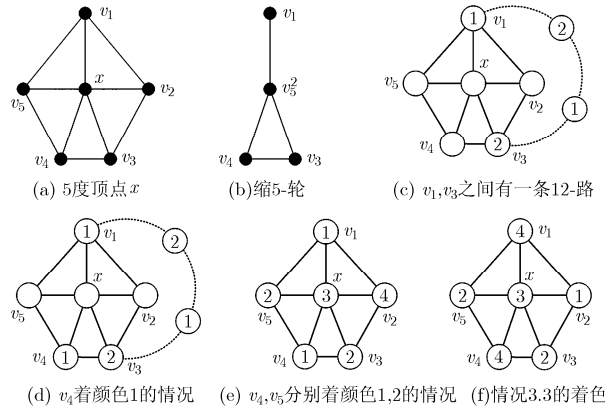


图9 定理 19 证明示意图

情况 3.2 $f(v_4) = 1, f(v_5) \neq 2$; 或 $f(v_4) \neq 1, f(v_5) = 2$;

假设 $f(v_4) = 1, f(v_5) \neq 2$ ($f(v_4) \neq 1, f(v_5) = 2$ 的证明过程与之类似), 如图 9(d)所示。若 $f(v_2) \neq f(v_5)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f(v_2) = f(v_5)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾; 若 $f(v_2) = f(v_5)$, 则 $\exists f' \in C_5(G)$, 使得 $f(v_2) \neq f(v_5)$, 且 f 与 f' 是 K-等价的, 与上述假设矛盾。

情况 3.3 $f(v_4) = 1, f(v_5) = 2$;

对此情况, 不妨设 $f(x) = 3, f(v_2) = 4$, 如图 9(e)所示。由假设可推出, v_2 与 v_5 之间存在一条 24-路, 对 G 中所有 14-分支实施颜色互换, 所得着色仍记作 f , 如图 9(f)所示。于是在 f 下, v_2 与 v_5 之间存在一条 12-路, $f(v_1) = f(v_4) = 4$ 。此时, v_1, v_4 在 G_{45} 中不连通, 对 v_1 所在 45-分支实施 K-变换, 所得着色记 f' 。由于 $f'(v_1) \neq f'(v_4)$, 且 f, f' 是 K-等价的, 这与上述假设矛盾。

综上所述, 本定理成立。

定理 20^[9] 设 G 是图 \tilde{G} 的子图, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 是 \tilde{G} 的两个 r -着色, c_i 是 \tilde{c}_i 在 G 上的限制, $i = 1, 2$ 。若 \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 是 K-等价的, 则 c_1, c_2 是 K-等价的。

定理 19 证明了每个极大平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类。由定理 20 可知, 若一个图 G 的所有 k -着色是互为 K-等价的, 则 G 的任意子图的所有 k -着色是互为 K-等价的, 故可直接推出: 每个平面图的所有 5-着色构成一个 Kempe 等价类, 即 Meyniel 定理成立。

7 结束语

研究 K-变换的主要目的之一是确定一个图的着色的 Kempe 等价类数, 或者, 确定整数 k 值要多大时, 其所有 k -着色构成一个 Kempe 等价类。到

目前为止, 给出色数为 k 的图满足其所有 k -着色互为 K-等价的充分必要条件仍是十分困难的, 甚至, 针对某一特定类型的图, 确定它们的 Kempe 等价类数目也十分困难。研究 K-变换的另一个主要目的是通过 K-变换导出一个图的其它着色。这与四色猜想息息相关。例如, 已经知道, 每个平面图的所有 5-着色是 K-等价的, 故若一个平面图 G 是 4-可着色的, 则从 G 的一个 5-着色出发, 一定可通过 K-变换得到 G 的一个 4-着色。

由于 4-色平面图的着色类型分为树型和圈型, 其中, 圈着色又可分为 2-色不变圈着色和非 2-色不变圈着色。相应地, 4-色非 Kempe 平面图的 Kempe 等价类有树型, 圈型和循环圈型。故仅采用 K-变换, 往往不能从 4-色平面图的一个 4-着色出发, 导出该图的其它所有着色, 这是 K-变换的局限所在。在后续的 K-变换的研究工作中, 可以着眼于打破着色的 Kempe 等价类之间的壁垒: 是否存在一种运算, 使得从一个 Kempe 等价类的某个着色出发, 导出另一个 Kempe 等价类的某个着色?

参考文献

- [1] KEMPE A B. On the geographical problem of the four colors[J]. *American Journal of Mathematics*, 1879, 2(3): 193-200. doi: 10.2307/2369235.
- [2] BONDY J A and MURTY U S R. Graph Theory[M]. New York, USA, Springer, 2008: 1-581.
- [3] HEAWOOD P J. Map colour theorem[J]. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1890, 24: 332-338.
- [4] MUHLENTHALER M and WANKA R. The connectedness of clash-free timetables[C]. 10th International Conference of the Practice and Theory of Automated Timetabling PATAT 2014, York, United Kindom, 2014: 330-346.
- [5] WANG J S, SWENDSEN R H, and KOTECKY R. Antiferromagnetic potts models[J]. *Physical Review Letters*, 1989, 63(2): 109-112.

