

## 基于量子粒子群优化的短波相控阵天线的激励优化研究

范启蒙<sup>①</sup> 尹成友<sup>\*①</sup> 廖飞龙<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(解放军电子工程学院 合肥 230037)

<sup>②</sup>(陆军军官学院 合肥 230037)

**摘要:** 为加强短波装备远距离通信和电子对抗的干扰能力,须提高近地架设的宽带短波相控阵天线的性能,该文首先利用矩量法建立分析天线阵列的基本框架,然后再结合空域格林函数将天线剖分子模的辐射场分解成自由空间部分和含索末菲积分的部分,前者可以直接得到闭式表达,后者采用二级离散复镜像方法得到近似解,经过处理,阻抗矩阵填充速度极大提高。然后基于阻抗矩阵,结合网络理论并利用量子粒子群优化方法(QPSO)对阵列的激励相位进行优化,以控制波束指向和提高增益,能够在电离层参数随时空变化情况下,灵活地完成点对点天波传播,有较高的实际应用价值。

**关键词:** 天波传播; 矩量法; 快速算法; 最优激励; 量子粒子群优化算法

中图分类号: TN821

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)07-1769-05

DOI: 10.11999/JEIT160819

## Analysis of Excitation Optimization of Short Wave Phased Array Based on Quantum-behaved Particle Swarm Optimization

FAN Qimeng<sup>①</sup> YIN Chengyou<sup>①</sup> LIAO Feilong<sup>②</sup>

<sup>①</sup>(Electronic Engineering Institute of PLA, Hefei 230037, China)

<sup>②</sup>(Army Officer Academy of PLA, Hefei 230037, China)

**Abstract:** In order to enhance long-distance communication performance and jamming ability in electronic warfare for shortwave equipment, performance improvement of near-ground wideband short wave phased array is required. Firstly, method of moments is adopted to construct the analysis framework, then the radiation field of antenna elements is decomposed into free-space part and Sommerfeld-integral part with the help of formulation of spatial Green's function, the former part can be expressed in closed form and the latter part can be approximated by two-level DCIM. After that, the efficiency of filling impedance matrix is enormously increased. Finally, based on the impedance matrix, combining with network theory, Quantum-behaved Particle Swarm Optimization (QPSO) is employed to search for optimal excitation phases, through which high gain and beam scanning are realized. Furthermore, point-point sky wave propagation is implemented neatly in the condition of temporal and spatial variation of ionosphere parameters, thus the array is of great value in practical applications.

**Key words:** Sky wave propagation; Method of Moments (MoM); Fast algorithm; Optimal excitation; Quantum-behaved Particle Swarm Optimization (QPSO)

### 1 引言

远距离的通信和电子对抗一般利用短波天波传播实现,常采用近地架设的天线阵,应按照分层媒质中电磁辐射问题来分析;此外,为了满足实际应用需求,天线还应具备空域和频域扫描能力。针对分层媒质中的电磁辐射与散射问题的分析,目前被广泛采用的是 Michalski 等人<sup>[1]</sup>提出的 MPIE 方法,

关键在于格林函数的快速计算<sup>[2-6]</sup>及索末菲积分的处理<sup>[7-11]</sup>,但对于较大尺寸的散射体,矩量法的计算时间仍然难以忍受,造成这种现象的原因在于求解阻抗矩阵时存在含奇异性的数值积分,如果含奇异项的积分可以得到解析结果,计算效率将极大提高;此外,针对波束的相控扫描问题,许多传统优化方法<sup>[12-14]</sup>和智能算法<sup>[15-17]</sup>得到应用,但前者通常算法复杂且计算量较大;而后者在迭代过程中需要合理权衡参数。

本文着眼于短波相控阵天线的快速分析计算,以实现波束控制和最大辐射功率为目标,首先提出一种阻抗元素的快速计算方法,然后利用求出的阻

收稿日期: 2016-08-03; 改回日期: 2017-01-20; 网络出版: 2017-03-20

\*通信作者: 尹成友 cyouyin@sina.com

基金项目: 安徽省自然科学基金(1408085QF121)

