

Alpha 稳态噪声下基于 Meridian 范数的全变分图像去噪算法

杨真真^{*①②} 杨震^② 李雷^① 金正猛^①

^①(南京邮电大学视觉认知计算与应用研究中心 南京 210023)

^②(南京邮电大学宽带无线通信与传感网技术教育部重点实验室 南京 210003)

摘要: 在实际应用中, 噪声不可避免, 因此, 图像去噪一直是图像处理领域研究的重点, 并且近年来受到越来越多的研究者的青睐。该文首先基于 Meridian 分布和全变分(Total Variational, TV)的统计特性, 提出一种全变分模型来复原 alpha 稳态噪声环境下的含噪声图像。此外, 为了保证模型解的唯一性, 对提出的全变分模型添加了一个二次惩罚项, 得到一个严格凸的全变分模型, 然后, 使用原始-对偶算法对提出的全变分模型进行求解, 并证明了该算法的收敛性。最后, 进行了仿真实验, 并对实验结果进行了分析, 实验结果验证了提出模型的可行性与有效性。
关键词: 图像处理; Meridian 范数; Alpha 稳态噪声; 原始-对偶算法; 全变分

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2017)05-1109-07

DOI: 10.11999/JEIT160657

A Total Variational Approach Based on Meridian Norm for Restoring Noisy Images with Alpha-stable Noise

YANG Zhenzhen^{①②} YANG Zhen^② LI Lei^① JIN Zhengmeng^①

^①(Center for Visual Cognitive Computation and Application, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210023, China)

^②(Key Laboratory of Broadband Wireless Communication and Sensor Network Technology, Ministry of Education, Nanjing University of Posts and Telecommunications, Nanjing 210003, China)

Abstract: In actual applications, noises may inevitably exist, and thus to study the denoising method for images is great significant task in image processing filed that attracts much attention in recent years. In this paper, based on the statistical property of Meridian distributed and the Total Variational (TV), a total variational method is proposed for restoring images degraded by alpha-stable noise. Besides, in order to obtain a strictly convex model, a quadratic penalty term is added, which guarantees the uniqueness of the solution. For solving the novel convex variational model, a primal-dual algorithm is employed to solve the above model, and the convergence of the algorithm is proved. The experimental results demonstrate that the feasibility and effectiveness of the proposed model for the noisy images with alpha-stable noise.

Key words: Image processing; Meridian norm; Alpha-stable noise; Primal-dual algorithm; Total Variational (TV)

1 引言

在图像的采集、传输和存储的过程中, 图像不可避免地会受到噪声的污染, 噪声的种类和成因很多, 很多情况下都需要对图像进行去噪处理, 使经

处理后的图像更适合分析和信息提取。图像去噪一直都是图像处理领域研究的重点, 并且受到越来越多的研究者的青睐。图像去噪的方法很多, 例如小波去噪^[1]、线性滤波^[2]、非线性滤波^[3]以及基于偏微分方程的非线性去噪方法^[4-13]等等。其中基于偏微分方程的图像去噪是具有代表性的一类图像去噪方法, 这类方法从全新角度(如能量扩散等)来诠释图像去噪过程, 已形成完整的理论体系和数值方法, 在该类方法中最具有代表性是基于全变分(Total Variation, TV)的算法^[5-13]。

针对去除图像中的加性高斯噪声的TV算法已经被广泛地应用到图像去噪中^[5,6], 该算法可以追溯到Rudin等人^[5]于1992年提出的ROF(Rudin, Osher,

收稿日期: 2016-06-21; 改回日期: 2017-01-03; 网络出版: 2017-02-24

*通信作者: 杨真真 yangzz@njupt.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金(61501251, 61271335, 61271240), 江苏省自然科学基金项目(BK20140891), 南京邮电大学引进人才科研启动基金资助项目(NY214191)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (61501251, 61271335, 61271240), The Natural Science Foundation of Jiangsu Province (BK20140891), The Science Foundation of Nanjing University of Posts and Telecommunications (NY214191)