- [6] WANG J S, SWENDSEN R H, and KOTECK R. Three-state antiferromagnetic potts models: A monte carlo study[J]. *Physical Review B Condensed Matter*, 1990, 42(4): 2465–2474.
- [7] VIGODA E. Improved bounds for sampling colorings[J]. *Journal of Mathematical Physics*, 41(3): 1555–1569. doi: 10.1063/1.533196.
- [8] 许进. 极大平面图的结构与着色理论(4): σ -运算与Kempe等价类[J]. 电子与信息学报, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- XU J. Theory on structure and coloring of maximal planar graphs (4): σ -operations and Kempe equivalent classes[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(7): 1557–1585. doi: 10.11999/JEIT160483.
- [9] MOHAR B. Kempe Equivalence of Colorings[M]. Graph Theory in Paris. Birkhäuser Basel, 2006: 287–297. doi: 10.1007/978-3-7643-7400-6_22.
- [10] FISK S. Geometric coloring theory[J]. *Advances in Mathematics*, 1977, 24(3): 298–340. doi: 10.1016/0001-8708(77)90061-5.
- [11] MEYNIEL H. Les 5-colorations d'un graphe planaire forment une classe de commutation unique[J]. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 1978, 24(3): 251–257. doi: 10.1016/0095-8956(78)90042-4.
- [12] VERGNAS M L and MEYNIEL H. Kempe classes and the hadwiger conjecture[J]. *Journal of Combinatorial Theory Series B*, 1981, 31(1): 95–104. doi: 10.1016/S0095-8956(81)80014-7.
- [13] BERTSCHI M E. Perfectly contractile graphs[J]. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 1990, 50(2): 222–230. doi: 10.1016/0095-8956(90)90077-D.
- [14] FEGHALI C, JOHNSON M, and PAULUSMA D. Kempe equivalence of colourings of cubic graphs[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2015, 49: 243–249. doi: 10.1016/j.endm.2015.06.034.
- [15] BONAMY M, BOUSQUET N, FEGHALI C, et al. On a conjecture of mohar concerning Kempe equivalence of regular graphs[J]. *Discrete Mathematics*. arXiv:1510.06964v3 [cs.DM] 22 Sep 2016.
- [16] MCDONALD J, MOHAR B, and SCHEIDE D. Kempe equivalence of edge-colorings in subcubic and subquartic graphs[J]. *Journal of Graph Theory*, 2012, 70(2): 226–239. doi: 10.1002/jgt.20613.
- [17] BELCASTRO S M and HAAS R. Counting edge-Kempe-equivalence classes for 3-edge-colored cubic graphs[J]. *Discrete Mathematics*, 2014, 325(13): 77–84. doi: 10.1016/j.disc.2014.02.014.
- [18] HEUVEL JAN VAN DEN. The complexity of change[J]. *Surveys in Combinatorics*. arXiv: 1312.2816v1[cs.DM] 10 Dec 2013.
- [19] CERECEDA L, HEUVEL J V D, and JOHNSON M. Connectedness of the graph of vertex-colourings[J]. *Discrete Mathematics*, 2008, 308(5/6): 913–919. doi: 10.1016/j.disc.2007.07.028.
- [20] CERECEDA L, HEUVEL J VAN DEN, and JOHNSON M. Finding paths between 3-colorings[J]. *Journal of Graph Theory*, 2011, 67(1): 69–82.
- [21] BONSMA P and CERECEDA L. Finding paths between graph colourings: PSPACE-completeness and superpolynomial distances[J]. *Theoretical Computer Science*, 2007, 410(50): 738–749. doi: 10.1016/j.tcs.2009.08.023.
- [22] JERRUM M. A very simple algorithm for estimating the number of k -colorings of a low-degree graph[J]. *Random Structures & Algorithms*, 1995, 7(2): 157–165.
- [23] CERECEDA L. Mixing graph colourings[D]. [Ph.D. dissertation], London School of Economics and Political Science, 2007.
- [24] BONAMY M and BOUSQUET N. Recoloring bounded treewidth graphs[J]. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 2013, 44(5): 257–262. doi: 10.1016/j.endm.2013.10.040.
- [25] BONAMY M, JOHNSON M, LIGNOS I M, et al. Reconfiguration graphs for vertex colourings of chordal and chordal bipartite graphs[J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2014, 27: 132–143. doi: 10.1007/s10878-012-9490-y.
- [26] FEGHALI C, JOHNSON M, and PAULUSMA D. A reconfigurations analogue of brooks' theorem[J]. *Journal of Graph Theory*, 2015, 8635: 287–298. doi: 10.1007/978-3-662-44465-8_25.
- [27] BOUSQUET N and PERARNAU G. Fast recoloring of sparse graphs[J]. *European Journal of Combinatorics*, 2016, 52A: 1–11. doi: 10.1016/j.ejc.2015.08.001.
- 许进: 男, 1959年生, 教授, 研究方向为图论与组合优化、生物计算机、社交网络与信息安全等。
- 刘小青: 女, 1986年生, 博士生, 研究方向为图论与组合优化。