Foundation Item: The Natural Science Foundation of Anhui Province (1408085QF121)

抗矩阵结合网络理论得到辐射功率的表达式,再以辐射功率作为目标函数,利用已被证明的具有全局收敛性质的量子粒子群优化(QPSO)算法<sup>[18]</sup>对激励相位进行优化。最后通过计算实例说明算法的有效性。

## 2 矩量法分析

### 2.1 混合位积分方程的建立

对于如图1所示的近地天线的分析,MPIE可以写成

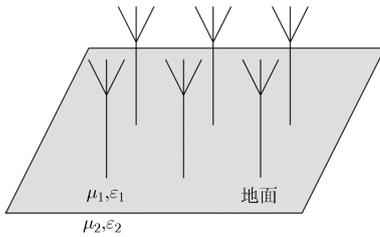


图1 近地天线示意图

$$\hat{n} \times \left[ -j\omega \langle \bar{K}_A, \mathbf{J} \rangle + \frac{1}{j\omega} \nabla \langle K_\phi, \nabla' \cdot \mathbf{J} \rangle \right] = \hat{n} \times (-\mathbf{E}^i) \quad (1)$$

其中,  $\bar{K}_A$  代表广义磁矢位格林函数,  $K_\phi$  代表广义标量位格林函数,二者表达式中都含有索末菲积分,角括号表示做内积。 $\bar{K}_A$  通常表示成 Formulation C 形式<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{K}_A^{mi} &= (\hat{e}_x \hat{e}_x + \hat{e}_y \hat{e}_y) K_{xx}^{mi} + \hat{e}_x \hat{e}_z K_{xz}^{mi} + \hat{e}_y \hat{e}_z K_{yz}^{mi} \\ &+ \hat{e}_z \hat{e}_x K_{zx}^{mi} + \hat{e}_z \hat{e}_y K_{zy}^{mi} + \hat{e}_z \hat{e}_z K_{zz}^{mi} \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  表示单位矢量。近地天线的分析可以看作是场点与源点都在上半空间的情况,即  $m = i = 1$ , 为简便起见,在下面的表示中省略上标。

将式(2)代入到式(1)中,便能利用矩量法对近地天线进行分析。令  $\mathbf{F}(l)$  为电流展开基函数,采用 Galerkin 法,将式(1)展开,整理得到阻抗元素表达式为

$$\begin{aligned} z_{mm} &= \int_{l_m} \mathbf{E}_{\bar{K}_A} \cdot \mathbf{F}_m(l_m) dl_m + \int_{l_m} \mathbf{E}_{K_\phi} \cdot \mathbf{F}_m(l_m) dl_m \\ &= -j\omega \int_{l_m} \int_{l_n} \bar{K}_A \cdot \mathbf{F}_n(l_n) \cdot \mathbf{F}_m(l_m) dl_n dl_m \\ &+ \frac{1}{j\omega} \int_{l_m} \nabla \int_{l_n} K_\phi \nabla' \cdot \mathbf{F}_n(l_n) \cdot \mathbf{F}_m(l_m) dl_n dl_m \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.2 阻抗元素的快速计算

将式(2)代入式(3),便能够求阻抗矩阵,进而得到天线电流分布。但是如果直接计算  $z_{mm}$ , 需要二重积分,内层积分是求  $n$  模在  $m$  模处产生的电场,外层积分是电场与检验函数做内积,因为  $\bar{K}_A$  和  $K_\phi$

中含有振荡型索末菲积分,计算速度将十分缓慢,困难主要集中在内层积分上,即电流元散射场的求取上。根据文献[1]能够得到  $\bar{K}_A, K_\phi$  对应的散射场的表达式,为了提高计算精度,先提取  $K_{xx}, K_{zz}, K_\phi$  中的准动态镜像,得到

$$K_{xx} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} + C_1 \frac{e^{-jkR'}}{R'} + C_2 I_1 \right) \quad (4)$$

$$K_{zz} = \frac{\mu_1}{4\pi} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} + C_3 \frac{e^{-jkR'}}{R'} + C_4 I_1 + C_5 I_2 \right) \quad (5)$$

$$K_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} + C_6 \frac{e^{-jkR'}}{R'} + C_7 I_1 + C_8 I_2 \right) \quad (6)$$

