

## 基于平行嵌套阵互协方差的二维波达角联合估计算法

李建峰\* 蒋德富 沈明威  
(河海大学计算机与信息学院 南京 211100)

**摘 要:** 论文提出基于平行嵌套阵互协方差的 2 维(Two Dimensional, 2D)波达角(Direction Of Arrival, DOA)联合估计算法。算法基于两个互相平行的嵌套阵的互协方差生成较长虚拟阵列, 同时将 2 维 DOA 估计问题降维为 1 维 DOA 估计问题。在构造协方差矩阵时, 利用方向矩阵范德蒙特性增加虚拟快拍数, 保证了孔径的最小损失。最后算法基于酉旋转不变技术(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique, ESPRIT)和总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)方法进一步降低噪声影响, 并获得了自动配对的 2 维 DOA 估计。相比传统平行阵下的 DOA 估计算法, 该算法拥有更好的 DOA 估计性能, 能辨识更多的空间信源, 对空间色噪声有更强的鲁棒性。仿真结果验证了算法的有效性。

**关键词:** 2 维 DOA 估计; 酉 ESPRIT; 平行嵌套阵; 互协方差

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2017)03-0670-07

**DOI:** 10.11999/JEIT160488

## Joint Two-dimensional Direction of Arrival Estimation Based on Cross Covariance Matrix of Parallel Nested Array

LI Jianfeng JIANG Defu SHEN Mingwei

(College of Computer and Information, Hohai University, Nanjing 211100, China)

**Abstract:** A Cross Covariance Matrix (CCM) based Two Dimensional (2D) Direction Of Arrival (DOA) estimation algorithm for parallel nested array is proposed. A long virtual array can be achieved based on the CCM between the two parallel nested arrays, and 2D DOA estimation can be transformed to a 1D DOA estimation problem. Thereafter, virtual snapshots are increased by exploiting the Vandermonde structure of direction matrix, and the aperture loss is minimized when constructing covariance matrix from the virtual array. Finally, the proposed algorithm employs unitary Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique (ESPRIT) and Total Least Squares (TLS) to reduce further the influence of noise and achieve automatically paired 2D DOA estimation. Compared to DOA estimation algorithms using conventional parallel array, the proposed algorithm can achieve better DOA estimation performance, identify more signals and is more robust to spatial color noise. The simulation results verify the effectiveness of the proposed algorithm.

**Key words:** Two dimensional DOA estimation; Unitary ESPRIT; Parallel nested array; Cross covariance matrix

### 1 引言

波达角(Direction Of Arrival, DOA)估计是阵列信号处理中的重要问题, 其在无线通信、声呐以及雷达等系统均有广泛应用。为了克服 1 维(One Dimensional, 1D) DOA 估计在处理实际空间信源时的局限, 2D DOA 估计近年来受到较多关注和研

究<sup>[1-4]</sup>, 许多阵列如 L 型阵列<sup>[5]</sup>, 面阵<sup>[6]</sup>等被用来进行有效的 2D 参数估计。文献[7]中提出的双平行阵能以较少的阵元和较低的复杂度获得信号源的 2D DOA 估计, 并可有效解决 2 维 DOA 估计中的角度配对问题, 但文献[7]中提出的 DOA 矩阵法孔径利用率较低。之后文献[8]提出了基于该双平行阵的多重信号分类(MULTiple SIGNAL Classification, MUSIC)方法, 进一步提高了孔径利用率。文献[9]则将传播算子方法(Propagator Method, PM)应用于双平行阵, 并结合借助旋转不变技术的参数估计(Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Technique, ESPRIT)思想, 降低了 2D DOA 估计的复杂度。文献[10]则研究了存在非圆信号时的 2 维

收稿日期: 2016-05-12; 改回日期: 2016-09-06; 网络出版: 2016-11-17

\*通信作者: 李建峰 lijianfengt@126.com

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金(2015B12614), 江苏高校优势学科建设工程

Foundation Items: The Fundamental Research Funds for the Central Universities (2015B12614), A Project Funded by the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions

DOA 估计问题, 而文献[11]则利用多个平行阵来增加可用信息获得方位角的有效估计。然而这些算法均是基于传统紧凑型的均匀阵列, 难以获得较大的自由度(Degrees Of Freedom, DOF), 辨识信号个数有限。

稀疏阵以其能产生较大的有效 DOF 而被广泛关注<sup>[12]</sup>, 如最小冗余阵(Minimum Redundancy Array, MRA)<sup>[13,14]</sup>, 互质阵(Co-Prime Array, CPA)<sup>[15]</sup>以及嵌套阵<sup>[16-19]</sup>等。嵌套阵可利用  $M$  个物理阵元产生  $O(M^2)$  的 DOF<sup>[16]</sup>, 且可产生较多连续虚拟阵元, 避免 DOA 估计模糊问题, 但目前基于嵌套阵的研究大都基于 1D DOA, 没有考虑 2D 情况, 以及其带来的复杂度、配对等问题。

