一种基于旋转测量的阵列幅相误差校正新方法

程　丰*①②　　龚子平②　　张　驰②　　万显荣②
①(电子信息系统复杂电磁环境效应国家重点实验室　洛阳　471003)
②(武汉大学电子信息学院　武汉　430072)

摘　要：校正源信号方向角不容易精确测量，限制了阵列有源校正方法的精度。另一方面，无源校正方法难以应用于存在大阵列误差的场合，其实际应用也受到严重限制。该文提出一种基于旋转测量的阵列幅相误差校正新方法，无需测量校正源信号方向角就能获得较高的校正精度。该方法利用已知的阵列旋转角度，基于最大似然准则获得阵列幅相误差、校正源信号方向角及其复振幅的无模糊估计。相对于校正源信号方向角，阵列旋转角度通过专用测试转台更容易精确测量，因此该方法能以较小的代价获得很高的校正精度。仿真实验验证了该方法的有效性和通用性。

关键词：阵列校正；幅相误差；校正精度；旋转测量；测试转台
中图分类号：TN911.7　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1009-5896(2017)08-1899-07
DOI: 10.11999/JEIT161058

A New Rotation Measurement-based Method for Array Gain-phase Errors Calibration

CHENG Feng①②　　GONG Ziping②　　ZHANG Chi②　　WAN Xianrong②
①(*The State Key Laboratory of Complex Electromagnetic Environment Effects on Electronics and Information System*, *Luoyang* 471003, *China*)
②(*School of Electronic Information*, *Wuhan University*, *Wuhan* 430072, *China*)

Abstract: It is not easy to accurately measure the direction angles of calibration-source signals, which limits the precision of array active-calibration methods. On the other hand, passive-calibration methods are difficult to apply to the presence of large array errors, which severely limits their practical applications. This paper proposes a rotation measurement-based method to calibrate array gain-phase errors, which can achieve high calibration precision without measuring the direction angles of calibration-source signals. Using the known array-rotation angles, the maximum likelihood-based method is able to simultaneously estimate the array gain-phase errors, direction angles and complex amplitudes of calibration-source signals without ambiguity. Compared with accurately measuring the direction angles of calibration-source signals, accurately measuring the array-rotation angles is much easier to be accomplished with a special test turntable, thus the proposed method can achieve quite high calibration precision at a low cost. Some simulation tests demonstrate the effectiveness and generality of the proposed method.

Key words: Array calibration; Gain-phase errors; Calibration precision; Rotation measurement; Test turntable

1　引言

阵列信号处理[1]是现代信号处理的一个重要分支，广泛应用于雷达、声呐、通信、导航、地震勘探、射电天文和医学成像等众多领域。真实的阵列流形往往会随着气候、环境、位置以及器件本身等因素的变化而出现一定程度的偏差或扰动(称之为阵列误差)，此时阵列信号处理的性能会严重恶化[2−5]。因此，阵列误差校正问题[6−9]一直是阵列信号处理技术走向实用化的瓶颈，成为近年来的一个研究热点。

早期的阵列校正是通过对阵列流形直接进行离散测量、内插、存储来实现的[6]，但这些方法实现起来代价较大且效果也不太理想。因此，20 世纪 90 年代以后，研究者逐渐将阵列校正转化为一个参数估计问题。参数化阵列校正方法通常可分为有源校正[10−14]和无源校正[15−19]两大类。有源校正是通过设

收稿日期：2016-10-12；改回日期：2017-04-24；网络出版：2017-05-18
*通信作者：程丰　cwing@whu.edu.cn
基金项目：CEMEE 国家重点实验室主任基金(CEMEE2014Z0101B)，国家自然科学基金(U1333106, 61331012, 61371197)，国家重点研发计划(2016YFB0502403)
Foundation Items: The Director Foundation of The State Key Laboratory of CEMEE (CEMEE2014Z0101B), The National Natural Science Foundation of China (U1333106, 61331012, 61371197), The National Key R&D Plan (2016YFB0502403)

置方向角精确已知的辅助信号源对阵列误差参数进行测量或估计，其优点是计算复杂度低且具有较大的校正范围。有源校正方法在实际应用中代价较大，其校正精度在一定程度上取决于信号源方向角的测量精度。

无源校正(自校正)不需要方向角精确已知的辅助信号源，可对信号源方向角和阵列误差进行联合估计。无源校正方法代价小，具有较大的应用潜力，但其研究难度远高于有源校正。现有的无源校正方法难以应用于存在大阵列误差的场合[7,17]，这是因为：当参数估计的初始值偏离真值较远时，无法保证参数辨识的唯一性[20,21]和优化算法的全局收敛性，且具有较高的计算复杂度。

针对现有阵列校正方法的局限性，本文提出了一种基于旋转测量的阵列幅相误差校正新方法。该方法利用已知的阵列旋转角度，基于最大似然准则获得了阵列幅相误差、校正源信号方向角及其复振幅的无模糊估计。与现有的有源阵列校正方法相比，该方法无需测量校正源信号方向角，既降低了应用代价和限制，又避免了因信号方向角测量不准引入的校正误差；与现有的无源阵列校正方法相比，该方法充分利用了阵列旋转角度这一先验信息，有效避免了参数辨识模糊、优化全局收敛和计算复杂度等棘手问题。