and Fatemi)模型。该模型在去噪的同时能很好地保持图像边缘,数值实验结果表明该TV模型对于传统的加性高斯噪声有很好的去噪效果。

但实际图像中的噪声多种多样,例如脉冲噪声^[7,8]、泊松噪声^[9]、Cauchy噪声^[10]、乘性Gamma噪声^[11,12]、Rician噪声^[13]等,另一种广泛存在于无线通信系统、SAR(Synthetic Aperture Radar)图像、医学天文图像、生物医学图像中的 α 稳态噪声^[14-16](当 α 值较小时)也可以看作是一种脉冲噪声。在过去的几年里,研究者根据噪声的统计特性以及TV正则项的优越特性,通过最大后验(Maximum a Posteriori, MAP)估计,分别提出了针对脉冲噪声^[7,8]、泊松噪声^[9]、Cauchy噪声^[10]、乘性Gamma噪声^[11,12]、Rician噪声^[13]等的TV去噪算法。但目前为止,没有研究者提出针对 α 稳态噪声的TV去噪算法,这主要是因为 α 稳态分布除了Gauss分布、Cauchy分布和Levy分布外,没有其他严格的闭式概率密度函数。

本文关注的是基于TV的 α 稳态噪声环境下的图像去噪算法,因为Meridian滤波可以很好地去除 α 稳态噪声^[17],所以本文根据Meridian分布的统计特性,将ROF模型中的保真项修改成Meridian范数,并证明了该模型的解的存在性。但是该模型的保真项非凸,模型的解可能陷入局部极小值,且该模型对初始值比较敏感。为了保证解的唯一性,本文对提出的全变分模型添加了一个二次惩罚项,得到了严格凸的全变分去噪模型,并证明了该图模型的解的存在性和唯一性。然后,使用原始-对偶算法对提出的全变分模型进行求解,并证明了该算法的收敛性。最后,通过仿真实验验证了该算法的可行性与有效性。

本文第2节根据Meridian分布的统计特征提出了去除 α 稳态噪声的TV模型,并证明了该模型的解的存在性和唯一性;第3节给出了求解该模型的原始-对偶算法,并证明了该算法的收敛性;第4节进行了仿真实验并给出了实验结果和分析;最后对全文进行了总结。

2 本文提出的全变分去噪模型

本节首先根据Meridian分布,用最大后验(MAP)估计提出了 α 稳态噪声下的一种新的TV去噪模型,然后证明了该模型的解的存在性。但是该模型的保真项非凸,模型的解可能陷入局部极小值,且该模型对初始值比较敏感。为了保证解的唯一性,对提出的全变分模型添加了一个二次惩罚项,得到了严格凸的全变分去噪模型,并证明了该凸全变分模型的解的存在性与唯一性。

α 稳态噪声(当 α 值较小时)可以看作是一种脉冲噪声,基于Meridian分布的估计对脉冲噪声具有鲁棒性,基于这些原因,本文使用Bayes准则和MAP估计,提出 α 稳态噪声下的一种新的TV去噪模型。

给定含噪声图像 $f = u + \eta$,其中 η 为 α 稳态噪声,使用Bayes准则和MAP估计,原始图像 u 可以通过如式(1)得到

$$\begin{aligned}\hat{u}(f) &= \arg \max_u P(u | f) = \arg \max_u \frac{P(f | u)P(u)}{P(f)} \\ &= \arg \min_u (-\lg(P(f | u)) - \lg(P(u)) + \lg(P(f))) \\ &= \arg \min_u (-\lg(P(f | u)) - \lg(P(u)))\end{aligned}\quad (1)$$

最后一个等式成立是因为 $\lg(P(f))$ 对于变量 u 是常数。

对于含 α 稳态噪声图像中的每一个像素 $x \in \Omega$,有

$$P(f(x) | u(x)) = \frac{\gamma}{2} \frac{1}{(\gamma + |u(x) - f(x)|)^2} \quad (2)$$

其中, $\gamma > 0$ 为尺度参数。假设 u 服从Gibbs先验^[11],于是有

$$g(u) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\beta \int_{\Omega} |Du| dx\right) \quad (3)$$