本文将双平行阵与嵌套阵相结合, 提出了基于平行嵌套阵互协方差(Cross Covariance Matrix, CCM)的 2D DOA 估计算法。通过互相平行的两个子阵间的互协方差降低噪声影响, 充分利用嵌套阵特性生成虚拟阵列, 将 2D DOA 估计问题降维为 1D DOA 估计问题。利用虚拟快拍数构造协方差矩阵, 保证有效孔径。最后基于酉 ESPRIT 方法和总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)获得自动配对的 2D DOA 估计的闭式解。该算法在 DOA 估计性能、可辨识信源数以及对色噪声鲁棒性方面, 均优于文献[7]中的 DOA 矩阵法、文献[8]中的求根 MUSIC 方法以及文献[9]中的改进 PM 方法。

本文安排如下: 第 2 节介绍了平行嵌套阵进行 2D DOA 估计的阵列结构和数据模型; 第 3 节则详细阐述了基于平行嵌套阵 CCM 的 2 维 DOA 估计算法; 第 4 节则是算法总结和复杂度分析对比; 第 5 节为实验仿真结果, 而第 6 节是总结。

符号说明:  $(\cdot)^T, (\cdot)^*, (\cdot)^H, (\cdot)^{-1}$  和  $(\cdot)^+$  分别表示矩阵转置、共轭、共轭转置、求逆和求伪逆;  $\text{diag}(\mathbf{v})$  代表对角矩阵, 其对角元素为向量  $\mathbf{v}$  中的元素;  $\mathbf{I}_k$  和  $\mathbf{\Pi}_k$  分别是  $k \times k$  的单位矩阵和反对角单位矩阵;  $\otimes$  和  $\circ$  分别代表 Kronecker 积和 Khatri-Rao 积;  $\text{Re}(\cdot)$  和  $\text{Im}(\cdot)$  是取实部和虚部;  $\text{angle}(\cdot)$  是取相位;  $\text{E}[\cdot]$  代表求期望;  $\text{vec}(\cdot)$  是将矩阵按列拉伸为长矢量。

## 2 数据模型

不同于传统双平行均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA), 为了增加 DOF, 本文采用如图 1 所示的平行嵌套阵来进行空间信号 2 维 DOA 估计。 $M$  元的子阵 1 为紧凑型 ULA, 位于  $Y$  轴, 其阵元间距为半波长( $\lambda/2$ ), 同样为  $M$  元的子阵 2 为稀疏 ULA, 平行于子阵 1, 其阵元间距为  $M\lambda/2$ , 子阵 1 和子阵 2 之间间距为半波长, 具体阵列结构见图 1。假

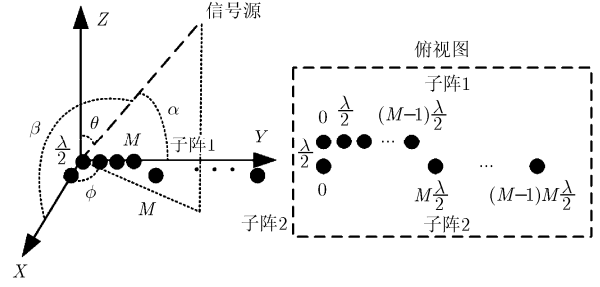


图 1 平行嵌套阵 DOA 估计阵列结构

设空间存在  $K$  个远场窄带信号入射到该阵列上,  $\theta_k$  和  $\phi_k$  为第  $k$  个信号源的仰角和方位角。为方便起见, 根据文献[8], 这里采用信号与  $Y$  轴和  $X$  轴的交角( $\alpha_k$  和  $\beta_k$ )作为信号的 2 维 DOA, 它们与传统仰角和方位角的关系为  $\cos \alpha_k = \sin \theta_k \sin \phi_k$  和  $\cos \beta_k = \sin \theta_k \cos \phi_k$ 。那么两个子阵的输出分别为

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{A}_{y1} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_1(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{A}_{y2} \mathbf{\Phi}_x \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_2(t) \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{A}_{y1} = [\mathbf{a}_{y1}(\alpha_1), \mathbf{a}_{y1}(\alpha_2), \dots, \mathbf{a}_{y1}(\alpha_K)]$  为子阵 1 的方向矩阵, 其第  $k$  列为

$$\mathbf{a}_{y1}(\alpha_k) = [1, e^{-j\pi \cos \alpha_k}, \dots, e^{-j(M-1)\pi \cos \alpha_k}]^T \quad (3)$$

$\mathbf{A}_{y2} = [\mathbf{a}_{y2}(\alpha_1), \mathbf{a}_{y2}(\alpha_2), \dots, \mathbf{a}_{y2}(\alpha_K)]$ , 其第  $k$  列为

$$\mathbf{a}_{y2}(\alpha_k) = [1, e^{-jM\pi \cos \alpha_k}, \dots, e^{-j(M-1)M\pi \cos \alpha_k}]^T \quad (4)$$

$\mathbf{\Phi} = \text{diag}[e^{-j\pi \cos \beta_1}, e^{-j\pi \cos \beta_2}, \dots, e^{-j\pi \cos \beta_K}]$  为一对角矩阵;  $\mathbf{s}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T$  为信源矢量, 信源之间彼此独立,  $s_k(t)$  代表第  $k$  个信源;  $\mathbf{n}_1(t)$  和  $\mathbf{n}_2(t)$  均为 0 均值的加性高斯白噪声, 协方差均为  $\sigma^2 \mathbf{I}_M$ , 且噪声与信号不相关。