2 信号模型

考虑一个由 M 个传感器构成的平面阵列，其中阵元 $m(m=1,2,\cdots,M)$的位置坐标为(x_m,y_m)，设置阵元 1 为直角坐标系原点，即有$(x_1,y_1)=(0,0)$。假设一个与该平面阵列共面的远场窄带信号 $s(t)$ 入射到阵列，方向角为θ，则阵列接收信号的输出可以写成

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{a}(\theta)s(t)+\boldsymbol{n}(t) \tag{1}$$

其中，$\mathrm{diag}(\cdot)$表示对角矩阵，$\boldsymbol{\delta}\triangleq[\delta_1\ \delta_2\ \cdots\ \delta_M]^{\mathrm{T}}$是阵列幅相误差向量，$\delta_m=g_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_m}$，$g_m$ 和 φ_m 分别为阵元 m 的幅度误差和相位误差。阵元 1 为阵列校正参考阵元，满足约束条件$\delta_1=1$。$\boldsymbol{a}(\theta)$为理想阵列导向矢量，定义为

$$\boldsymbol{a}(\theta)\triangleq\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d_1(\theta)/\lambda}\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d_2(\theta)/\lambda}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d_M(\theta)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

其中，λ为入射信号的中心波长，$d_m(\theta)$是沿着θ方向从阵元 1 到阵元 m 的波程差。

$$d_m(\theta)\triangleq x_m\sin\theta+y_m\cos\theta \tag{3}$$

$\boldsymbol{n}(t)$假设为空间上不相关的循环对称零均值高斯白噪声，满足式(4)条件：

$$\left.\begin{aligned}&E\left\{\boldsymbol{n}(t)\boldsymbol{n}^{\mathrm{H}}(t)\right\}=\sigma_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{I}_M\\&E\left\{\mathrm{Re}[\boldsymbol{n}(t)]\mathrm{Re}[\boldsymbol{n}(t)]^{\mathrm{T}}\right\}=E\left\{\mathrm{Im}[\boldsymbol{n}(t)]\mathrm{Im}[\boldsymbol{n}(t)]^{\mathrm{T}}\right\}\\&\qquad=\sigma_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{I}_M/2\\&E\left\{\mathrm{Re}[\boldsymbol{n}(t)]\mathrm{Im}[\boldsymbol{n}(t)]^{\mathrm{T}}\right\}=\boldsymbol{0}_{M\times M}\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中，$E\{\cdot\}$表示总体均值(数学期望)，$\boldsymbol{I}_M$ 和 $\boldsymbol{0}_{M\times M}$ 分别表示单位矩阵和零矩阵。

如图 1 所示，将阵列(及其直角坐标系)一起旋转 $N-1$ 次，校正源信号分 N 次入射到阵列，可表示为$\{s_n(t)\}_{n=1}^N$，对应的方向角为$\{\theta_n\}_{n=1}^N$，则根据式(1)可知其对应的阵列输出分别为

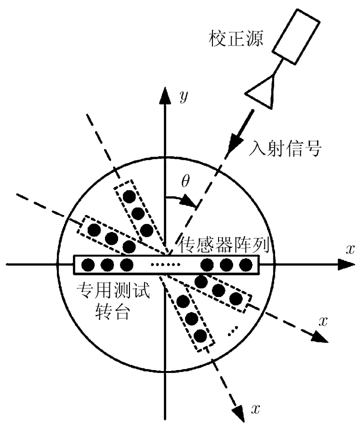

图 1 基于专用测试转台的阵列校正

$$\boldsymbol{x}_n(t)=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{a}(\theta_n)s_n(t)+\boldsymbol{n}_n(t) \tag{5}$$

其中，$\{\boldsymbol{n}_n(t)\}_{n=1}^N$ 为 N 个互不相关的噪声向量，即不但要满足式(4)，还要满足

$$E\left\{\boldsymbol{n}_{n_1}(t)\boldsymbol{n}_{n_2}^{\mathrm{H}}(t)\right\}=\begin{cases}\sigma_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{I}_M, & n_1=n_2\\ \boldsymbol{0}_{M\times M}, & n_1\neq n_2\end{cases} \tag{6}$$

利用$\boldsymbol{x}_n(t)$的 K 个快拍数据估计θ_n方向的实际阵列导向矢量(含阵列误差)，即

$$\hat{\boldsymbol{a}}_n\triangleq\hat{\boldsymbol{a}}(\theta_n,\boldsymbol{\delta})=\frac{1}{K}\sum_{t=1}^K\boldsymbol{x}_n(t)=s_n\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{a}(\theta_n)+\boldsymbol{n}_n \tag{7}$$

其中，$s_n=\dfrac{1}{K}\sum_{t=1}^K s_n(t)$, $\boldsymbol{n}_n=\dfrac{1}{K}\sum_{t=1}^K\boldsymbol{n}_n(t)$。显然$\boldsymbol{n}_n$为循环对称零均值高斯随机向量，方差为$\sigma^2=\sigma_{\mathrm{n}}^2/K$。

另一种估计实际阵列导向矢量的方法是对阵列协方差矩阵$\boldsymbol{R}(n)$进行特征分解，$\boldsymbol{R}(n)$可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}(n)&=E\left\{\boldsymbol{x}_n(t)\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{H}}(t)\right\}\\&=\sigma_s^2\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{a}(\theta_n)\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(\theta_n)\mathrm{diag}\left(\overline{\boldsymbol{\delta}}\right)+\sigma_{\mathrm{n}}^2\boldsymbol{I}_M\end{aligned} \tag{8}$$

