基于差集构造零相关区高斯整数序列集

刘　涛　　许成谦*　　李玉博
(燕山大学信息科学与工程学院　秦皇岛　066004)

摘　要：该文给出一类零相关区高斯整数序列的直接构造法。该方法基于差集，利用移位序列得到一类零相关区高斯整数序列集，并且序列集的零相关区长度以及元素取值可灵活设定。由于差集的研究成果非常丰富，因此该方法可以为 CDMA 通信系统提供大量零相关区高斯整数序列集。

关键词：高斯整数序列；零相关区；差集；移位序列

中图分类号：　TN911.2　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：1009-5896(2017)09-2277-05

DOI: 10.11999/JEIT161177

Construction of Zero Correlation Zone Gaussian Integer Sequence Sets Based on Difference Sets

LIU Tao　　XU Chengqian　　LI Yubo
(*School of Information Science & Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

Abstract: A unified construction of Guassian integer sequence sets with Zero Correlation Zone (ZCZ) is presented. Based on difference sets, optimal or almost optimal ZCZ Gaussian integer sequence sets are constructed using shift sequences, whose ZCZ length and alphabets can be flexibly chosen. Since the study of difference sets has achieved abundant accomplishment, then the presented method will produce an abundance of ZCZ Gaussian integer sequence sets for CDMA systems.

Key words: Gaussian integer sequence; Zero Correlation Zone (ZCZ); Difference set; Shift sequence

1　引言

高斯整数序列是定义在高斯整数集合上的序列，其序列元素的实部与虚部都为整数。近年来，具有良好相关性能的高斯整数序列被应用于 CDMA 通信系统[1]，因此高斯整数序列的设计研究受到关注。然而由于高斯整数集合上的序列设计缺少成熟的数学工具，导致高斯整数序列设计成果并不是很多。早在 1994 年，Fan 等人[2]构造了一类高斯整数序列，其周期自相关函数在位移不等于 $N/4$, $N/2$, $3N/4$ 时都等于零。2012 年，文献[3]利用定义在集合 $\{0,\pm1,\pm j\}$ 上的 8 个基序列进行线性组合，构造了长度为偶数的完备高斯整数序列。近些年，组合设计被应用到高斯整数序列设计中来，得到一些重要成果。文献[4,5]利用差集构造了完备高斯整数序列。文献[6]利用分圆类构造了长度为奇素数的完备高斯整数序列。文献[7]利用二元伪随机序列构造了一类长度为 2^m-1 的完备高斯整数序列。Pei 等人[8]和 Chang 等人[9]则分别构造了任意长度的完备高斯整数序列。还有另外一些方法，如文献[10]利用整数集上的多电平完备序列构造了完备高斯整数序列。文献[11]构造了一类含有较多零元素的稀疏完备高斯整数序列。文献[12]利用交织法构造了长度为偶数的完备高斯整数序列。

零相关区序列[13–15]是近些年来序列设计领域新的研究方向，目前已经取得大量研究成果。然而已有的零相关区序列设计方法都是针对于传统的单位圆上的复数根序列，零相关区高斯整数序列设计的研究成果非常少。文献[15,16]利用完备高斯整数序列构造了零相关区高斯整数序列。基于二元二值自相关序列，文献[17]给出了一类高斯整数序列构造方法，可以设定序列元素及相关区长度等参数。然而，由于二元二值自相关序列长度局限为 2^n-1 ，因此该方法得到的零相关区高斯整数序列集参数受到一定限制。本文将文献[17]方法进行推广，提出一类新的零相关区高斯整数序列集的直接构造法。基于任意参数的差集构造零相关区高斯整数序列集。

收稿日期：2016-11-02；改回日期：2017-04-01；网络出版：2017-05-11
*通信作者：许成谦　cqxu@ysu.edu.cn
基金项目：国家自然科学基金(61671402, 61501395)，河北省自然科学基金(F2015203150, F2015203204)，河北省高等学校科学研究计划(QN2014027)
Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61671402, 61501395) , The Natural Science Foundation of Hebei Province (F2015203150, F2015203204), The Natural Science Research Programs of Hebei Educational Committee (QN2014027)