其中, Z 是归一化因子,参数 $\beta > 0$ 。

由于每一个像素 $x \in \Omega$ 都是相互独立同分布的,于是有 $P(u) = \prod_{x \in \Omega} P(u(x))$ 。因此,最小化问题式(1)等价于最小化式(4)的表达式

$$\begin{aligned}-\lg(P(f | u)) - \lg(P(u)) &= -\int_{\Omega} (\lg(P(f(x) | u(x))) + \lg(P(u(x)))) dx \\ &= \int_{\Omega} (2\lg(\gamma + |u(x) - f(x)|) + \lg 2 + \lg Z - \lg \gamma) dx \\ &\quad + \beta \int_{\Omega} |Du| dx \\ &= \int_{\Omega} \left(2\lg\left(1 + \frac{|u(x) - f(x)|}{\gamma}\right) + \lg 2 + \lg Z + \lg \gamma\right) dx \\ &\quad + \beta \int_{\Omega} |Du| dx\end{aligned}\quad (4)$$

表达式(4)的最后3项关于变量 u 为常数,于是得到式(5)的 α 稳态噪声下的TV去噪模型:

$$\bar{u} = \inf_{u \in \text{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| dx + \lambda \int_{\Omega} \lg\left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma}\right) dx \quad (5)$$

其中, $\int_{\Omega} |Du| dx$ 是TV正则项, $\int_{\Omega} \lg\left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma}\right) dx$

为保真项, Ω 为图像区域, $\text{BV}(\Omega)$ 为边界变分的空间函数, $u \in \mathbb{R}^m$ 为原始图像, $f \in L^{\infty}(\Omega)$ 为含有加性 α 稳态噪声的图像, $\gamma > 0$ 为尺度参数, $\lambda = 2/\beta$

> 0 为正则化参数。

接下来, 将证明模型式(5)的解的存在性。

定理 1 假设 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则模型式(5)至少存在一个解 $u^* \in \text{BV}(\Omega)$, 且满足:

$$0 < \inf_{\Omega} f \leq u^* \leq \sup_{\Omega} f$$

证明 设 $E_0(u) := \lambda \int_{\Omega} \lg \left(1 + \frac{|u-f|}{\gamma} \right) dx$, $E(u) := \int_{\Omega} |Du| dx + \lambda \int_{\Omega} \lg \left(1 + \frac{|u-f|}{\gamma} \right) dx$, $a = \inf_{\Omega} f$, $b = \sup_{\Omega} f$, 于是有 $E(u) \geq E_0(u) \geq 0$ 。因此, $E(u)$ 有下界, 我们可以选取一个最小化序列 $\{u_n\} \subset \text{BV}(\Omega)$ 。

对于每一个像素 $x \in \Omega$, 设函数 $h \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 为 $h(t) := \lg \left(1 + \frac{|t-f(x)|}{\gamma} \right)$, 于是有 $h'(t) = \frac{\text{sgn}(t-f(x))}{\gamma + |t-f(x)|}$ 。因此, 当 $t < f(x)$ 时, 有 $h'(t) = -\frac{1}{\gamma + f(x) - t} < 0$; 当 $t \geq f(x)$ 时, 有 $h'(t) = \frac{1}{\gamma + t - f(x)} > 0$; 于是有, 当 $t \in [0, f(x)]$ 时, $h(t)$ 为单调减函数, 当 $t \in [f(x), +\infty)$ 时, $h(t)$ 为单调增函数。故若 $M \geq f(x)$, 则有 $h(\min(t, M)) \leq h(t)$ 。因此, 如果 $M = b$, 有 $E_0(\inf_{\Omega}(u, b)) \leq E_0(u)$ 。又由于 $\int_{\Omega} |D \inf_{\Omega}(u, b)| dx \leq \int_{\Omega} |Du| dx$ [18], 故有 $E(\inf_{\Omega}(u, b)) \leq E(u)$ 。同理可得: 若 $a = \inf_{\Omega} f$, 则 $E(\sup_{\Omega}(u, a)) \leq E(u)$ 。因此, 假设 $0 < a \leq u_n \leq b$, 则 $u_n \in L^1(\Omega)$ 有界。