其中,  $R$  表示场点到源点的距离。 $R'$  表示场点到源点镜像的距离,  $C_1, C_2, \dots, C_8$  为常系数。因为  $K_{xx}$  与  $K_{yz}$  中不含强奇异项,所以不需提取准动态镜像。假设  $n$  模电流的方向为  $\hat{e}_n = \hat{e}_x \cos \alpha_n + \hat{e}_y \cos \beta_n + \hat{e}_z \cos \gamma_n$ , 利用式(4)~式(6),可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\bar{K}_A} &= -j\omega \int_{l_n} \left[ (\hat{e}_x \cos \alpha_n + \hat{e}_y \cos \beta_n + \hat{e}_z \cos \gamma_n) \right. \\ &\cdot \frac{e^{-jkR}}{R} + (\hat{e}_x \cos \alpha_n + \hat{e}_y \cos \beta_n) \\ &\cdot \left( C_1 \frac{e^{-jkR'}}{R'} + C_2 I_1 \right) + \hat{e}_z \cos \gamma_n \\ &\cdot \left( C_3 \frac{e^{-jkR'}}{R'} + C_4 I_1 + C_5 I_2 \right) \\ &+ (\hat{e}_x \cos \gamma_n - \hat{e}_z \cos \alpha_n) K_{xx} \\ &\left. + (\hat{e}_y \cos \gamma_n - \hat{e}_z \cos \beta_n) K_{yz} \right] \cdot \mathbf{F}_n(l_n) dl_n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{K_\phi} &= \frac{1}{j\omega} \nabla \int_{l_n} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} + C_6 \frac{e^{-jkR'}}{R'} \right. \\ &\left. + C_7 I_1 + C_8 I_2 \right) \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial l_n} dl_n \end{aligned} \quad (8)$$

事实上,积分速度慢的主要原因是求散射场的积分中包含奇异项,但通过观察式(7),式(8)发现含  $e^{-jkR}/R$  的项与自由空间格林函数的表达式只差一个系数,而在自由空间中电流产生的电场是有解析解的,受这个想法启发,将式(7)中的第1项与式(8)中的第1项提取出来,合并后记作  $\mathbf{E}_f$ , 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f &= -\frac{j\omega\mu_1}{4\pi} \int_{l_n} J_n(l') \frac{e^{-jkR}}{R} (\hat{e}_x \cos \alpha_n + \hat{e}_y \cos \beta_n \\ &+ \hat{e}_z \cos \gamma_n) dl' + \frac{1}{4\pi j\omega\epsilon_1} \nabla \int_{l_n} \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial J_n(l')}{\partial l'} dl' \end{aligned} \quad (9)$$

提取出奇异性项后剩余的部分是含索末菲积分的项,利用二级 DCIM 处理其中的索末菲积分,得到指数

和形式的表达式不再具有奇异性<sup>[10]</sup>。这样处理在物理意义上是容易理解的：放置于无限大上半空间的电流元产生的电场可以看作两部分的叠加，一部分是自由空间中的直达场；另一部分是与地面相互作用产生的场。观察式(9)发现， $\mathbf{E}_t$ 与自由空间中的电场表达式相同，如果选择分段正弦函数作为电流展开基函数，可以得到电流产生的电场的闭式表达<sup>[10]</sup>。对于剩余的含有索末菲积分的部分，经二级 DCIM 处理后不再有奇异性<sup>[10]</sup>，可以直接数值积分得到结果，本文采用采用高斯 8 点法对剩余部分进行计算。

### 3 QPSO 优化激励

对于相控阵天线，如果阵元相对位置固定，则希望只通过调整阵元激励相位以实现特定性能目标，智能优化算法因其简单易行而倍受青睐，粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)已经被应用于天线阵方向图综合<sup>[20]</sup>，但是对于不同的问题，PSO 并不能都保证得到满意的结果，甚至会遇到早熟、陷入局部最优等问题。下面利用 QPSO 来求激励相位。