其中，$\sigma_s^2 = E\left\{\left|s_n(t)\right|^2\right\}$ 为校正源信号平均功率。对 $\boldsymbol{R}(n)$ 进行特征分解有

$$\operatorname{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{a}(\theta_n) = \eta \boldsymbol{e}_{\max}^n \tag{9}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{\max}^n$ 为 $\boldsymbol{R}(n)$ 最大特征值对应的特征矢量，η 为一未知的复常量。由式(9)可知，$\boldsymbol{e}_{\max}^n$ 实际上就对应于 θ_n 方向的阵列导向矢量(含阵列误差)。实际中 $\boldsymbol{R}(n)$ 只能由有限次快拍数据来估计，即

$$\widehat{\boldsymbol{R}}(n) = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K}\boldsymbol{x}_n(t)\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{H}}(t) \tag{10}$$

对 $\widehat{\boldsymbol{R}}(n)$ 进行特征分解，其最大特征值对应的特征向量为 $\hat{\boldsymbol{e}}_{\max}^n$，因此 θ_n 方向实际阵列导向矢量可由式(11)估计。

$$\hat{\boldsymbol{a}}_n \triangleq \hat{\boldsymbol{a}}(\theta_n, \boldsymbol{\delta}) = \hat{\boldsymbol{e}}_{\max}^n \tag{11}$$

假设 θ_1 未知，而 $\{\theta_n\}_{n=1}^N$ 与 θ_1 的夹角(相当于图 1 中阵列旋转角度)已知，可表示为 $\{\Delta_n\}_{n=1}^N$，则有

$$\theta_n = \theta_1 + \Delta_n \tag{12}$$

根据式(12)显然有 $\Delta_1 \equiv 0$。定义 $\boldsymbol{A}(\theta_1) \triangleq \left[\boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_1)\quad \boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_2)\quad \cdots\quad \boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_N)\right] = \left[\boldsymbol{a}(\theta_1)\ \boldsymbol{a}(\theta_2)\cdots\boldsymbol{a}(\theta_N)\right]$，$\widehat{\boldsymbol{A}} \triangleq [\hat{\boldsymbol{a}}_1\ \hat{\boldsymbol{a}}_2\ \cdots\ \hat{\boldsymbol{a}}_N]$，$\boldsymbol{N} \triangleq [\boldsymbol{n}_1\ \boldsymbol{n}_2\ \cdots\ \boldsymbol{n}_N]$，$\boldsymbol{s} \triangleq [s_1\ s_2\ \cdots\ s_N]^{\mathrm{T}}$，则根据式(7)可以得到

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{A}(\theta_1)\operatorname{diag}(\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{N} \tag{13}$$

3　参数估计

综合式(7)、式(13)和相关假设可得到 $\widehat{\boldsymbol{A}}$ 的条件概率密度函数为

$$\begin{aligned} & p\left(\widehat{\boldsymbol{A}} \mid \theta_1, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{s}\right) \\ &= \left(\pi\sigma^2\right)^{-MN}\exp\left\{-\left\|\widehat{\boldsymbol{A}} - \operatorname{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{A}(\theta_1)\operatorname{diag}(\boldsymbol{s})\right\|^2 \Big/ \sigma^2\right\} \\ &= \left(\pi\sigma^2\right)^{-MN}\exp\left\{-\left\|\widetilde{\boldsymbol{A}} - \widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta_1,\boldsymbol{s})\boldsymbol{\delta}\right\|^2 \Big/ \sigma^2\right\} \\ &= \left(\pi\sigma^2\right)^{-MN}\exp\left\{-\left\|\widetilde{\boldsymbol{B}} - \widetilde{\boldsymbol{B}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{s}\right\|^2 \Big/ \sigma^2\right\} \end{aligned} \tag{14}$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示矩阵 2-范数，$\widetilde{\boldsymbol{A}} \triangleq \operatorname{vec}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}\right)$（$\operatorname{vec}(\cdot)$ 表示矩阵所有列串接构成的列向量)，而 $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta_1,\boldsymbol{s})$ 定义为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta_1,\boldsymbol{s}) \triangleq \begin{bmatrix} s_1\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_1)\right] \\ s_2\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_2)\right] \\ \vdots \\ s_N\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{a}(\theta_1+\Delta_N)\right] \end{bmatrix} \tag{15}$$

令 $\hat{\boldsymbol{b}}_m$ 为 $\widehat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$ 的第 m 列，$\boldsymbol{b}_m(\theta_1) \triangleq \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d_m(\theta_1+\Delta_1)/\lambda}\cdots \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi d_m(\theta_1+\Delta_N)/\lambda}\right]^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\theta_1)$ 的第 m 列，则定义

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} \triangleq \operatorname{vec}\left(\left[\hat{\boldsymbol{b}}_1\cdots\hat{\boldsymbol{b}}_M\right]\right) = \operatorname{vec}\left(\widehat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\right) \tag{16}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta}) \triangleq \begin{bmatrix} \delta_1\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{b}_1(\theta_1)\right] \\ \delta_2\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{b}_2(\theta_1)\right] \\ \vdots \\ \delta_M\operatorname{diag}\left[\boldsymbol{b}_M(\theta_1)\right] \end{bmatrix} \tag{17}$$