文献[17]的方法是本文方法的一类特殊情况。根据不同的差集，本文方法可以构造出多个具有不同参数形式的零相关区高斯整数序列集。

2 基本概念

定义 1 设 $\boldsymbol{u}=(u(0),u(1),u(2),\cdots,u(N-1))$ 是一个长度为 N 的复数序列，序列中的元素取自集合 $\{a+bj\}$，其中 a 和 b 为整数，$j=\sqrt{-1}$，则称序列 $\boldsymbol{u}$ 为高斯整数序列。

定义 2 设 $\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j$ 是两个长度为 L 的复数序列，序列的周期互相关函数定义为

$$R_{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j}(\tau)=\sum_{t=0}^{L-1}u_i(t)u_j^*(t+\tau) \tag{1}$$

其中，$0\le\tau<L$，下标模 L 运算，$(\bullet)^*$ 表示取复共轭。当 $i=j$ 时，称为序列 $\boldsymbol{u}_i$ 的自相关函数，可以用 $R_{\boldsymbol{u}_i}(\tau)$ 表示。

定义 3 设 $\boldsymbol{U}$ 是一个序列集合，包含有 M 个长度为 N 的序列。对于任意 $\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j\in\boldsymbol{U}$，若当 $|\tau|\le Z-1$，$i\ne j$ 或者 $0<|\tau|\le Z-1$，$i=j$ 时，序列周期相关函数都满足：$\left|R_{\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j}(\tau)\right|=0$。则序列集 $\boldsymbol{U}$ 称为零相关区(ZCZ)序列集，表示为 (N,M,Z)-ZCZ，其中 N 表示序列长度，M 为序列集中的序列数目，Z 为零相关区长度。

定义 4 设一个零相关区序列集 (N,M,Z)-ZCZ，由 ZCZ 序列集的理论界[18]可知：$ZM/N\le1$。设 M_O 为序列数目的理论最大值，则 $M_O=\lfloor N/Z\rfloor$，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示下取整数。如果序列集中序列数目 $M=M_O$，称序列集为最优 ZCZ 序列集。如果 $M=M_O-1$ 或者 $M=M_O-2$，称序列集为几乎最优 ZCZ 序列集。

定义 5 设 $\boldsymbol{Z}_v$ 是一个阶为 v 的 Abel 群，$\boldsymbol{Z}_v=\{0,1,\cdots,v-1\}$，其运算为加法。设 $\boldsymbol{D}=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 是 $\boldsymbol{Z}_v$ 的一个 k 元子集，λ 为给定正整数，若对于 $\boldsymbol{Z}_v$ 中任意一非零元 g，都有 λ 个序对 (d_i,d_j)，$d_i,d_j\in\boldsymbol{D}$，使 $g=d_i-d_j$，则称 $\boldsymbol{D}$ 为 Abel 群 $\boldsymbol{Z}_v$ 的一个 (v,k,λ) 差集。差集的阶数定义为 $n=k-\lambda$，对于 (v,k,λ) 差集有 $k(k-1)=(v-1)\lambda$ 成立。

引理 1 设 $\boldsymbol{D}_0=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 是一个 (v,k,λ) 差集，令 $e\in\boldsymbol{Z}_v$，定义集合 $\boldsymbol{D}_e=\boldsymbol{D}_0+e=\{d_1+e,d_2+e,\cdots,d_k+e\}$，其中加法为模 v 运算，则 $\boldsymbol{D}_e$ 是一个 (v,k,λ) 差集。定义 $\overline{\boldsymbol{D}}_e=\boldsymbol{Z}_v/\boldsymbol{D}_e$ 为差集 $\boldsymbol{D}_e$ 的互补差集，则 $\overline{\boldsymbol{D}}_e$ 为 $(v,v-k,v-2k+\lambda)$ 差集。对于 $e_1\ne e_2$，有：$\left|\boldsymbol{D}_{e_1}\cap\boldsymbol{D}_{e_2}\right|=\lambda$，$\left|\boldsymbol{D}_{e_1}\cap\overline{\boldsymbol{D}}_{e_2}\right|=k-\lambda$，$\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{e_1}\cap\overline{\boldsymbol{D}}_{e_2}\right|=v-2k+\lambda$。