## 3 基于平行嵌套阵 CCM 的 2D DOA 估计算法

### 3.1 虚拟阵列生成

将子阵 1 的输出进行逆向排序:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{1z}(t) &= \mathbf{\Pi}_M \mathbf{x}_1(t) = \mathbf{\Pi}_M \mathbf{A}_{y1} \mathbf{s}(t) + \mathbf{\Pi}_M \mathbf{n}_1(t) \\ &= \mathbf{A}_{y1z} \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}_{1z}(t) \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{A}_{y1z}$  为逆向排序后的方向矩阵, 其第  $k$  列为  $\mathbf{a}_{y1z}(\alpha_k) = [e^{-j(M-1)\pi \cos \alpha_k}, e^{-j(M-2)\pi \cos \alpha_k}, \dots, 1]^T$ , 噪声  $\mathbf{n}_{1z}(t) = \mathbf{\Pi}_M \mathbf{n}_1(t)$ 。

逆向排序后的子阵 1 输出和子阵 2 输出之间的 CCM 为

$$\mathbf{R}_C = \text{E}[\mathbf{x}_{1z}(t) \mathbf{x}_2^H(t)] = \mathbf{A}_{y1z} \mathbf{R}_s \mathbf{\Phi}_x^* \mathbf{A}_{y2}^H \quad (6)$$

其中, 对角矩阵  $\mathbf{R}_s = \text{E}[\mathbf{s}(t) \mathbf{s}^H(t)] = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2)$  为信源协方差矩阵,  $\sigma_k^2, k = 1, 2, \dots, K$  表示信号能量。因为噪声之间的不相关性, 通过式(6), 噪声影响可被消除, 包括文献[20]中提到的空间色噪声情形(各阵元噪声能量不一样)。

令  $\mathbf{A} = \mathbf{R}_s \Phi_x^* = \text{diag}(\boldsymbol{\eta})$ , 则

$$\boldsymbol{\eta} = [e^{j\pi \cos \beta_1} \sigma_1^2, e^{j\pi \cos \beta_2} \sigma_2^2, \dots, e^{j\pi \cos \beta_K} \sigma_K^2]^T$$

将互协方差矩阵按列拉伸为一长矢量:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \text{vec}(\mathbf{R}_C) = \text{vec}(\mathbf{A}_{y_{1z}} \mathbf{A} \mathbf{A}_{y_2}^H) \\ &= (\mathbf{A}_{y_2}^* \circ \mathbf{A}_{y_{1z}}) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{A} \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (7)$$

其中,  $\text{vec}(\cdot)$  是将矩阵按列拉伸为长矢量,  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{y_2}^* \circ \mathbf{A}_{y_{1z}}$  为  $\mathbf{A}_{y_2}^*$  和  $\mathbf{A}_{y_{1z}}$  的 Khatri-Rao 乘积, 其第  $k$  列可表示为子阵导向矢量的 kronecker 乘积, 即  $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{y_2}(\alpha_k)^* \otimes \mathbf{a}_{y_{1z}}(\alpha_k)$ , 结合嵌套阵特性, 其可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k &= [e^{-j(M-1)\pi \cos \alpha_k}, e^{-j(M-2)\pi \cos \alpha_k}, \dots, e^{j(M-1)M\pi \cos \alpha_k}]^T \\ &\in \mathbb{C}^{M^2 \times 1} \end{aligned} \quad (8)$$

$\mathbf{a}_k$  为一  $M^2$  长的范德蒙矢量, 式(7)可以看成是以  $\mathbf{A}$  为方向矩阵的输出数据, 此时的虚拟阵列长度达到  $M^2$ , 相比实际物理阵元, 大大增加了可用 DOF, 且此时方向矩阵中仅包含 1 维角度信息, 2D DOA 估计问题被转化为了 1D DOA 估计问题, 从而降低了复杂度。但此时只有单快拍的数据, 无法构造数据协方差矩阵, 因此 ESPRIT 方法无法直接应用。因此需要通过一定的数据构造方法来获得协方差矩阵。

另外, 实际中只能通过有限快拍数求式(6)中的互协方差, 即  $\mathbf{R}_C = (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{1z}(t) \mathbf{x}_2^H(t)$ , 其中  $T$  为快拍数, 所以依然会存在残余的噪声影响。为了进一步降低噪声的影响, 根据文献[16], 需要使构造的数据矩阵的虚拟快拍数大于等于虚拟阵元数, 从而能增强协方差的秩, 有效将噪声能量分配到噪声子空间。

### 3.2 协方差矩阵构造

令  $P = \lfloor M^2/3 \rfloor$  表示小于  $M^2/3$  的最大整数, 并将  $2P$  设为新的阵列长度,  $P$  的选取取决于虚拟快拍生成方法, 我们会在下面进行相应解释。现在  $\mathbf{r}$  的第 1 到  $2P$  行可以表示为