#### 3.1 QPSO 算法

不同于传统的按轨道收敛的 PSO，具有量子行为的粒子群优化方法的最大特点是粒子不再具有速度，依概率收敛于全局最优<sup>[18]</sup>。以  $N$  个粒子任意维的问题为例，QPSO 的迭代过程可以表示为

$$\mathbf{X}_{g+1,i} = \mathbf{P}_{g,i} \pm \frac{L_{g,i}}{2} \ln \frac{1}{u} \quad (10)$$

下标“ $g, i$ ”表示第  $g$  代第  $i$  个粒子对应的变量。其中  $\mathbf{P}_{g,i}$  表示吸引子，与当前个体最优  $\text{Pb}_{g,i}$  和全局最优  $\text{Gb}_{g,i}$  有关， $L_{g,i}$  表示特征长度，用平均最优位置  $\text{Mb}_{g,i}$  来评价， $u$  为属于 (0,1) 的均匀分布的随机数。各个变量具体的表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{g,i} &= \varphi \cdot \text{Pb}_{g,i} + (1 - \varphi) \cdot \text{Gb}_{g,i}, \\ L_{g,i} &= 2\beta |\text{Mb}_{g,i} - \mathbf{X}_{g,i}|, \text{Mb}_{g,i} = \sum_{i=1}^N \frac{\text{Pb}_{g,i}}{N} \end{aligned} \quad (11)$$

其中， $\varphi$  也是属于 (0,1) 的均匀分布的随机数， $\beta$  是随迭代次数线性减小的收缩扩张因子， $\text{Iter}$  表示总的迭代次数， $g$  表示当前的代数。当满足停止条件时，输出最优位置。

#### 3.2 优化激励

按照 Harrington 的理论， $M$  元阵列的辐射问题可以看做是有  $M + 2$  个端口的等效网络问题<sup>[21]</sup>，其中接收端看做是分别接收水平极化和垂直极化的两个端口。利用开路阻抗矩阵可以得到电压电流关系：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{V}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{rr} & \mathbf{Z}_{ra} \\ \mathbf{Z}_{ar} & \mathbf{Z}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_a \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中， $\mathbf{V}_r, \mathbf{I}_r$  是接收天线端口的电压与电流， $\mathbf{V}_a, \mathbf{I}_a$  是阵列各天线单元端口的电压向量与电流向量， $\mathbf{Z}_{rr}$  是接收天线的输入阻抗矩阵； $\mathbf{Z}_{aa}$  是天线阵的输入阻抗矩阵； $\mathbf{Z}_{ra}$  与  $\mathbf{Z}_{ar}$  是天线阵与接收天线之间的互阻抗矩阵，显然  $\mathbf{Z}_{ar} = \mathbf{Z}_{ra}^T$ 。

假设接收天线位于天线阵的远区，当满足极化匹配时，接收天线端口电压模的平方正比于入射场的强度，令  $\mathbf{I}_r = 0$ ，可以得到接收天线方向上的天线阵发射功率密度为

$$P_t = 2\pi K \mathbf{V}_r^H \mathbf{V}_r = 2\pi K \mathbf{I}_a^H \mathbf{Z}_{ra}^H \mathbf{Z}_{ra} \mathbf{I}_a \quad (13)$$

将  $P_t$  作为目标函数，通过优化  $\mathbf{I}_a$  的相位向量在特定方向上获得最大辐射功率，同时考虑约束各个单元天线的驻波比  $\rho$  小于 2。

综上所述，可以将优化问题描述为  $\min -P_t$ , s.t.  $\rho_i < 2, i = 1, 2, \dots, M$ 。

在 QPSO 实施过程中，引入了惩罚因子  $F_p$ ，它是一个与  $P_t$  量级相当的常数，随迭代次数线性变大。适应度函数为

$$f = \begin{cases} -P_t + \sum_{i=1}^M \rho_i \frac{P_t}{F_p}, & \exists \rho_i > 2, \quad i = 1, 2, \dots, M \\ -P_t, & \forall \rho_i < 2, \quad i = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad (14)$$