3 ZCZ 高斯整数序列集的直接构造法

步骤 1 令 $\boldsymbol{Z}_v$ 表示整数集合 $\{0,1,\cdots,v-1\}$。取一个 (v,k,λ) 差集，$\boldsymbol{D}_0=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$。

步骤 2 令 $N=v$，构造移位序列集合 $\boldsymbol{E}=\left\{\boldsymbol{e}^0,\boldsymbol{e}^1,\cdots,\boldsymbol{e}^{M-1}\right\}$，$\boldsymbol{e}^i=\left(e_0^i,e_1^i\right)$，其中，$e_0^i,e_1^i\in\{0,1,\cdots,N-1\}$。对于移位序列 $\boldsymbol{e}^i=\left(e_0^i,e_1^i\right)$ 和 $\boldsymbol{e}^j=\left(e_0^j,e_1^j\right)$，定义 4 个参数 $r_0^{i,j}=e_0^i-e_0^j$，$r_1^{i,j}=e_1^i-e_1^j$，$r_2^{i,j}=e_0^i-e_1^j$ 和 $r_3^{i,j}=e_1^i-e_0^j-1$，都是模 N 运算。

步骤 3 令 $\alpha=\alpha_0+\alpha_1j$，$\beta=\beta_0+\beta_1j$ 为两个高斯整数。构造两个序列集合 $\boldsymbol{S}^1=\left\{\boldsymbol{S}_0^1,\boldsymbol{S}_1^1,\cdots,\boldsymbol{S}_{M-1}^1\right\}$，$\boldsymbol{S}^2=\left\{\boldsymbol{S}_0^2,\boldsymbol{S}_1^2,\cdots,\boldsymbol{S}_{M-1}^2\right\}$，其中每个序列长度为 $2N$，$\boldsymbol{S}_m^q=\left(s_m^q(0),s_m^q(1),\cdots,s_m^q(2N-1)\right)$，$q\in\{1,2\}$。令 $t=2t_2+t_1$，$t_1\in\{0,1\}$，$t_2\in\boldsymbol{Z}_v$，记为 $t=(t_1,t_2)$。具体由式(2)、式(3)得到。

$$s_m^1(t)=\begin{cases}\alpha, & t_1\in\{0\}\cap t_2\in\boldsymbol{D}_{-e_0^m}\\ \alpha, & t_1\in\{1\}\cap t_2\in\boldsymbol{D}_{-e_1^m}\\ \beta, & t_1\in\{0\}\cap t_2\in\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^m}\\ \beta, & t_1\in\{1\}\cap t_2\in\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^m}\end{cases} \tag{2}$$

$$s_m^2(t)=\begin{cases}\alpha, & t_1\in\{0\}\cap t_2\in\boldsymbol{D}_{-e_0^m}\\ -\alpha, & t_1\in\{1\}\cap t_2\in\boldsymbol{D}_{-e_1^m}\\ \beta, & t_1\in\{0\}\cap t_2\in\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^m}\\ -\beta, & t_1\in\{1\}\cap t_2\in\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^m}\end{cases} \tag{3}$$

定理 1 如果赋值两个高斯整数 $\alpha=\alpha_0+\alpha_1j$，$\beta=\beta_0+\beta_1j$ 满足

$$(v-2k+\lambda)|\beta|^2+\lambda\cdot|\alpha|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)=0 \tag{4}$$

式中，$\mathrm{Re}(\bullet)$ 表示取复数的实部。并且对于任意移位序列 $\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j\in\boldsymbol{E}$ 满足如下两个条件：

(1) $\min\limits_{e_i\ne e_j\in E}\left\{r_0^{i,j},r_1^{i,j}\right\}\ge\dfrac{L}{2}$，$\min\limits_{e_i,e_j\in E}\left\{r_2^{i,j},r_3^{i,j}\right\}\ge\dfrac{L-1}{2}$。

(2) $\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j\in\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{e}^i\ne\boldsymbol{e}^j$ 时，有 $r_0^{i,j}\ne r_1^{i,j}$ 且 $r_2^{i,j}\ne r_3^{i,j}$。