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\eta} \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{A}_1$  为由  $\mathbf{A}$  的第 1 到  $2P$  行组成, 依然为一范德蒙矩阵。同理, 依次取  $\mathbf{r}$  得第  $l$  行至第  $l+2P-1$  行, 其中  $l = 1, 2, \dots, L, L = M^2 - 2P + 1 > P$ , 最终生成  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_L$ , 它们可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\eta} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{A}_1 \Phi_y \boldsymbol{\eta} \\ &\vdots \\ \mathbf{r}_L &= \mathbf{A}_1 \Phi_y^{L-1} \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中,  $\Phi_y = \text{diag}[e^{j\pi \cos \alpha_1}, e^{j\pi \cos \alpha_2}, \dots, e^{j\pi \cos \alpha_K}]$ 。将这些矢量进行横排, 则可以得到

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_L]$$

$$= \mathbf{A}_1 [\boldsymbol{\eta}, \Phi_y \boldsymbol{\eta}, \dots, \Phi_y^{L-1} \boldsymbol{\eta}] = \mathbf{A}_1 \mathbf{B} \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{B} = [\boldsymbol{\eta}, \Phi_y \boldsymbol{\eta}, \dots, \Phi_y^{L-1} \boldsymbol{\eta}]$ , 可看作信源矩阵,  $L$  为快拍数, 而  $\mathbf{A}_1$  可看作方向矩阵。但此时  $\mathbf{Y}$  为一  $2P \times L$  的矩阵, 快拍数依然小于虚拟阵元数, 所以需要扩展虚拟快拍数。

因为  $\mathbf{A}_1$  为一范德蒙矩阵, 其满足

$$\Pi_{2P} \mathbf{A}_1^* = \mathbf{A}_1 \Phi_y^{(1-2P)} \quad (12)$$

因此定义增广矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= [\mathbf{Y}, \Pi_{2P} \mathbf{Y}^* \Pi_L] \\ &= [\mathbf{A}_1 \mathbf{B}, \mathbf{A}_1 \Phi_y^{(1-2P)} \mathbf{B}^* \Pi_L] \\ &= \mathbf{A}_1 [\mathbf{B}, \Phi_y^{(1-2P)} \mathbf{B}^* \Pi_L] = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_z \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $\mathbf{B}_z = [\mathbf{B}, \Phi_y^{(1-2P)} \mathbf{B}^* \Pi_L]$ 。由式(11)到式(13)利用了  $\mathbf{A}_1$  的范德蒙特性生成了 1 倍的虚拟快拍数, 因此没有发生进一步的孔径损失。此时的数据矩阵  $\mathbf{Z}$  为  $2P \times 2L$  的矩阵, 由上可知  $L > P$ , 能有效将噪声能量分配到噪声子空间, 从而保证信号子空间的准确性, 也正因此我们才选取  $P$  约为虚拟阵列长度的  $1/3$ , 保证  $P$  略小于  $L$ , 从而保证孔径的最小损失。此时可以应用 ESPRIT 方法进行 DOA 估计。由式(13)可知  $\mathbf{Z}$  的协方差矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_z &= [1/(2L)] \mathbf{Z} \mathbf{Z}^H \\ &= (1/2) (\mathbf{R}_y + \Pi_{2P} \mathbf{R}_y^* \Pi_{2P}) \end{aligned} \quad (14)$$

其中,  $\mathbf{R}_y = (1/L) \mathbf{Y} \mathbf{Y}^H$  为  $\mathbf{Y}$  的协方差。为了降低复杂度, 我们采用酉变换的思想<sup>[21, 22]</sup>, 引入酉矩阵为

$$\mathbf{Q}_{2P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_P & j\mathbf{I}_P \\ \Pi_P & -j\Pi_P \end{bmatrix} \quad (15)$$

酉矩阵满足  $\Pi_{2P} \mathbf{Q}_{2P}^* = \mathbf{Q}_{2P}$ ,  $\mathbf{Q}_{2P}^H \Pi_{2P} = \mathbf{Q}_{2P}^T$ 。对式(14)进行酉变换,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_t &= \mathbf{Q}_{2P}^H \mathbf{R}_z \mathbf{Q}_{2P} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_{2P}^H (\mathbf{R}_y + \Pi_{2P} \mathbf{R}_y^* \Pi_{2P}) \mathbf{Q}_{2P} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{2P}^H \mathbf{R}_y \mathbf{Q}_{2P} + \mathbf{Q}_{2P}^H \Pi_{2P} \mathbf{R}_y^* \Pi_{2P} \mathbf{Q}_{2P}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_{2P}^H \mathbf{R}_y \mathbf{Q}_{2P} + \mathbf{Q}_{2P}^T \mathbf{R}_y^* \mathbf{Q}_{2P}^*) \\ &= \text{Re}(\mathbf{Q}_{2P}^H \mathbf{R}_y \mathbf{Q}_{2P}) \end{aligned} \quad (16)$$

此时协方差矩阵变为实数矩阵, 可降低之后特征分解的复杂度, 且其可直接从  $\mathbf{R}_y$  构造获得, 酉变换之后的方向矩阵由  $\mathbf{A}_1$  变为  $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{Q}_{2P}^H \mathbf{A}_1$ 。