根据式(14)可得到 θ_1，$\boldsymbol{\delta}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的最大似然估计为

$$\begin{aligned} \left\{\hat{\theta}_1, \hat{\boldsymbol{\delta}}, \hat{\boldsymbol{s}}\right\} &= \arg\min_{\{\theta_1,\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{s}\}}\left\|\widetilde{\boldsymbol{A}} - \widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta_1,\boldsymbol{s})\boldsymbol{\delta}\right\|^2 \\ &= \arg\min_{\{\theta_1,\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{s}\}}\left\|\widetilde{\boldsymbol{B}} - \widetilde{\boldsymbol{B}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{s}\right\|^2 \end{aligned} \tag{18}$$

式(18)描述了一个参数可分离的非线性最小二乘问题[22]，对于给定的 θ_1 和 $\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{\delta}$ 的线性最小二乘估计为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\delta}} &= \left[\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{H}}(\theta_1,\boldsymbol{s})\widetilde{\boldsymbol{A}}(\theta_1,\boldsymbol{s})\right]^{-1}\widetilde{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{H}}(\theta_1,\boldsymbol{s})\widetilde{\boldsymbol{A}} \\ &= \left[\overline{\boldsymbol{A}(\theta_1)} \odot \widehat{\boldsymbol{A}}\right]\bar{\boldsymbol{s}} \Big/ \|\boldsymbol{s}\|^2 \end{aligned} \tag{19}$$

其中，$\odot$ 表示矩阵之间的 Schur-Hadamard 积[23]。对于给定的 θ_1 和 $\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{s}$ 的线性最小二乘估计为

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{s}} &= \left[\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{H}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta})\widetilde{\boldsymbol{B}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta})\right]^{-1}\widetilde{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{H}}(\theta_1,\boldsymbol{\delta})\widetilde{\boldsymbol{B}} \\ &= \left[\overline{\boldsymbol{A}(\theta_1)} \odot \widehat{\boldsymbol{A}}\right]^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\delta}} \Big/ \|\boldsymbol{\delta}\|^2 \end{aligned} \tag{20}$$

将式(19)代入式(18)可得

$$\left\{\hat{\theta}_1, \hat{\boldsymbol{s}}\right\} = \arg\min_{\{\theta_1,\boldsymbol{s}\}}\left\{-\left\|\left[\overline{\boldsymbol{A}(\theta_1)} \odot \widehat{\boldsymbol{A}}\right]\bar{\boldsymbol{s}}\right\|^2 \Big/ \|\boldsymbol{s}\|^2\right\} \tag{21}$$

若 $\boldsymbol{s}$ 已知则由式(21)可得 θ_1 的(非线性)最小二乘估计。

$$\hat{\theta}_1 = \arg\min_{\theta_1}\left\{-\left\|\left[\overline{\boldsymbol{A}(\theta_1)} \odot \widehat{\boldsymbol{A}}\right]\bar{\boldsymbol{s}}\right\|^2\right\} \tag{22}$$

用 $P_{\mathrm{c}}(\theta_1)$ 表示式(22)中的代价函数，则有

$$P_{\mathrm{c}}(\theta_1) \triangleq -\left\|\left[\overline{\boldsymbol{A}(\theta_1)} \odot \widehat{\boldsymbol{A}}\right]\bar{\boldsymbol{s}}\right\|^2 \tag{23}$$

4　计算方法

将位置坐标 $(x_1, y_1) = (0,0)$ 和约束条件 $\delta_1 = 1$ 代入式(13)，可得

$$\left[\widehat{\boldsymbol{A}}\right]_{1n} = s_n + [\boldsymbol{N}]_{1n},\ \ n = 1,2,\cdots,N \tag{24}$$

其中，$[\cdot]_{ik}$ 表示矩阵中位于第 i 行、第 k 列的元素。用 $\xrightarrow{\mathrm{P}}$ 表示依概率收敛，则由式(24)和 $\hat{\boldsymbol{b}}_1$ 的定义可知，当 $\sigma^2 \to 0$ 时，$\left[\widehat{\boldsymbol{A}}\right]_{1n} \xrightarrow{\mathrm{P}} s_n$，$\hat{\boldsymbol{b}}_1 \xrightarrow{\mathrm{P}} \boldsymbol{s}$。因此可将 $\hat{\boldsymbol{b}}_1$ 作为 $\boldsymbol{s}$ 的预估值，即有

$$\hat{\boldsymbol{s}} = \hat{\boldsymbol{b}}_1 \tag{25}$$

式(18)中的待估参数太多，如直接采用多维搜索进行优化将面临很高的计算复杂度。针对这一问题，本文提出了一种分维处理“交替优化”方法，可显著降低多维参数估计的计算复杂度，具体实现方式如下：

(1)通过式(25)实现 $\boldsymbol{s}$ 的初始化，初始估值用

$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$(此时迭代计数器$k=0$)表示；

(2)将$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$代入式(22)，通过1维搜索得到$\theta_1$的初始估值$\hat{\theta}_1^{(k)}$；