$\{u_n\}$ 为一最小化序列, 于是 $E(u_n)$ 有界。又 $\int_{\Omega} |Du| dx$ 有界, 于是 $u_n \in \text{BV}(\Omega)$ 有界。利用 BV 空间函数的紧性得到: 存在 $u^* \in \text{BV}(\Omega)$ 使得 $u_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} u^*$ 且 $u_n \xrightarrow{a.e.} u^*$ 在 Ω 上, 且对任意的 $x \in \Omega$, 有 $0 < a \leq u^* \leq b$ 。利用 BV 空间函数的下半连续性和 Fatous 引理, 得到 u^* 是模型式(5)的解, 且满足 $0 < \inf_{\Omega} f \leq u^* \leq \sup_{\Omega} f$ 。证毕

尽管我们证明了模型式(5)的解的存在性, 但因为该模型非凸, 导致模型的解可能陷入局部极小值, 为了克服这个缺点, 利用文献[10]的思想, 通过增加二次惩罚项, 本文提出了如式(6)凸全变分去噪模型:

$$\bar{u} = \inf_{u \in \text{BV}(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| dx + \lambda \left(\int_{\Omega} \lg \left(1 + \frac{|u-f|}{\gamma} \right) dx + \frac{\mu}{2} \|u-g\|_2^2 \right) \quad (6)$$

其中, g 是含噪声图像 f 经过 Median 滤波后的图像[10], $\lambda > 0$ 和 $\mu > 0$ 为正则化参数。

为了证明模型式(6)的解的存在性和唯一性, 首先来证明该模型的凸性。

引理 1 若 $\mu\gamma^2 \geq 1$, 则模型式(6)严格凸。

证明 对于每一个固定的 $x \in \Omega$, 设函数 $h \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ 为 $h(t) := \lg \left(1 + \frac{|t-f(x)|}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{2} (t-g(x))^2$, 则有 $h'(t) = \frac{\text{sgn}(t-f(x))}{\gamma + |t-f(x)|} + \mu(t-g(x))$, $h''(t) = -\frac{|\text{sgn}(t-f(x))|}{(\gamma + |t-f(x)|)^2} + \mu$ 。若 $\mu\gamma^2 \geq 1$, 则有 $\gamma \geq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, 故有 $\gamma + |t-f(x)| \geq \frac{1}{\sqrt{\mu}}$, 于是有 $(\gamma + |t-f(x)|)^2 \geq \frac{1}{\mu}$, 所以有 $\mu(\gamma + |t-f(x)|)^2 \geq 1$, 即 $h''(t) \geq 0$, 也即是说此时 h 是一个凸函数。又因为 h 只有一个最小值, 因此当 $\mu\gamma^2 \geq 1$ 时, h 是一个严格凸函数。又 TV 正则项是凸的, 故有当 $\mu\gamma^2 \geq 1$ 时, 模型式(6)严格凸。证毕

接下来, 将证明模型式(6)的解的存在性和唯一性。

定理 2 假设 $f \in L^\infty(\Omega)$, 则模型式(6)至少存在一个解 $u^* \in \text{BV}(\Omega)$, 且满足:

$$0 < \min \left(\inf_{\Omega} f, \inf_{\Omega} g \right) \leq u^* \leq \max \left(\sup_{\Omega} f, \sup_{\Omega} g \right)$$

证明 模型式(6)的解的存在性的证明与定理 1 相同。需要注意的是当 $t < \min(\inf_{\Omega} f, \inf_{\Omega} g)$ 时, 函数 $h(t) := \lg \left(1 + \frac{|t-f(x)|}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{2} (t-g(x))^2$ 单调递减, 当 $t > \max(\sup_{\Omega} f, \sup_{\Omega} g)$ 时, 函数 $h(t)$ 单调递增。模型式(6)的解的唯一性由该模型的严格凸性(引理 1)可以直接得到。证毕