其中，L 为正整数，$2<L<N$。则序列集合 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}^1\cup\boldsymbol{S}^2$ 是一个零相关区高斯整数序列集，参数为 $(2N,M,L)$-ZCZ。

证明 分下面情况讨论：

情况 1 $\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1\in\boldsymbol{S}^1$，对应的移位序列分别为 $\boldsymbol{e}^{m_1}=\left(e_0^{m_1},e_1^{m_1}\right)$ 和 $\boldsymbol{e}^{m_2}=\left(e_0^{m_2},e_1^{m_2}\right)$。令 $\tau=2\tau_2+\tau_1$，$\tau_1\in\{0,1\}$，$\tau_2\in\boldsymbol{Z}_v$，记为 $\tau=(\tau_1,\tau_2)$。计算 $\boldsymbol{S}_{m_1}^1$ 与 $\boldsymbol{S}_{m_2}^1$ 的互相关函数如下：

$$
\begin{aligned}
&R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)\\
&=|\alpha|^2\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\alpha|^2\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\{0\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\alpha|^2\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\alpha|^2\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\left|\{1\}\cap\{\tau_1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\{1\}\cap\{\tau_1+1\}\right|\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right| \quad (5)
\end{aligned}
$$

式中， $x=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+(-\alpha_0\beta_1+\alpha_1\beta_0)j,\ y=\alpha_0\beta_0+\alpha_1\beta_1+(\alpha_0\beta_1-\alpha_1\beta_0)j$。

当$\tau_1=0$时，

$$
\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)&=|\alpha|^2\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\alpha|^2\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right| \quad (6)
\end{aligned}
$$

如果此时$\tau_2=\left(e_0^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$或者$\tau_2=\left(e_1^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$，根据引理 1，有：$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=k|\alpha|^2+(v-k)\cdot|\beta|^2$。当$\tau_2$取满足$0\le\tau_2\le N-1$的其他值时有，$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=(v-2k+\lambda)|\beta|^2+\lambda\cdot|\alpha|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。

当$\tau_1=1$时，

$$
\begin{aligned}
R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)&=|\alpha|^2\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\alpha|^2\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+x\cdot\left|\boldsymbol{D}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+y\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\boldsymbol{D}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right|\\
&\quad+|\beta|^2\cdot\left|\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_1^{m_1}}\cap\left(\overline{\boldsymbol{D}}_{-e_0^{m_2}}+\tau_2\right)\right| \quad (7)
\end{aligned}
$$

若$\tau_2=\left(e_1^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$或者$\tau_2=\left(e_0^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$，根据引理 1，有$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=k|\alpha|^2+(v-k)\cdot|\beta|^2$成立。当$\tau_2$取满足$0\le\tau_2\le N-1$的其他值时，有：$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=(v-2k+\lambda)|\beta|^2+\lambda\cdot|\alpha|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。

情况 2　$\boldsymbol{S}_{m_1}^2,\boldsymbol{S}_{m_2}^2\in\boldsymbol{S}^2$，对应的移位序列分别为$\boldsymbol{e}^{m_1}=\left(e_0^{m_1},e_1^{m_1}\right)$和$\boldsymbol{e}^{m_2}=\left(e_0^{m_2},e_1^{m_2}\right)$。令$\tau=2\tau_2+\tau_1$，$\tau_1\in\{0,1\}$，$\tau_2\in\boldsymbol{Z}_v$。同情况 1 类似，可以证明$\tau=\left(0,e_0^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$, $\tau=\left(0,e_1^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$, $\tau=\left(1,e_1^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$或者$\tau=\left(1,e_0^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$时，有$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=k|\alpha|^2+(v-k)\cdot|\beta|^2$。当$\tau$取其他值时有$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^1}(\tau)=(v-2k+\lambda)|\beta|^2+\lambda\cdot|\alpha|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。