(3)将$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$和$\hat{\theta}_1^{(k)}$代入式(19)得到$\boldsymbol{\delta}$的估值$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$；

(4)将$\hat{\theta}_1^{(k)}$和$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$代入式(20)得到$\boldsymbol{s}$的新估值$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$；

(5)将$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$代入式(22)，并以$\hat{\theta}_1^{(k)}$为初始值通过式(22)得到一个新估值$\hat{\theta}_1^{(k+1)}$；

(6)若$\left|\hat{\theta}_1^{(k+1)}-\hat{\theta}_1^{(k)}\right|>\varepsilon$(一个非负阈值)，更新$k=k+1$并返回步骤(3)；

(7)若$\left|\hat{\theta}_1^{(k+1)}-\hat{\theta}_1^{(k)}\right|\le\varepsilon$，迭代停止，当前的$\hat{\theta}_1^{(k+1)}$，$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$和$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$即为最终估值。

相对于通过式(18)进行多维搜索优化，以上方法收敛速度快得多，主要因为：(1)该方法通过式(25)和步骤(1)~(3)实现了全部待估参数的初始化，大大缩小了参数估计多维优化的搜索空间，在降低计算复杂度的同时也保证了优化全局收敛性；(2)该方法的单次迭代只包括2次闭式求解(步骤(3)和步骤(4))和1次1维搜索(步骤(5))，相对于多维搜索的单次迭代计算量明显降低；(3)由于代价函数$P_{\rm c}(\theta_1)$连续且具有一阶和二阶导数，该方法步骤(5)中的1维搜索可采用收敛很快的牛顿法；(4)待估参数$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{s}$和θ_1的估值是交替更新的(步骤(3)~步骤(5))，且每一步骤的估值更新直接用到前一步骤的更新结果，信息更新频率更高。

5 精度分析

受到多种实际因素(坐标原点、参考方向、校正源位置的标定精度和角度测量仪器精度等)影响，校正源信号方向角测量精度不高(一般情况下测量误差＞±0.1°)，且测量过程复杂耗时。而阵列旋转角度可通过专用测试转台[24]进行测量(如图1所示)，其测量精度只取决于测试转台本身(一般情况下可达到0.001°)，测量过程简单快速。与有源校正方法相比，本文方法用高精度的阵列旋转角度测量代替低精度的信号方向角测量，显著降低了角度测量误差对实际校正精度的影响，保证了校正精度进一步提升的空间。

从第2节的信号模型可知，本文方法利用的是多个单立信号(即同一时间只有一个来波方向的信号)。文献[9]借鉴文献[10]的基本思路，发展出一种利用多个单立信号的阵列幅相误差有源校正方法，可直接与本文方法进行对比。除了将校正源信号方向角$\{\theta_n\}_{n=1}^N$由未知修改为已知，该有源校正方法采用了与本文方法相同的信号模型和基本假设。定义$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\triangleq[\boldsymbol{a}(\theta_1)\ \boldsymbol{a}(\theta_2)\ \cdots\ \boldsymbol{a}(\theta_N)]$，则根据式(7)可以得到

$$\hat{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{diag}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{N} \tag{26}$$

采用与第3节类似的推导思路，可得到$\boldsymbol{\delta}$和$\boldsymbol{s}$的最大似然估计。

$$\left\{\hat{\boldsymbol{\delta}},\hat{\boldsymbol{s}}\right\}=\arg\min_{\{\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{s}\}}\left\|\hat{\boldsymbol{A}}-\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{diag}(\boldsymbol{s})\right\|^2 \tag{27}$$

用$P_{\rm c}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{s})$表示式(27)中的代价函数，则有

$$P_{\rm c}(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{s})=\left\|\hat{\boldsymbol{A}}-\mathrm{diag}(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})\mathrm{diag}(\boldsymbol{s})\right\|^2 \tag{28}$$

经过推导可得，对于给定的$\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{\delta}$的线性最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}=\left[\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}\odot\hat{\boldsymbol{A}}\right]\bar{\boldsymbol{s}}\Big/\|\boldsymbol{s}\|^2 \tag{29}$$

对于给定的$\boldsymbol{\delta}$，$\boldsymbol{s}$的线性最小二乘估计为

$$\hat{\boldsymbol{s}}=\left[\overline{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\theta})}\odot\hat{\boldsymbol{A}}\right]^{\rm T}\bar{\boldsymbol{\delta}}\Big/\|\boldsymbol{\delta}\|^2 \tag{30}$$

采用与第4节类似的计算方法，令$\hat{\boldsymbol{b}}_1$为$\hat{\boldsymbol{A}}^{\rm T}$的第1列，可将$\hat{\boldsymbol{b}}_1$作为$\boldsymbol{s}$的预估值，即有

$$\hat{\boldsymbol{s}}=\hat{\boldsymbol{b}}_1 \tag{31}$$

同样采用分维处理“交替优化”方法，具体实现方式如下：

(1)通过式(31)实现$\boldsymbol{s}$的初始化，初始估值用$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$(此时迭代计数器$k=0$)表示；

(2)将$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$代入式(29)得到$\boldsymbol{\delta}$的初始估值$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$；

(3)$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$和$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}$代入式(28)得到代价函数值$P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}\right)$；

(4)将$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)}$代入式(30)得到$\boldsymbol{s}$的新估值$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$；