### 3.3 2 维 DOA 估计

方向矩阵  $\mathbf{A}_1$  为一范德蒙矩阵, 满足旋转不变关系:

$$\mathbf{J}_1 \mathbf{A}_1 \Phi_y = \mathbf{J}_2 \mathbf{A}_1 \quad (17)$$

其中,  $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{I}_{(2P-1) \times (2P-1)}, \mathbf{0}_{(2P-1) \times 1}]$  和  $\mathbf{J}_2 = [\mathbf{0}_{(2P-1) \times 1}, \mathbf{I}_{(2P-1) \times (2P-1)}]$  为选择矩阵, 分别选择  $\mathbf{A}_1$  的前  $(2P-1)$  行和后  $(2P-1)$  行。由式(16)可知, 酉变换之后, 方向矩阵由  $\mathbf{A}_1$  变为  $\mathbf{\Omega}$ , 根据文献[21], 式(17)在酉变换之后转变为

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Phi}_r = \mathbf{K}_2 \mathbf{\Omega} \quad (18)$$

其中,  $\mathbf{K}_1 = \text{Re}(\mathbf{Q}_{2P-1}^H \mathbf{J}_2 \mathbf{Q}_{2P})$ ,  $\mathbf{K}_2 = \text{Im}(\mathbf{Q}_{2P-1}^H \mathbf{J}_2 \mathbf{Q}_{2P})$  为新的实数选择矩阵,  $\mathbf{\Phi}_r = \text{diag}(\tan(\pi \cos \alpha_1 / 2), \dots, \tan(\pi \cos \alpha_K / 2))$  为实数对角矩阵, 包含  $\alpha$  角信息。

式(16)中得到的实数协方差进行特征分解之后, 其最大的  $K$  个特征值对应的特征矢量称为信号子空间, 记为  $\mathbf{E}_s$ , 其和方向矩阵之间满足  $\mathbf{E}_s = \mathbf{\Omega} \mathbf{T}$ , 其中  $\mathbf{T}$  为一个  $K \times K$  的非奇异矩阵。将  $\mathbf{E}_s = \mathbf{\Omega} \mathbf{T}$  代入式(18), 得到

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{E}_s \mathbf{\Psi}_r = \mathbf{K}_2 \mathbf{E}_s \quad (19)$$

其中,  $\mathbf{\Psi}_r = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{\Phi}_r \mathbf{T}$ , 其特征值为  $\mathbf{\Phi}_r$  的对角元素。通过最小二乘(Least Squares, LS), 即  $\mathbf{\Psi}_r = (\mathbf{K}_1 \mathbf{E}_s)^+ \cdot \mathbf{K}_2 \mathbf{E}_s$  得到  $\mathbf{\Psi}_r$  的解, 并对其进行特征分解, 得到特征值  $\hat{u}_k, k = 1, 2, \dots, K$ , 那么  $\alpha$  角可以由式(20)估计出来。

$$\hat{\alpha}_k = \arccos(2 \arctan(\hat{u}_k) / \pi) \quad (20)$$

回顾式(7),  $\mathbf{r} = \mathbf{A} \boldsymbol{\eta}$ , 由式(20)得到  $\alpha$  角之后, 亦即得到了方向矩阵  $\mathbf{A}$ , 因此只需根据式(7), 通过 LS 法得到  $\boldsymbol{\eta}$ , 即可得到  $\beta$  角的估计。但正如 3.1 节所述, 因为有限快拍数, 式(7)中会存在一定的残余噪声影响, 因此这里我们应用总体最小二乘(Total Least Squares, TLS)法进一步降低误差。

令

$$\mathbf{W} = [\mathbf{A} \ \mathbf{r}] \quad (21)$$

对  $\mathbf{W}$  进行奇异值分解, 其最小奇异值对应的右奇异向量为  $\mathbf{v}_s$ , 取其前  $K$  项记为  $\mathbf{v}_{s1}$ , 最后一项记为  $\mathbf{v}_{s2}$ , 则  $\boldsymbol{\eta}$  的估计为

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} = -\mathbf{v}_{s1} / \mathbf{v}_{s2} \quad (22)$$

最终  $\beta$  角的估计为

$$\hat{\beta}_k = \arccos(\text{angle}(\hat{\boldsymbol{\eta}}(k)) / \pi), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (23)$$

其中,  $\hat{\boldsymbol{\eta}}(k)$  为  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$  的第  $k$  个元素,  $\text{angle}(\bullet)$  为取相位函数。因为  $\beta$  角的估计建立在估计出  $\alpha$  角的基础上, 二者之间因为式(7)存在一一对应的关系, 因此算法获得的 2 维 DOA 是自动配对的。

## 4 算法总结和分析

### 4.1 算法步骤总结

将基于平行嵌套阵 CCM 的 2 维 DOA 估计算法的步骤总结如下:

步骤 1 将子阵 1 输出逆向排序, 并求其与子阵 2 输出的 CCM,  $\mathbf{R}_C = (1/T) \sum_{t=1}^T \mathbf{x}_{1z}(t) \mathbf{x}_2^H(t)$ ;

步骤 2 将互协方差拉伸成矢量  $\mathbf{r}$ , 并通过设定  $P$  和  $L$ , 根据式(9)~式(13)构造数据矩阵  $\mathbf{Z}$ ;

步骤 3 根据式(16)对  $\mathbf{Z}$  的协方差进行酉变换, 特征分解之后获得信号子空间  $\mathbf{E}_s$ , 根据式(19)~式(20)获得  $\alpha$  角的估计;