### 4 仿真结果

下面以对数周期扇形阵列为例来说明算法的有效性。近地架设的对数周期天线辐射区随着工作频率改变而移动，相位中心的高度也随之变化，但总的电高度  $H/\lambda$  相对不变，因而能保证天线宽带工作。结构如图 2 所示，假设单元天线有 22 个振子，比例因子  $\tau = 0.87$ ，集合线与地面夹角为  $24^\circ$ ，振子与地面夹角为  $25^\circ$ ，馈线特性阻抗  $Z_0 = 300 \Omega$ 。

图 3 给出了 5 MHz 时天线阵架设于中等干地上方 ( $\epsilon_r = 15, \sigma = 6.52 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ ) 时，波束在方位角与俯仰角的扫描情况，方位角扫描范围可达  $\pm 20^\circ$  以上，俯仰角扫描可达  $\pm 15^\circ$ 。图 3(a) 是固定  $\theta = 36^\circ$ ,

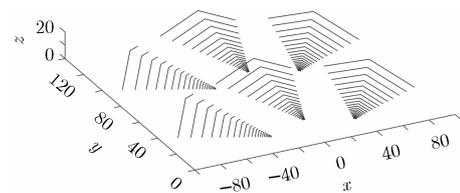


图 2 天线阵结构

$\varphi = 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ$  时的波束, 发现在扫描范围内最大增益几乎不变, 图 3(b) 是固定  $\varphi = 270^\circ, \theta = 21^\circ, 36^\circ, 51^\circ$  时的波束。单幅天线工作于 5 MHz 时的最大辐射方向增益为 3.45 dB, 经过优化后在波束扫描范围内的增益最大达到 8.94 dB, 功率合成后增益提高 5.00 dB 以上, 而同相激励时的增益达到 7.92 dB, 但是波束几乎是垂直地面向上的, 不能远距离传播; 图 4 给出了 10 MHz 时架设于中等干地上方 ( $\epsilon_r = 15, \sigma = 6.99 \times 10^{-4} \text{ S/m}$ ) 时的情况, 图 4(a) 是固定  $\theta = 38^\circ, \varphi = 240^\circ, 270^\circ, 300^\circ$  时的波束, 发现在扫描范围内最大增益也几乎不变, 图 4(b) 是固定  $\varphi = 270^\circ, \theta = 23^\circ, 38^\circ, 53^\circ$  时的波束。单幅天线工作于 10 MHz 时的最大辐射方向增益为 5.63 dB, 经过优化后在波束扫描范围内的增益最大达到 11.53 dB, 功率合成后增益提高接近 6.00 dB; 同相激励时最大增益有 10.00 dB, 但波束几乎也是垂直向上的。发现随着波束仰角的降低, 增益逐渐减小, 这主要是地面影响造成的。针对不同的电离层状况, 可以在一定范围内调控波束, 在通信及电子对抗中实现不同的最佳场强落区覆盖范围。

另外从计算时间来看, 如果剖分时保证最短振子有 3 个子模, 则单幅天线  $z_{mm}$  的规模为  $322 \times 322$ , 如果采用直接二重积分计算阻抗矩阵, 耗时 29.7 h,

而如果采用本文提出的快速算法, 耗时仅为 0.3 h, 计算效率极大提高。

### 5 结束语

本文针对矩量法分析近地天线时计算效率低的现象进行分析, 发现被积函数中的奇异项是造成计算缓慢的主要原因, 将奇异项提取出来单独处理, 发现经过适当的变换可以得到解析解, 由此极大提高了计算效率; 然后基于网络理论, 利用 QPSO 方法优化得到最优相位实现功率合成, 得到了比较好的效果, 对于增强短波相控阵天线的效能具有一定的实际意义。然而本文是针对相对位置固定的天线阵而言的, 但是阵元间的相对位置关系也是影响天线阵辐射性能的重要因素, 虽然本文方法相对于直接计算有着极大的优势, 但如果将阵元间的位置也作为优化变量, 位置每改变一次都要重新计算一次阻抗矩阵, 对于大型天线阵而言, 这样的优化效率也是难以忍受的。针对这个问题, 一方面可以考虑与电大尺寸散射体的快速算法如快速多极子方法, 多层快速多极子算法相结合, 以期获得更快的计算速度, 实现更高的优化效率; 另一方面, 应考虑回归到索末菲积分的快速计算上, 因为对于分层媒质中的电磁辐射散射问题, 索末菲积分是很难回避的一个困难。可以确定, 如果索末菲积分能够更加快速精确地计算, 将会为解决分层媒质中的电磁问题带来更大的便利。