情况 3　$\boldsymbol{S}_{m_1}^1\in\boldsymbol{S}^1$, $\boldsymbol{S}_{m_2}^2\in\boldsymbol{S}^2$，对应的移位序列分别为$\boldsymbol{e}^{m_1}=\left(e_0^{m_1},e_1^{m_1}\right)$和$\boldsymbol{e}^{m_2}=\left(e_0^{m_2},e_1^{m_2}\right)$。与情况 1 类似，可以证明当$\tau=\left(0,e_0^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$或者$\tau=\left(1,e_0^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$时，$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^2}(\tau)=k|\alpha|^2+(v-2k+\lambda)\cdot|\beta|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。当$\tau=\left(1,e_1^{m_2}-e_0^{m_1}\right)$或$\tau=\left(0,e_1^{m_2}-e_1^{m_1}\right)$时，有$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^2}(\tau)=(\lambda-k)\cdot|\alpha|^2+(\lambda-k)\cdot|\beta|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。当$\tau$取其他值时有　$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^1,\boldsymbol{S}_{m_2}^2}(\tau)=(v-2k+\lambda)|\beta|^2+\lambda\cdot|\alpha|^2+2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$。

设$p,q\in\{1,2\}$，综合几种情况可得

$$
R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^p,\boldsymbol{S}_{m_2}^q}(\tau)=\begin{cases}X_1, & p=q,\ \tau\in\left\{\left(0,r_0^{m_1,m_2}\right),\right.\\ & \left.\left(0,r_1^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_2^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_3^{m_1,m_2}\right)\right\}\\ X_2, & p\ne q,\ \tau\in\left\{\left(0,r_0^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_3^{m_1,m_2}\right)\right\}\\ X_3, & p\ne q,\ \tau\in\left\{\left(0,r_1^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_2^{m_1,m_2}\right)\right\}\\ X_4, & \text{其他}\end{cases} \quad (8)
$$

式中，

$X_1 = k|\alpha|^2 + (v-k)\cdot|\beta|^2$

$X_2 = k|\alpha|^2 + (v-2k+\lambda)\cdot|\beta|^2 + 2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$

$X_3 = (\lambda-k)\cdot|\alpha|^2 + (\lambda-k)\cdot|\beta|^2 + 2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$

$X_4 = (v-2k+\lambda)|\beta|^2 + \lambda\cdot|\alpha|^2 + 2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right)$

由于α，β满足$(v-2k+\lambda)|\beta|^2 + \lambda\cdot|\alpha|^2 + 2(k-\lambda)\cdot\mathrm{Re}\left(\alpha\cdot\beta^*\right) = 0$，可知$X_4 = 0$，$X_t \neq 0$，$t\in\{1,2,3\}$。由$\min\limits_{e_i\neq e_j\in E}\left\{r_0^{i,j}, r_1^{i,j}\right\} \geq \dfrac{L}{2}$，$\min\limits_{e_i,e_j\in E}\left\{r_2^{i,j}, r_3^{i,j}\right\} \geq \dfrac{L-1}{2}$可知，当$p=q$，$m_1=m_2$，$0<\tau\leq L-1$时或者当$p=q$，$m_1\neq m_2$, $0\leq\tau\leq L-1$，有$\tau\notin\left\{\left(0,r_0^{m_1,m_2}\right),\left(0,r_1^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_2^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_3^{m_1,m_2}\right)\right\}$，此时可得$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^p,\boldsymbol{S}_{m_2}^q}(\tau) = X_4 = 0$。同理当$p\neq q$, $0\leq\tau\leq L-1$时，有$\tau\notin\left\{\left(0,r_0^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_3^{m_1,m_2}\right),\left(0,r_1^{m_1,m_2}\right),\left(1,r_2^{m_1,m_2}\right)\right\}$，同样有$R_{\boldsymbol{S}_{m_1}^p,\boldsymbol{S}_{m_2}^q}(\tau) = X_4 = 0$成立。 证毕

定理1将文献[17]的构造方法进行推广，利用任意参数的差集构造了零相关区高斯整数序列集。该方法基于满足定理1条件的移位序列和满足式(6)的高斯整数取值。文献[13-15]分别给出了几类用于交织法的移位序列构造方法，这些移位序列满足本文构造法1的两个条件。基于已有的移位序列[13-15]，本文方法可以利用不同参数的差集构造不同参数的零相关区高斯整数序列集。Hadamard 差集是一类参数为$(v,k,\lambda) = (4n-1, 2n-1, n-1)$的差集，该类差集与二元二值自相关序列一一对应，如 m 序列、GMW 序列等对应着一类$(2^n-1, 2^{n-1}, 2^{n-2})$差集。Hadamard 差集目前已经取得丰富成果。所有的 Hadamard 差集根据v可分为 3 类：(1) $v = 2^n-1$，$n\geq 2$；(2) $v = 4n-1$，v是素数；(3) $v = p(p+2)$，p与$p+2$为孪生素数。利用不同差集可得到不同参数的 ZCZ 高斯整数序列集，如表1所示。