步骤 4 根据所得  $\alpha$  角的估计构造出方向矩阵, 根据式(21)~式(23), 通过 TLS 获得  $\beta$  角的估计。

### 4.2 算法优点总结

将基于平行嵌套阵 CCM 的 2 维 DOA 估计算法的优点总结如下:

(1) 基于 CCM 生成较长虚拟阵列, 可处理更多信源;

(2) 将 2D DOA 转变为 1D DOA 估计问题, 并基于酉变换增加虚拟快拍, 保证有效孔径的同时降低复杂度;

(3) CCM 对空间色噪声有较强的鲁棒性;

(4) 得到  $\alpha$  角的估计之后, 利用 TLS 降低了  $\beta$  角的估计误差, 且  $\alpha$  角和  $\beta$  角自动配对。

### 4.3 复杂度分析

所提算法运算的主要运算复杂度包括求协方差、特征分解、LS 以及 TLS 等, 涉及到的复乘次数共约  $O(M^2 T + 2P^2(2L + P + 4K) + 4PK^2 + K^3)$  次。基于同样阵元数的平行阵, 文献[7]中的 DOA 矩阵法需要复乘次数约  $O(2M^2 T + 4M^3 + MK^2)$  次, 文献[8]中的求根 MUSIC 方法需要复乘次数约  $O(4M^2 T + 8M^3 + M^2 K + 4M)$  次, 以及文献[9]中的改进 PM 方法需要复乘次数约  $O(4M^2 T + 4M^2 K + 4MK^2 + K^3)$  次。所提算法无需谱峰搜索以及迭代等, 计算复杂度跟 DOA 矩阵法、求根 MUSIC 方法以及改进 PM 方法处于同一级别。

### 4.4 最大可辨识信源数分析

根据式(13), 算法最终采用的虚拟数据长度为  $2P$ , 结合后期采用的 ESPRIT 方法进行子阵选择, 可知算法最大可辨识信源数为  $2P - 1$ , 即  $2 \lfloor M^2 / 3 \rfloor - 1$ , 这一般已经大于实际物理阵元数  $2M$ 。DOA 矩阵法<sup>[7]</sup>和改进 PM 方法<sup>[9]</sup>可辨识  $M$  个信源, 而文献[8]中的求根 MUSIC 可辨识  $2(M-1)$  个信源, 均小于所提算法的可辨识信源数。在下一节, 我们将通过一些仿真验证这一结果。

## 5 仿真结果

采用求根均方误差(Root Mean Square Error, RMSE)衡量算法 DOA 估计性能, 其定义为

RMSE

$$= \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[ (\hat{\alpha}_{k,n} - \alpha_k)^2 + (\hat{\beta}_{k,n} - \beta_k)^2 \right]} \quad (24)$$

其中,  $\hat{\alpha}_{k,n}$  是 DOA 角  $\alpha_k$  第  $n$  次蒙特卡罗实验的估计值,  $\hat{\beta}_{k,n}$  是 DOA 角度  $\beta_k$  第  $n$  次蒙特卡罗实验的估计值,  $N$  是总共的实验次数, 实验中取  $N=500$ 。假设空间存在  $K=3$  个信源, 其 DOA 角度分别为  $(\alpha_1, \beta_1) = (50^\circ, 60^\circ)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2) = (65^\circ, 45^\circ)$  以及  $(\alpha_3, \beta_3) = (80^\circ, 75^\circ)$ 。阵元数取  $M=4$ , 快拍数  $T=128$ 。

图 2 给出了所提算法在所有 500 次仿真下 2 维 DOA 估计的散布图, 实心点代表估计值, 十字符号代表真实 DOA 值。从图中可以知道, 算法可有效估计出信源的 2 维 DOA, 且 2 维 DOA 自动配对。

图 3 则是所提算法与文献[7]中的 DOA 矩阵法、文献[8]中的求根 MUSIC 方法以及文献[9]中的改进 PM 方法的 DOA 估计性能对比, 在 RMSE 的衡量

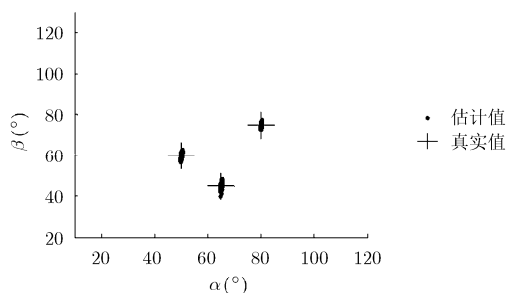


图 2 所提算法 2 维 DOA 估计结果 ( $N=500$  次仿真,  $\text{SNR}=9$  dB)

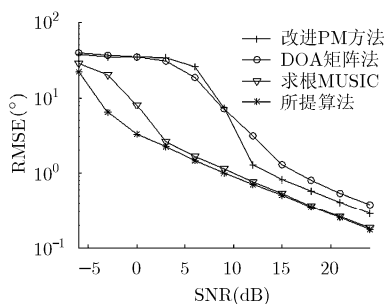


图 3 算法 2 维 DOA 估计性能对比

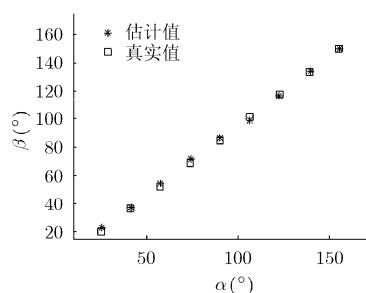


图 5  $K=9$  情况下, 所提算法 DOA 估计结果 ( $\text{SNR}=10$  dB)