(5)将$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$代入式(29)得到$\boldsymbol{\delta}$的新估值$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)}$；

(6)$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)}$和$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$代入式(28)得到代价函数值$P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}\right)$；

(7)若$\left|P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}\right)-P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}\right)\right|>\varepsilon$(一个非负阈值)，更新$k=k+1$并返回步骤(4)；

(8)若$\left|P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}\right)-P_{\rm c}\left(\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k)},\hat{\boldsymbol{s}}^{(k)}\right)\right|\le\varepsilon$，迭代停止，当前的$\hat{\boldsymbol{\delta}}^{(k+1)}$和$\hat{\boldsymbol{s}}^{(k+1)}$即为最终估值。

6 仿真实验

通过仿真实验进一步比较本文方法与以上有源校正方法的性能。考虑实际测量精度的差异，将阵列旋转角度$\{\varDelta_n\}_{n=2}^N$和校正源信号方向角$\{\theta_n\}_{n=1}^N$的随机误差均设置为服从均值为0的正态分布，标准差分别为0.001°和0.1°。设N个校正源信号的振幅相等，即$|s_n|\equiv s(n=1,2,\cdots,N)$，信噪比定义为

$\mathrm{SNR} \triangleq s^2/\sigma^2$。均匀线阵相邻阵元间距为半波长 $\lambda/2$，均匀圆阵半径为波长 λ，阵元个数 M 均设为 8。阵列幅度误差 $\{g_m\}_{m=2}^{M}$ 和相位误差 $\{\varphi_m\}_{m=2}^{M}$ (根据约束条件 $\delta_1 = 1$ 可知 $g_1 = 1$，$\varphi_1 = 0$)分别由式(32)、式(33)生成。

$$g_m = 1 + 0.5\beta_m \tag{32}$$

$$\varphi_m = \gamma_m \pi \tag{33}$$

其中，$\{\beta_m\}_{m=2}^{M}$ 和 $\{\gamma_m\}_{m=2}^{M}$ 为相互独立的均匀分布随机变量(分布区间为 (–1,1])。定义 $\boldsymbol{g} \triangleq [g_2\ g_3\ \cdots\ g_M]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\varphi} \triangleq [\varphi_2\ \varphi_3\ \cdots\ \varphi_M]^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{g}$ 的分布区间为 (0.5, 1.5]，$\boldsymbol{\varphi}$ 的分布区间为 $(-\pi,\pi]$ (rad)，这是为了模拟存在大阵列误差的情况。$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 的估计精度可用平均均方根误差来衡量，分别定义为

$$\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{g}}) \triangleq \sqrt{E\left\{\|\hat{\boldsymbol{g}} - \boldsymbol{g}\|^2\right\}/(M-1)} \tag{34}$$

$$\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \triangleq \sqrt{E\left\{\|\hat{\boldsymbol{\varphi}} - \boldsymbol{\varphi}\|^2\right\}/(M-1)} \tag{35}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{g}}$，$\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 分别为 $\boldsymbol{g}$，$\boldsymbol{\varphi}$ 的估值。仿真实验中独立试验次数设为 200。

仿真试验 1　参数估计精度随信噪比(SNR)变化。设校正源信号个数 $N = 8$，信号方向角在 $-180°$ 到 $180°$ 间均匀分布，则 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{g}})$ 和 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ 随信噪比变化如图 2 所示。从图 2 可看出：参数估计精度随信噪比增加逐渐提高；与有源阵列校正方法相比，本文方法的阵列幅度误差估计精度非常接近，而阵列相位误差估计精度明显高于有源校正方法。

仿真试验 2　参数估计精度随校正源信号个数 N 变化。设信噪比 $\mathrm{SNR} = 40$ dB，校正源信号方向角在 $-180°$ 到 $180°$ 间均匀分布，则 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{g}})$ 和 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ 随校正源信号个数变化如图 3 所示。从图 3 可看出：参数估计精度总体上随校正源信号个数增加而提高；与有源阵列校正方法相比，本文方法的阵列幅度误差估计精度比较接近，而阵列相位误差估计精度明显高于有源校正方法，且估计性能更加稳健。

仿真试验 3　参数估计精度随校正源信号角度分布区间大小 $\Delta\theta$ 变化。设信噪比 $\mathrm{SNR} = 40$ dB，校正源信号个数 $N = 16$，信号方向角在 $-\Delta\theta/2$ 到 $\Delta\theta/2$ 间均匀分布，则 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{g}})$ 和 $\mathrm{ARMSE}(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ 随 $\Delta\theta$ 变化如图 4 所示。从图 4 可看出：阵列幅度误差估计精度随着 $\Delta\theta$ 增大变化很小；本文方法的阵列相位误差估计精度随 $\Delta\theta$ 增大而逐渐提高；当 $\Delta\theta$ 大于 $200°$ 时，本文方法的阵列相位误差估计精度高于有源校正方法，并呈现出更加稳健的估计性能。