表1中，L为正整数，$2<L<v$，表示设定的零相关区长度。M表示序列集合中序列数目。根据移位序列构造方法[13,14]，当L为偶数，取$M = \lfloor(v-2)/L\rfloor$。当$L$为奇数时，取$M = \lfloor(N-1)/L\rfloor$。文献[17]基于长度为$v = 2^n-1$的二元伪随机序列构造了 ZCZ 整数序列集合，其参数限制为$\left(2^{n+1}-2, M, L\right)$-ZCZ。本文方法包含了文献[17]的结果，并且得到了一些其他参数的ZCZ序列集。下面给出一个实例。

例 1 取一个$(7,3,1)$差集，$\boldsymbol{D} = \{1,2,4\}$，取两个高斯整数$\alpha = 5+j$, $\beta = -2+j$满足定理1条件。设定零相关区长度$L=3$，可得$M=2$，根据文献[14]的移位序列构造法移位序列集$\{(0,2);(3,6)\}$。根据构造法 1 得到零相关区高斯整数序列集$(14,4,3)$-ZCZ 如下：

$$S_0^1 = (-2+j, 5+j, 5+j, -2+j, 5+j, 5+j, -2+j, -2+j, 5+j, -2+j, -2+j, -2+j, -2+j, 5+j)$$

$$S_1^1 = (-2+j, -2+j, 5+j, -2+j, -2+j, 5+j, -2+j, 5+j, -2+j, -2+j, 5+j, 5+j, 5+j, -2+j)$$

$$S_0^2 = (-2+j, -5-j, 5+j, 2-j, 5+j, -5-j, -2+j, 2-j, 5+j, 2-j, -2+j, 2-j, -2+j, -5-j)$$

$$S_1^2 = (-2+j, 2-j, 5+j, 2-j, -2+j, -5-j, -2+j, -5-j, -2+j, 2-j, 5+j, -5-j, 5+j, 2-j)$$

设M_O表示序列集中序列数目的理论上界，有$M_O = \lfloor 14/3\rfloor = 4$，序列数目达到理论最大值。

4 结束语

本文提出了一类零相关区高斯整数序列集的直接构造法。基于差集，首先利用移位序列得到序列的特征集，进而通过高斯整数赋值构造了具有最优或几乎最优的零相关区高斯整数序列集。目前来看，差集的研究已经取得非常丰富的成果。因此，基于这些差集，利用本文方法可以构造更多具有优良参数的零相关区高斯整数序列集。

表 1 基于差集的 ZCZ 高斯整数序列集参数

差集参数(v,k,λ)	ZCZ 序列集参数
第 1 类，$v = 2^n-1$, $n\geq 2$	$\left(2^{n+1}-2, M, L\right)$-ZCZ
第 2 类，$v = 4n-1$, v是素数	$(8n-2, M, L)$-ZCZ
第 3 类，$v = p(p+2)$, p与$p+2$为孪生素数	$(2p(p+2), M, L)$-ZCZ

参 考 文 献

[1] WANG Senhung and LI Chihpeng. Novel MC-CDMA system using Fourier duals of sparse perfect Gaussian integer sequences[C]. 2016 IEEE International Conference on

Communications, Kuala Lumpur, Malaysia, 2016: 1–6. doi: 10.1109/ICC.2016.7511167.

[2] FAN Pingzhi and DARNELL M. Maximual length sequences over Gaussian integers[J]. *Electronics Letters*, 1994, 30(16): 1286–1287. doi: 10.1049/el:19940913.

[3] HU Weiwen, WANG Senhung, and LI Chihpeng. Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 6074–6079. doi: 10.1109/TSP.2012.2210550.