下, 可以发现所提算法的角度估计性能优于其余算法, 尤其是在低信噪比 (Signal to Noise Ratio, SNR) 下。主要原因是所提算法利用嵌套阵特性扩展了 DOF, 同时利用互协方差降低了噪声影响, 因此可获得较好的估计性能。

图 4 和图 5 给出了信源数  $K$  较大的情况下, 算法的估计结果。图 4 中, 因为  $M=4$ , 而此时  $K=6$ , 已经大于了 DOA 矩阵法和改进 PM 方法的最大处理信源数, 所以它们此时均已失效, 而  $K=6$  也是求根 MUSIC 方法的最大可处理信源数, 在一定的噪声下, 此时其估计结果也存在较大误差。而根据以上分析, 所提算法最大可辨识信源数为  $2\lfloor M^2/3 \rfloor - 1 = 9$ , 所以所提算法依然可以正常工作。在图 5 中给出了  $K=9$  时所提算法的估计结果, 可以发现算法能准确辨识出所有信源的 2 维 DOA。

图 6 给出了当噪声不再是白噪声, 而是文献[20]中采用的空间色噪声时 (噪声能量随机分布), 各算法的估计性能。可以发现, 此时在其余算法性能出现下降的时候, 所提算法依然保持了有效的 DOA 估计性能, 从而验证了第 3.1 节中所说的算法对空间色噪声的鲁棒性。

## 6 结束语

本文将传统平行阵与嵌套阵相结合, 提出了基于平行嵌套阵 CCM 的 2D DOA 估计算法。该算法可利用平行嵌套阵的 CCM 获得较大 DOF, 将 2D DOA 问题转变为 1D DOA 估计, 最终结合西

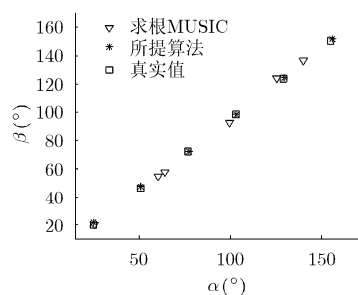


图 4  $K=6$  情况下, 算法 DOA 估计结果对比 ( $\text{SNR}=10$  dB)

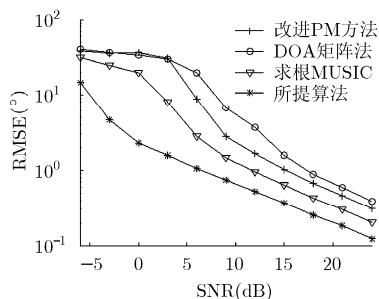


图 6 空间色噪声情形下算法 2 维 DOA 估计性能对比

ESPRIT 和 TLS 方法获得自动配对的 2D DOA 估计的闭式解，复杂度较低。通过分析和仿真，该算法在 DOA 估计性能、可辨识信源数以及对色噪声鲁棒性方面，均优于传统方法。所提算法可应用于无线信号测向以及雷达目标定位等系统，但所提算法基于互协方差的矢量化来获得虚拟孔径，因此需要信号之间不相干，对于相干信号，则需要一些前期的解相干手段，这也是我们未来研究方向。