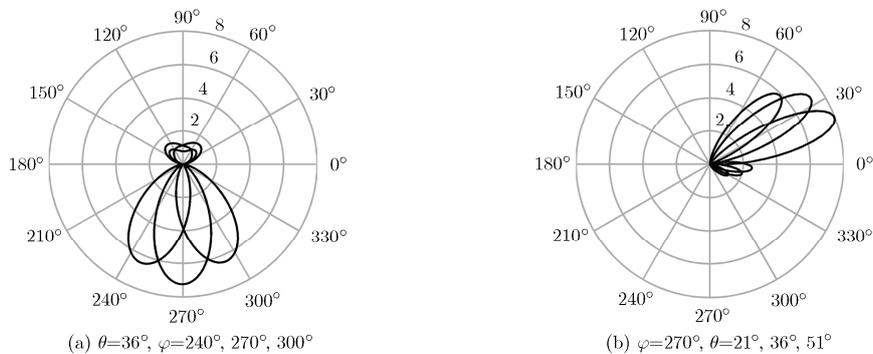


图 3 5 MHz 时的波束扫描

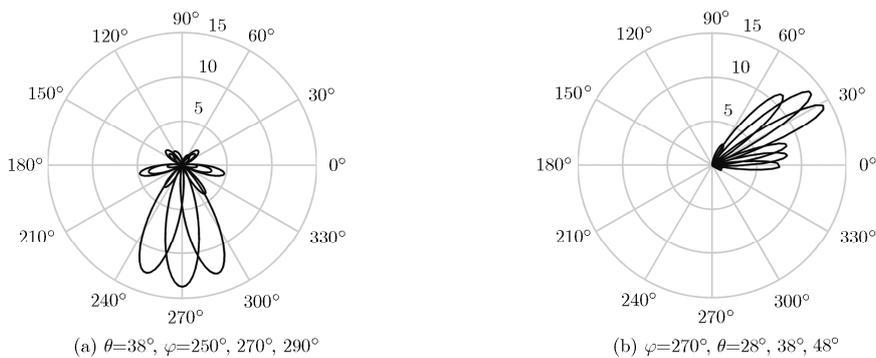


图 4 10 MHz 时的波束扫描

## 参 考 文 献

- [1] MICHASKI K A and ZHENG Dalian. Electromagnetic scattering and radiation by surfaces of arbitrary shape in layered media, part I and part II[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1990, 38(3): 335-352.
  - [2] SARSHENAS M and FIROUZEH Z H. A robust hybrid Taguchi-gradient optimization method for the calculation of analytical Green's functions of microstrip structures[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2015, 14: 1366-1368. doi: 10.1109/LAWP.2015.2407191.
  - [3] WU Biyi and SHENG Xinqing. A complex image deduction technique using genetic algorithm for the MoM solution of half-space MPIE[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(8): 3727-3731. doi: 10.1109/TAP.2015.2434418.
  - [4] KARABULUT E P, ERTURK V B, ALATAN L, et al. A novel approach for the efficient computation of 1-D and 2-D summations[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2016, 64(3): 1014-1022. doi: 10.1109/TAP.2016.2521860.
  - [5] LUO Wan, NIE Zaiping, and CHEN Y P. Efficient higher-order analysis of electromagnetic scattering by objects above, below, or straddling a half-space[J]. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 2016, 15: 332-335. doi: 10.1109/LAWP.2015.2443874.
  - [6] DYAB W M G, SARKAR T K, ABDALLAH M N, et al. Green's function using Schelkunoff integrals for horizontal electric dipoles over an imperfect ground plane[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2016, 64(4): 1342-1355 doi: 10.1109/TAP.2016.2529639.
  - [7] MICHASKI K A and MOSIG J R. The Sommerfeld halfspace problem redux: Alternative field representations, role of Zenneck and surface plasmon waves[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(12): 5777-5790. doi: 10.1109/TAP.2015.2489680.
  - [8] MICHASKI K A and MOSIG J R. On the surface fields excited by a Hertzian dipole over a layered halfspace: From radio to optical wavelengths[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2015, 63(12): 5741-5752. doi: 10.1109/TAP.2015.2484422.
  - [9] 焦程鹏, 贺秀莲, 龚书喜. 离散复镜像方法中的积分路径与展开函数的研究[J]. *电子与信息学报*, 2008, 30(3): 734-737.  
JIAO Chengpeng, HE Xiulian, and GONG Shuxi. On the integration path and expansion function of the discrete complex image method[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2008, 30(3): 734-737.
  - [10] AKSUN M I. A Robust approach for the derivation of closed-form Green's function[J]. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1996, 44(5): 651-658. doi: 10.1109/22.493917.