7　结束语

本文提出了一种基于旋转测量的阵列幅相误差

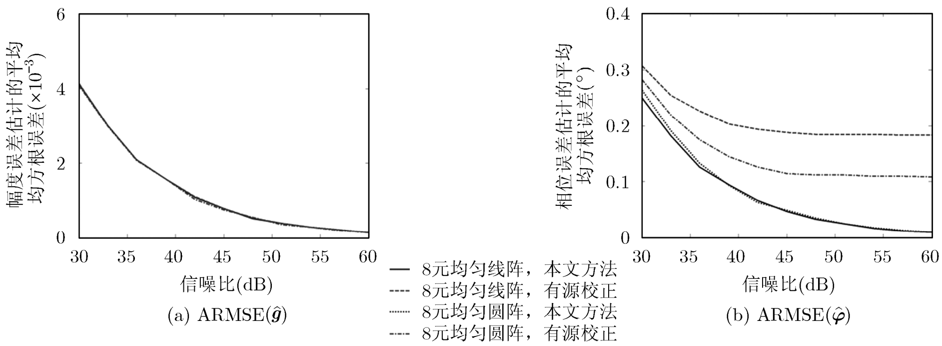

图 2　参数估计精度随信噪比变化

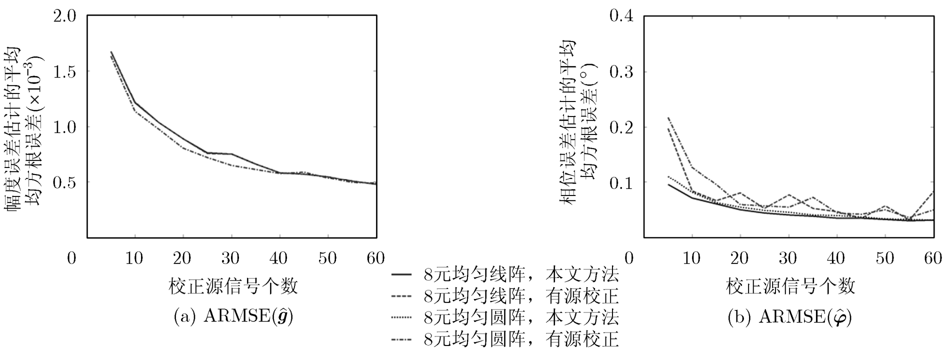

图 3　参数估计精度随校正源信号个数 N 变化

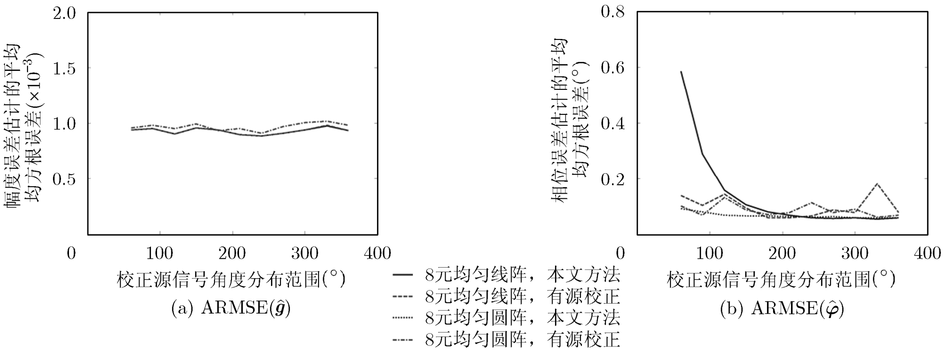

图 4 参数估计精度随校正源信号角度分布区间大小 $\Delta\theta$ 变化

校正新方法，无需测量校正源信号方向角就能获得较高的校正精度。该方法利用了已知的阵列旋转角度，基于最大似然准则获得了阵列幅相误差、校正源信号方向角及其复振幅的无模糊估计。仿真实验结果表明：信噪比、校正源信号个数(旋转测量次数)和信号角度分布区间(阵列旋转角度范围)都会显著影响该方法的参数估计精度；虽然校正源信号方向角未知，但在合理设置仿真参数的情况下，该方法仍然具有很高的精度；该方法对均匀线阵和均匀圆阵均有效，且适用于存在大阵列误差的场合。

该方法的主要优势在于：可通过专用测试转台精确测量阵列旋转角度，且旋转测量次数和角度范围完全可控，能以较小的代价获得很高的校正精度；采用了一种稳健高效的多参数估计分维处理交替优化算法，在保证优化全局收敛的同时显著降低了计算复杂度；可用于存在大阵列误差的场合，且未限定所适用的阵列结构类型，具有良好的适应性和通用性。

参 考 文 献

[1] KRIM H and VIBERG M. Two decades of array signal processing research[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 1996, 13(4): 67–94. doi: 10.1109/79.526899.

[2] SWINDLEHURST A and KAILATH T. A performance analysis of subspace based method in the presence of model errors, part I: The MUSIC algorithm[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1992, 40(7): 1758–1774. doi: 10.1109/78.143447.

[3] FERRÉOL A, LARZABAL P, and VIBERG M. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors, taking into account the resolution probability[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4156–4166. doi: 10.1109/TSP.2010.2049263.

[4] 曹圣红. 存在阵列误差条件下波达方向估计算法研究[D]. [博士论文], 中国科学技术大学, 2014.
CAO Shenghong. Direction of arrival estimation algorithms in the presence of array error[D]. [Ph.D. dissertation], University of Science and Technology of China, 2014.