### 参 考 文 献

- [1] GERSHMAN A B, RÜBSAMEN M, and PESAVENTO M. One-and two-dimensional direction-of-arrival estimation: An overview of search-free techniques [J]. *Signal Processing*, 2010, 90(5): 1338–1349. doi: 10.1016/j.sigpro.2009.12.008.
- [2] CHEN H, ZHU W P, and SWAMY M N S. Real-valued ESPRIT for two-dimensional DOA estimation of noncircular signals for acoustic vector sensor array[C]. *IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, Lisbon, Portugal, 2015: 2153–2156. doi: 10.1109/ISCAS.2015.7169106.
- [3] 蔡晶晶, 鲍丹, 李鹏, 等. 强约束优化降维 MUSIC 二维 DOA 估计[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(5): 1113–1118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.  
CAI Jingjing, BAO Dan, LI Peng, *et al.* Two-dimensional DOA estimation using reduced-dimensional MUSIC algorithm with strong-constraint optimization[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(5): 1113–1118. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01127.
- [4] 张小飞, 张立岑, 孙华普, 等. 双平行线阵中基于 Euler 变换传播算子的二维 DOA 估计算法[J]. *南京航空航天大学学报*, 2015, 47(3): 324–331. doi: 10.16356/j.1005-2615.2015.03.002.  
ZHANG Xiaofei, ZHANG Licen, SUN Huapu, *et al.* Two-dimensional DOA estimation algorithm for two parallel linear arrays via Euler transformation and propagator method[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, 2015, 47(3): 324–331. doi: 10.16356/j.1005-2615.2015.03.002.
- [5] GU J F, ZHU W P, and SWAMY M N S. Joint 2-D DOA estimation via sparse L-shaped array[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(5): 1171–1182. doi: 10.1109/TSP.2015.2389762.
- [6] ZHANG W, LIU W, WANG J, *et al.* Computationally efficient 2-D DOA estimation for uniform rectangular arrays [J]. *Multidimensional Systems & Signal Processing*, 2014, 25(4): 847–857. doi: 10.1007/s11045-013-0267-y.
- [7] YIN Q Y, NEWCOMB R W, and ZOU L H. Estimating 2-D angles of arrival via two parallel linear arrays[C]. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Glasgow, UK, 1989: 2803–2806. doi: 10.1109/ICASSP.1989.267051.
- [8] XIA T, ZHENG Y, WAN Q, *et al.* Decoupled estimation of 2-D angles of arrival using two parallel uniform linear arrays [J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2007, 55(9): 2627–2632. doi: 10.1109/TAP.2007.904143.
- [9] LI J, ZHANG X, and CHEN H. Improved two-dimensional DOA estimation algorithm for two-parallel uniform linear arrays using propagator method[J]. *Signal Processing*, 2012, 92(12): 3032–3038. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.06.010.
- [10] CHEN H, HOU C, LIU W, *et al.* Efficient two-dimensional direction-of-arrival estimation for a mixture of circular and noncircular sources[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(8): 1–9. doi: 10.1109/JSEN.2016.2517128.
- [11] YANG L, LIU S, LI D, *et al.* Fast 2D DOA estimation algorithm by an array manifold matching method with parallel linear arrays[J]. *Sensors*, 2016, 16(3): 274–289. doi: 10.3390/s16030274.
- [12] 崔琛, 梁浩, 余剑. 稀疏阵列 MIMO 雷达高精度收发角度联合估计[J]. *应用科学学报*, 2015, 33(5): 527–540. doi: 10.3969/j.issn.0255-8297.2015.05.007.  
CUI Chen, LIANG Hao, and YU Jian. Joint DOD and DOA estimation with high accuracy in bistatic MIMO radar using sparse array[J]. *Journal of Applied Sciences*, 2015, 33(5): 527–540. doi: 10.3969/j.issn.0255-8297.2015.05.007.
- [13] MOFFET A. Minimum-redundancy linear arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1968, 16(2): 172–175. doi: 10.1109/TAP.1968.1139138.
- [14] HU N, YE Z, XU X, *et al.* DOA estimation for sparse array via sparse signal reconstruction[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2013, 49(2): 760–773. doi: 10.1109/TAES.2013.6494379.
- [15] VAIDYANATHAN P P and PAL P. Sparse sensing with co-prime samplers and arrays[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(2): 573–586. doi: 10.1109/TSP.2010.2089682.
- [16] PAL P and VAIDYANATHAN P P. Nested arrays: a novel approach to array processing with enhanced degrees of freedom[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, 58(8): 4167–4181. doi: 10.1109/TSP.2010.2049264.
- [17] 杨杰, 廖桂生. 基于空域稀疏性的嵌套 MIMO 雷达 DOA 估计算法[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(11): 2698–2704. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01900.  
YANG Jie and LIAO Guisheng. A spatial sparsity-based DOA estimation method in nested MIMO radar[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(11):

- 2698-2704. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.01900.
- [18] WU N and LIANG Q. Underwater DOA estimation based on nested array[C]. IEEE Military Communications Conference, Tampa, FL, USA, 2015: 216-221. doi: 10.1109/MILCOM.2015.7357445.
- [19] 丁姗姗, 张永顺, 牛超, 等. 一种基于 Khatri-Rao 子空间的非均匀稀疏阵列[J]. 空军工程大学学报:自然科学版, 2015, 16(5): 78-82. doi: 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.05.019.
- DING Shanshan, ZHANG Yongshun, NIU Chao, *et al.* A novel sparse linear array geometry via Khatri-Rao subspace [J]. *Journal of Air Force Engineering University(Natural Science Edition)*, 2015, 16(5): 78-82. doi: 10.3969/j.issn.1009-3516.2015.05.019.
- [20] 陈建峰, 吴云韬, 张贤达. 色噪声环境下的快速 DOA 估计算法[J]. 西安电子科技大学学报:自然科学版, 2004, 30(2): 151-154. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2003.02.003.
- CHEN Jianfeng, WU Yuntao, and ZHANG Xianda. A novel method for estimating DOA in the presence of unknown colored noise fields[J]. *Journal of Xidian University (Natural Science Edition)*, 2004, 30(2): 151-154. doi: 10.3969/j.issn.1001-2400.2003.02.003.
- [21] LI J and ZHANG X. Unitary subspace-based method for angle estimation in bistatic MIMO radar[J]. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 2014, 33(2): 501-513. doi: 10.1007/s00034-013-9653-9.
- [22] STEINWANDT J, ROEMER F, and HAARDT M. ESPRIT-Type algorithms for a received mixture of circular and strictly non-circular signals[C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, South Brisbane, QLD, Australia, 2015: 2809-2813. doi: 10.1109/ICASSP.2015.7178483.
- 李建峰: 男, 1988 年生, 讲师, 研究方向为阵列信号处理、雷达信号处理.
- 蒋德富: 男, 1963 年生, 教授, 研究方向为阵列信号处理技术、雷达通信集成系统的跟踪制导及目标识别技术.
- 沈明威: 男, 1981 年生, 副教授, 研究方向为自适应阵列技术、雷达信号处理.