3 原始对偶算法

模型式(6)是严格凸的, 因此采用易于实现并且快速的原始对偶算法[19,20]对该模型进行求解。

为了求解模型式(6), 首先来介绍该模型的离散化模型:

$$\bar{u} = \min_u \|\nabla u\|_1 + \lambda G(u) \quad (7)$$

其中, $G: \mathbb{R}^{mn} \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为 $G(u) := \sum_i \lg \left(1 + \frac{|u_i - f_i|}{\gamma} \right) + \mu \|u - g\|_2^2$ ($i = 1, 2, \dots, mn$) 称为保真项。 $\|\nabla u\|_1 := \sum_i \sqrt{(\nabla_x u)_i^2 + (\nabla_y u)_i^2}$ ($i = 1, 2, \dots, mn$) 为图像 u 的离散化全变分, $\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla_x u \\ \nabla_y u \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2mn \times mn}$ 为离散的梯度。

$G(u)$ 中的第 1 项是一个鲁棒性的距离测度^[17,21], 我们称之为 Meridian 范数。

根据 TV 的对偶性质, 模型式(7)的原始对偶形式为

$$(\bar{u}, \bar{p}) = \min_u \max_p - \langle u, \text{div } p \rangle + \lambda G(u) \quad (8)$$

其中 $p \in \mathbb{R}^{2mn}$ 是对偶变量, $\text{div} = -\nabla^T$ 是散度算子。

采用原始对偶算法来求解问题式(8), 首先更新变量 p :

$$\begin{aligned} p^{k+1} &= \arg \max_p \langle \nabla \bar{u}^k, p \rangle - \frac{1}{2\sigma} \|p - p^k\|_2^2 \\ &= \pi(\sigma \nabla \bar{u}^k + p^k) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\pi(q_i) = \frac{q_i}{\max\{1, |q_i|\}}$, $\pi(q_{mn+i}) = \frac{q_{mn+i}}{\max\{1, |q_i|\}}$ ($i = 1, 2, \dots, mn$), $|q_i| = \sqrt{q_i^2 + q_{mn+i}^2}$ 。其次, 更新变量 u :

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \arg \min_u - \langle u, \text{div } p^{k+1} \rangle + \lambda G(u) \\ &\quad + \frac{1}{2\tau} \|u - u^k\|_2^2 \\ &= \arg \min_u \lambda \lg \left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma} \right) + \frac{\mu\lambda}{2} \|u - g\|_2^2 \\ &\quad - \langle u, \text{div } p^{k+1} \rangle + \frac{1}{2\tau} \|u - u^k\|_2^2 \\ &= \arg \min_u 2\lambda\tau \lg \left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma} \right) + \mu\lambda\tau \|u - g\|_2^2 \\ &\quad - 2\tau \langle u, \text{div } p^{k+1} \rangle + \|u - u^k\|_2^2 \\ &= \arg \min_u 2\lambda\tau \lg \left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma} \right) + (1 + \mu\lambda\tau) \\ &\quad \cdot \left\| u - \frac{1}{1 + \mu\lambda\tau} (\mu\lambda\tau g + \tau \text{div } p^{k+1} + u^k) \right\|_2^2 \\ &= \arg \min_u \lg \left(1 + \frac{|u - f|}{\gamma} \right) + \frac{1 + \mu\lambda\tau}{2\lambda\tau} \\ &\quad \cdot \left\| u - \frac{1}{1 + \mu\lambda\tau} (\mu\lambda\tau g + \tau \text{div } p^{k+1} + u^k) \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (10)$$

问题式(10)的解可以由式(11)给出:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \gamma \cdot \text{sgn}(a^k) \\ &\quad \cdot \max \left\{ \frac{|a^k| - 1 + \sqrt{(|a^k| + 1)^2 - \frac{4\lambda\tau}{\gamma^2(1 + \mu\lambda\tau)}}}{2}, 0 \right\} + f \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $a^k = \frac{1}{\gamma(1 + \mu\lambda\tau)} (\mu\lambda\tau g - \tau \text{div } p^{k+1} + u^k) - \frac{f}{\gamma}$, $\text{sgn}(\cdot)$ 为符号函数。

综上所述, 采用原始对偶算法来求解问题式(6)算法的步骤如算法 1 所示。

表 1 原始对偶算法求解问题

算法 1 原始对偶算法求解问题式(6)