[5] 闫路. 基于阵列误差分析的稳健自适应波束形成算法研究[D]. [硕士论文], 北京理工大学, 2015.
YAN Lu. Research on robust adaptive beamforming based on analysis of array error[D]. [Master dissertation], Beijing Institute of Technology, 2015.

[6] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 415–465.
WANG Yongliang, CHEN Hui, PENG Yingning, *et al*. Spatial Spectrum Estimation Theory and Algorithms[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 415–465.

[7] TUNCER E and FRIEDLANDER B. Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation[M]. Burlington, MA: Academic, 2009: 93–124.

[8] 刘书. 波达方向估计中阵列误差联合校正算法研究[D]. [硕士论文], 重庆大学, 2015.
LIU Shu. The research of joint calibration algorithms in DOA estimation[D]. [Master dissertation], Chongqing University, 2015.

[9] 张驰. 传感器阵列幅相误差校正方法研究[D]. [硕士论文], 武汉大学, 2015.
ZHANG Chi. Research on sensor array calibration techniques of amplitude and phase error[D]. [Master dissertation], Wuhan University, 2015.

[10] NG B C and SEE C M S. Sensor-array calibration using a maximum likelihood approach[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1996, 44(6): 827–835. doi: 10.1109/8.509886.

[11] STAVROPOULOS K V and MANIKAS A. Array calibration in the presence of unknown sensor characteristics and mutual coupling[C]. Proceedings of the European Signal Processing Conference, Tampere, Finland, 2000, 3: 1417–1420.

[12] 王鼎, 吴瑛. 多径条件下的乘性阵列误差有源校正算法[J]. 中国科学：信息科学, 2015, 45(2): 270–288. doi: 10.1360/N112013-00060.
WANG Ding and WU Ying. The multiplicative array errors

calibration algorithms in the presence of multipath[J]. *Scientia Sinica Informationis*, 2015, 45(2): 270–288. doi: 10.1360/N112013-00060.

[13] 张柯, 程菊明, 付进. 阵列通道不一致性误差快速有源校正算法[J]. 电子与信息学报, 2015, 37(9): 2110–2116. doi: 10.11999/JEIT141651.
ZHANG Ke, CHENG Juming, and FU Jin. Fast active error calibration algorithm for array channel uncertainty[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(9): 2110–2116. doi: 10.11999/JEIT141651.

[14] 王敏, 马晓川, 鄢社锋, 等. 阵列幅度/相位误差的有源校正新方法[J]. 信号处理, 2015, 31(11): 1389–1395. doi: 10.3969/j.issn.1003-0530.2015.11.001.
WANG Min, MA Xiaochuan, YAN Shefeng, *et al*. New calibration method for array gain and phase errors with signal sources[J]. *Journal of Signal Processsing*, 2015, 31(11): 1389–1395. doi: 10.3969/j.issn.1003-0530.2015.11.001.

[15] LI Qiong, GAN Long, and YE Zhongfu. An overview of self-calibration in sensor array processing[C]. 6th International Symposium on Antennas, Propagation and the EM Theory Proceedings, Beijing, 2003: 279–282. doi: 10.1109/ISAPE.2003.1276682.

[16] FRIEDLANDER B and WEISS A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1991, 39(3): 273–284. doi: 10.1109/8.76322.

[17] LIU Aifei, LIAO Guisheng, ZENG Cao, *et al*. An eigenstructure method for estimating DOA and sensor gain-phase errors[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(12): 5944–5956. doi: 10.1109/TSP.2011.2165064.

[18] DAI Zheng, SU Weimin, GU Hong, *et al*. Sensor gain-phase errors estimation using disjoint sources in unknown directions[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(10): 3724–3730. doi: 10.1109/JSEN.2016.2531282.

[19] 景小荣, 杨洋, 张祖凡, 等. 高斯噪声背景下多用户波达方向估计与互耦自校正[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5): 1266–1270. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01042.
JING Xiaorong, YANG Yang, ZHANG Zufan, *et al*. Multiuser DOA estimation and mutual coupling error self-calibration in Gaussian noise backgrounds[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1266–1270. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01042.

[20] HUNG E K L. A critical study of a self-calibrating direction-finding method for arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1994, 42(2): 471–474. doi: 10.1109/78.275633.

[21] FLIELLER A, FERRÉOL A, LARZABAL P, *et al*. Robust bearing estimation in the presence of direction-dependent modelling errors: Identiability and treatment[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Detroit, USA, 1995, 3: 1884–1887. doi: 10.1109/ICASSP.1995.480579.

[22] KAY S M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1993: 254–260.

[23] 张贤达. 矩阵分析与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 101–105.
ZHANG Xianda. Matrix Analysis and Applications[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 101–105.

[24] 张建新. 天线测试转台的结构设计及对准误差分析研究[D]. [硕士论文], 哈尔滨工业大学, 2015.
ZHANG Jianxin. Structure design and alignment error analysis of the antenna test turntable[D]. [Master dissertation], Harbin Institute of Technology, 2015.

程　丰：　男，1975 年生，副教授，硕士生导师，研究方向为阵列信号处理、雷达信号处理.

龚子平：　男，1977 年生，讲师，研究方向为天线理论与设计、电波传播理论及其应用.

张　驰：　男，1988 年生，硕士生，研究方向为阵列信号处理.

万显荣：　男，1975 年生，教授，博士生导师，研究方向为新体制雷达系统、雷达信号处理.