[4] CHEN Xinjiao, LI Chunlei, and RONG Chunming. Perfect Gaussian integer sequences from cyclic difference sets[C]. 2016 IEEE International Symposium on Information Theory, Barcelona, Spain, July 2016: 115–119. doi: 10.1109/ISIT. 2016.7541272.

[5] LEE Chongdao, LI Chihpeng, CHANG Hohsuan, *et al.* Further results on degree-2 perfect Gaussian integer sequences[J]. *IET Communications*, 2016, 10(12): 1542–1552. doi: 10.1049/iet-com.2015.1144.

[6] YANG Yang, TANG Xiaohu, and ZHOU Zhengchun. Perfect Gaussian integer sequences of odd prime length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2012, 19(10): 615–618. doi: 10. 1109/LSP.2012.2209642.

[7] LEE Chongdao, HUANG Yupei, CHANG Yaotsu, *et al.* Perfect Gaussian integer sequences of odd period 2^m–1[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(7): 881–885. doi: 10.1109/LSP.2014.2375313.

[8] PEI Soochang and CHANG Kuowei. Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary length[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015, 22(8): 1040–1044. doi: 10.1109/LSP.2014. 2381642.

[9] CHANG Hohsuan, LI Chihpeng, LEE Chongdao, *et al.* Perfect Gaussian integer sequences of arbitrary composite length[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2015, 61(7): 4107–4115. doi: 10.1109/TIT.2015.2438828.

[10] 陈晓玉, 许成谦, 李玉博. 新的完备高斯整数序列的构造方法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

CHEN Xiaoyu, XU Chengqian, and LI Yubo. New constructions of perfect Gaussian integer sequences[J] *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(9): 2081–2085. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01697.

[11] WANG Senhung, LI Chihpeng, CHANG Hohsuan, *et al.* A systematic method for constructing sparse Gaussian integer sequences with ideal periodic autocorrelation functions[J]. *IEEE Transactions on Communications*, 2016, 64(1): 365–376. doi: 10.1109/TCOMM.2015.2498185.

[12] PENG Xiuping and XU Chengqian. New constructions of perfect Gaussian integer sequences of even length[J]. *IEEE Communications Letters*, 2014, 18(9): 1547–1550. doi: 10. 1109/LCOMM.2014.2336840.

[13] ZHOU Zhengchun and TANG Xiaohu. A new class of sequences with zero or low correlation zone based on interleaving technique[J]. *IEEE Transactions on Information Theory,* 2008, 54(9): 4267–4273. doi: 10.1109/TIT.2008. 928256.

[14] 李玉博, 许成谦. 交织法构造移位不等价的ZCZ/LCZ序列集[J]. 电子学报, 2011, 39(4): 796–802.

LI Yubo and XU Chengqian. Construction of cyclically distinct ZCZ/LCZ sequence sets based on interleaving technique[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2011, 39(4): 796–802.

[15] 刘凯, 姜昆, 交织法构造高斯整数零相关区序列集[J]. 电子与信息学报, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

LIU Kai and JIANG Kun. Construction of Gaussian integer sequence sets with zero correlation zone based on interleaving technique[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2017, 39(2): 328–334. doi: 10.11999/JEIT160276.

[16] CHEN Xiaoyu, KONG Deming, XU Chengqian, *et al.* Constructions of Gaussian integer sequences with zero corelation zone[J]. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, 2016, E99-A(6): 1260–1263. doi: 10.1587/transfun.E99.A.1260.

[17] LI Yubo and XU Chengqian. A new construction of zero correlation zone Gaussian integer sequence sets[J]. *IEEE Communications Letters*, 2016. 20(12): 2418–2421. doi: 10. 1109/LCOMM.2016.2609383.

[18] TANG Xiaohu, FAN Pingzhi, and MATSUFUJI Shinya. Lower bounds on correlation of spreading sequence set with low or zero correlation zone[J]. *Electronics Letters*, 2000, 36(6): 551–552. doi: 10.1049/el:20000462.

刘　涛：　女，1987 年生，博士生，研究方向为序列设计.

许成谦：　男，1961 年生，教授，博士生导师，研究方向为编码理论、密码学、信号设计.

李玉博：　男，1985 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为序列设计、编码理论.