(1) 给定 $\sigma > 0$ 和 $\tau > 0$, 初始化 $p^0 = 0$ 和 $u^0 = \bar{u}^0 = f$ 。

(2) 计算 p^{k+1} , a^k , u^{k+1} 和 \bar{u}^{k+1} :

$$p^{k+1} = \pi(\sigma \nabla \bar{u}^k + p^k)$$

$$a^k = \frac{1}{\gamma(1 + \mu\lambda\tau)} (\mu\lambda\tau g - \tau \text{div } p^{k+1} + u^k) - \frac{f}{\gamma}$$

$$u^{k+1} = \gamma \cdot \text{sgn}(a^k)$$

$$\bar{u}^{k+1} = 2u^{k+1} - u^k$$

(3) 判断是否满足终止条件, $\frac{E(u^k) - E(u^{k+1})}{E(u^k)} < 10^{-3}$, 其中,

$E(u)$ 为本文去噪模型式(6)的目标函数, 满足则停止; 否则, 令 $k = k + 1$, 转步骤 2。

定理 3 对给定的 $\sigma > 0$ 和 $\tau > 0$ 和任意的初始值 (u^0, p^0) , 当 $\frac{\sigma\tau}{\lambda^2} \|\nabla\|_2^2 < 1$ 时, 由原始对偶算法产生的迭代序列 (u^k, p^k) 收敛到问题式(6)的鞍点 (u^*, p^*) 。

此定理是文献[19]中的定理 1 的特例, 故在这里省略其证明过程。因为 $\|\nabla\|_2^2 < 8$ (见文献[19]), 只需要满足 $\sigma\tau < \frac{1}{8} \lambda^2$, 算法 1 即可收敛。

4 实验结果及分析

为了验证本文提出模型的有效性, 本节对实验对象加入 α 稳态噪声进行了仿真实验, 并将该新模型与 TVL1 模型^[8]、Cauchy 模型^[10]和 Meridian 滤波^[17]进行比较。

实验对象为 Cameraman 图像, Peppers 图像和

Lena图像,对实验对象采用 $f = u + \eta = u + \xi\rho$ 格式加入 α 稳态噪声(其中 ρ 服从 α 稳态分布, ξ 表示噪声程度)。仿真实验中,我们设置 $\sigma = \tau = 0.3$, $\gamma = \frac{f_{(0.875)} - f_{(0.125)}}{2}$ (其中 $f_{(c)}$ 表示 f 的第 c 个分位数), $\mu = 1/\gamma^2$ 。分别采用峰值信噪比PSNR和相似度SSIM^[22]作为重构性能的评价指标。

对实验对象Cameraman图像(大小为 256×256)加入 ρ 服从 α 稳态分布 $S(\alpha, 0, 0.2, 0)$, $\xi = 0.04$ 的 α 稳态噪声,并将本文提出的去噪模型和Cauchy模型^[10]以及Meridian滤波^[17]进行了比较,其PSNR和SSIM值如图1所示。

由图1可以看出,随着 α 值的增大,各种模型恢复图像的PSNR和SSIM值都增大,而且 α 值越小,本文提出的模型的优越性越好。此外,相同的 α 值下,本文提出的模型恢复图像的PSNR和SSIM值都大于Cauchy模型^[10]和Meridian滤波^[17]恢复图像的PSNR和SSIM值。特别地,当 $\alpha \geq 1$,各种模型恢复的图像的PSNR值均大于30 dB,恢复的图像的质量已经相当好。所以,下文的仿真实验均取 $\alpha = 1$ 。

为了验证本文提出的模型的性能,对实验对象Cameraman 图像加入 ρ 服从 α 稳态分布 $S(1, 0, 0.2, 0)$, $\xi = 0.04$ 的 α 稳态噪声,各种模型恢复的实验结果分别如图2所示。

由图2可以看出,对于Cameraman图像,本文提出的去噪模型恢复图像的效果最好,不但很好地去除了噪声,而且较好地保留了图像的细节信息,恢复出的图像也和原始图像最接近。而TVL1模型恢复出的图像局部有小的白斑点,Cauchy模型和Meridian滤波恢复出的图像存在一定程度上的模糊性。总之,TVL1模型、Cauchy模型和Meridian滤波恢复出的图像均没有本文提出的去噪模型恢复图像清晰。