  - [11] AKSUN M I and DURAL G. Clarification of issues on the closed-form Green's function in stratified media[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2005, 53(11): 3644-3653. doi: 10.1109/TAP.2005.858571.
  - [12] LIU Jiazhou, ZHAO Zhiqin, YUAN Mengqing, et al. The filter diagonalization method in antenna array optimization for pattern synthesis[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, 62(12): 6123-6130. doi: 10.1109/TAP.2014.2364818.
  - [13] ROCCA P, ANSELMINI N, and MASSA A. Optimal synthesis of robust beamformer weights exploiting interval analysis and convex optimization[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, 62(7): 3603-3612. doi: 10.1109/TAP.2014.2318071.
  - [14] FUCHS B. Application of convex relaxation to array synthesis problem[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2014, 62(2): 634-640. doi: 10.1109/TAP.2013.2290797.
  - [15] ELKAMCHOUCI H M and HASSAN M M. Array pattern synthesis approach using a genetic algorithm[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2014, 8(14): 1236-1240. doi: 10.1049/iet-map.2013.0718.
  - [16] SUN Bin, REN Bo, LIU Chunheng, et al. Experimental investigation on the synthesis of scanning beam pattern with antenna selection for conformal array[J]. *IET Microwaves, Antennas & Propagation*, 2016, 10(9): 969-975. doi: 10.1049/iet-map.2015.0782.
  - [17] HU Guanzhong, YANG Shiyong, LI Yunling, et al. A hybridized vector optimal algorithm for multi-objective optimal designs of electromagnetic devices[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2016, 52(3): 1-4. doi: 10.1109/TMAG.2015.2493181.
  - [18] 孙俊. 量子行为粒子群优化算法研究[D]. [博士论文], 江南大学, 2009: 30-35.  
SUN Jun. Particle swarm optimization with particles having quantum behavior[D]. [Ph.D. dissertation], Jiangnan University, 2009: 30-35.
  - [19] RICHMOND J H and GEARY N H. Mutual impedance of nonplanar-skew sinusoidal dipoles[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1975, 23(3): 412-414. doi: 10.1109/TAP.1975.1141083.
  - [20] 赵菲. 共形相控阵天线分析综合技术与实验研究[D]. [博士论文], 国防科学技术大学, 2012.  
ZHAO Fei. Analysis and synthesis study of conformal phased antenna array and experiment[D]. [Ph.D. dissertation], National University of Defense Technology, 2012.
  - [21] 哈林登著. 王尔杰, 等译. 计算电磁场的矩量法[M]. 北京: 国防工业出版社, 1981: 222-227.  
Harrington R F. Field Computation by Moment Methods[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1981: 222-227.
- 范启蒙: 男, 1993年生, 博士生, 研究方向为电磁场数值计算、天线技术。  
尹成友: 男, 1964年生, 教授, 研究方向为电磁场数值计算、数据融合及阵列信号处理等。  
廖飞龙: 男, 1981年生, 讲师, 研究方向为电磁场数值计算、天线分析设计等。