为了进一步定量地比较各种模型恢复Cameraman图像,Peppers图像和Lena图像3种不同实验对象的效果,对3种实验对象分别加入 ρ 服从 α

稳态分布 $S(1, 0, 0.2, 0)$, $\xi = 0.04$ 的 α 稳态噪声,并将本文提出的去噪模型和TVL1模型^[8]、Cauchy模型^[10]以及Meridian滤波^[17]进行比较,其PSNR和SSIM值分别如表2和表3所示。

表2 不同模型恢复图像的PSNR值(dB)

	实验对象		
	Cameraman	Peppers	Lena
含噪声图像	18.218	18.463	18.372
本文提出的模型	31.772	32.869	32.571
TVL1模型 ^[8]	28.936	32.383	31.959
Cauchy模型 ^[10]	28.825	32.287	31.853
Meridian滤波 ^[17]	26.883	30.612	30.279

表3 不同模型恢复图像的SSIM值

	实验对象		
	Cameraman	Peppers	Lena
含噪声图像	0.351	0.463	0.458
本文提出的模型	0.674	0.856	0.849
TVL1模型 ^[8]	0.623	0.838	0.823
Cauchy模型 ^[10]	0.621	0.834	0.821
Meridian滤波 ^[17]	0.587	0.812	0.801

由表2和表3可以看出,相同噪声程度下,对于不同的实验对象,本文提出的模型恢复的图像无论是PSNR还是SSIM值都高于其他模型恢复图像的值。例如,对于Cameraman图像,本文算法恢复的图像的PSNR值比TVL1模型恢复的图像的PSNR值高2.836 dB,比Meridian滤波恢复的图像的PSNR值高4.889 dB。此结果与图2的视觉效果保持一致。

5 结束语

本文针对图像含 α 稳态噪声,首先,基于Meridian分布和TV的统计特性,提出了一种全变

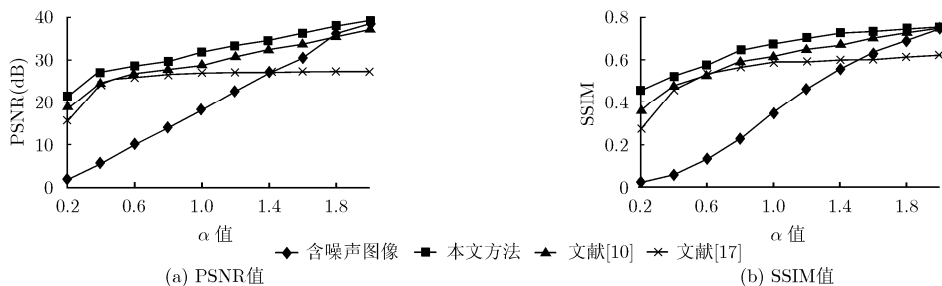


图1 含噪声图像和恢复图像在不同 α 值下的性能比较



图 2 α 稳态噪声环境下各种模型恢复的 Cameraman 图像

分模型去除 α 稳态噪声。此外，为了保证模型解的唯一性，对提出的全变分模型添加了一个二次惩罚项，得到一个严格凸的全变分去噪模型；然后，使用原始-对偶算法对提出的全变分模型进行求解，并证明了该算法的收敛性。最后，进行了仿真实验，并与现有的去噪模型进行了比较，实验结果验证了本文提出的凸全变分去噪模型可以有效去除 α 稳态噪声。

参考文献

- [1] CHANG S G, YU B, and VETTERLI M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, 9(9): 1532-1546. doi: 10.1109/83.862633.
- [2] RAFAEL C G and RICHARD E W. Digital Image Processing[M]. 2nd Edition, Upper Saddle River, USA, Prentice Hall, 2002: 220-275.
- [3] NODES T and GALLAGHER N Jr. Median filter: Some modifications and their properties[J]. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal, Processing*, 1982, 30(5): 739-746. doi: 10.1109/TASSP.1982.1163951.
- [4] BARBU T, BARBU V, BIGA V, et al. A PDE variational approach to image denoising and restoration[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(3): 1351-1361.
- [5] RUDIN L, OSHER S, and FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1/4): 259-268. doi: 10.1016/0167-2789(92)90242-F.
- [6] CHAMBOLLE A. An algorithm for total variation minimization and applications[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 89-97. doi: 10.1023/B:JMIV.0000011325.36760.1e.
- [7] CHAN R, DONG Y, and HINTERMULLER M. An efficient two-phase L^1 -TV method for restoring blurred images with impulse noise[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19(7): 1731-1739. doi: 10.1109/TIP.2010.2045148.
- [8] YANG J, ZHANG Y, and YIN W. An efficient TVL1 algorithm for deblurring multichannel images corrupted by impulsive noise[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(4): 2842-2865. doi: 10.1137/080732894.
- [9] 金正猛, 杨燕. 基于框式约束的快速全变差图像泊松去噪算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(8): 1866-1871. doi: 10.3724/SP.J.1146.2014.00154.
- [10] SCIACCHITANO F, DONG Y, and ZENG T. Variational approach for restoring blurred images with Cauchy noise[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2015, 8(3): 1894-1922. doi: 10.1137/140997816.
- [11] AUBERT G and AUJOL J. A variational approach to

- removing multiplicative noise[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2008, 68(4): 925–946. doi: 10.1137/060671814.
- [12] DONG Y and ZENG T. A convex variational model for restoring blurred images with multiplicative noise[J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2013, 6(3): 1598–1625. doi: 10.1137/120870621.
- [13] CHEN L and ZENG T. A convex variational model for restoring blurred images with large Rician noise[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2015, 53(1): 92–111. doi: 10.1007/s10851-014-0551-y.
- [14] NOLAN J. *Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data*[M]. Birkhauser Boston, 2015: 3–24.
- [15] ZOZOR S, BROSSIER J, and AMBLARD P O. A parametric approach to suboptimal signal detection in alpha-stable noise[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(12): 4497–4509. doi: 10.1109/TSP.2006.882066.
- [16] SADREAZAMI H, AHMAD M O, and SWAMY M N S. Contourlet domain image denoising using the alpha-stable distribution[C]. *IEEE 57th International Midwest Symposium on Circuits and Systems*, College Station, Texas, USA, 2014: 141–144. doi: 10.1109/MWSCAS.2014.6908372.
- [17] AYSAL T C and BARNER K E. Meridian filtering for robust signal processing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2007, 55(8): 3949–3962. doi: 10.1109/TSP.2007.894383.
- [18] KORNPROBST P, DERICHE R, and AUBERT G. Image sequence analysis via partial differential equations[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 1999, 11(1): 5–26. doi: 10.1023/A:1008318126505.
- [19] CHAMBOLLE A and POCK T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2011, 40(1): 120–145. doi: 10.1007/s10851-010-0251-1.
- [20] WEI K, TAI X, CHAN T, *et al.* Primal-dual method for continuous max-flow approaches[C]. *Proceedings of 5th Eccomas Thematic Conference on Computational Vision and Medical Image Processing*, UK, 2016: 17–24. doi: 10.1201/b19241-5.
- [21] CARRILLO R E, BARNER K E, and AYSAL T C. Robust sampling and reconstruction methods for sparse signal in the presence of impulsive noise[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 392–408. doi: 10.1109/JSTSP.2009.2039177.
- [22] ZHOU W, BOVIK A, SHEIKH H, *et al.* Image quality assessment: From error visibility to structural similarity[J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2004, 13(4): 600–612. doi: 10.1109/TIP.2003.819861.
- 杨真真: 女, 1984 年生, 讲师, 研究方向为图像处理、压缩感知。
杨震: 男, 1961 年生, 教授, 博士生导师, 研究方向为压缩感知、网络通信技术。
李雷: 男, 1958 年生, 教授, 研究方向为图像处理、压缩感知。
金正猛: 男, 1982 年生, 副教授, 研究方向为基于偏微分方程的图像处理。