

## 迭代优化最小化唯相位波束形成

吴凯\* 苏涛 李强

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室 西安 710071)

(西安电子科技大学信息感知技术协同创新中心 西安 710071)

**摘要:** 为了增强唯相位波束形成(Phase-Only Beamforming, POB)的干扰和噪声抑制性能,提高非凸 POB 权值求解的实时性,该文设计了迭代优化最小化(Iterative Majorization Minimization, IMM)唯相位最小方差无失真响应波束形成器(Minimum Variance Distortion-less Response Beamformer, MVDRB)。将无失真响应约束转化成最大化期望方向阵列响应,推导了二次型目标函数的上界,得到 IMM-POB 优化模型,并进一步推导出每次迭代的闭式最优解。仿真分析表明所设计的 IMM-POB: 在相同输入信噪比下,可获得高于现有迭代算法和最优 MVDRB 的信噪比改善;干扰抑制性能几乎完全逼近最优 MVDRB,且具有更优的噪声抑制性;受快拍数影响较小;闭式最优权仅包含单次矩阵和向量乘法,使算法具有较强的实时性,可应用于大规模阵列。

**关键词:** 大规模阵列;波束形成;唯相位;最小方差无失真响应;优化最小化

**中图分类号:** TN911.7

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1009-5896(2017)03-0662-08

**DOI:** 10.11999/JEIT160472

## Phase-only Beamforming via Iterative Majorization Minimization

WU Kai SU Tao LI Qiang

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Collaborative Innovation Center of Information Sensing and Understanding, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** To improve the interference and noise suppression ability of Phase-Only Beamforming (POB) and the real-time performance to obtain the optimal weight of the non-convex POB, a phase-only Minimum Variance Distortion-less Response Beamformer (MVDRB) via the Iterative Majorization Minimization (IMM) algorithm is designed. The distortion-less response constraint is transformed into maximizing array response in the desired direction. The upper bound function of the objective function in quadratic form is derived which generates the IMM-POB model. The optimal weight in closed-form for each iteration is further deduced. Simulation analysis illustrates that the proposed IMM-POB can obtain better signal to interference and noise ratio improvement compared with the existing iterative POB algorithms and the optimal MVDRB; its interference suppression ability approximates the optimal MVDRB with better noise suppression ability; it is much less sensitive to the number of array taps compared with the optimal MVDRB; it has strong real-time performance and can be applied to large-scale array.

**Key words:** Large-scale array; Beamforming; Phase-only; Minimum variance distortion-less response; Majorization minimization

### 1 引言

波束形成技术广泛应用于雷达、通信、声呐和医学等领域,通过调整阵列发射或接收权值,实现波束赋形、低副瓣和自适应干扰抑制等功能<sup>[1-3]</sup>。按照是否对各阵元发射/接收信号施加恒模约束,可

分为幅相加权和唯相位波束形成(Phase-Only Beamforming, POB)。POB 具有较强的工程实用意义:可以充分利用微波组件功率,避免能量损失<sup>[4]</sup>;由于仅需要调整接收相位,可通过移相器直接实现,降低系统复杂度,提高系统稳定性<sup>[5]</sup>。另外,由于移相器的广泛应用,已有的天线阵列系统可通过少量改进实现干扰置零等设计,节约已有系统升级成本;且考虑大规模天线阵列校准的难度和复杂度,一次校准之后阵列的幅度加权通常保持不变<sup>[6]</sup>,此时只能通过 POB 获得期望波束响应。相比于幅相加权波束

收稿日期:2016-05-10; 改回日期:2016-09-12; 网络出版:2016-11-14

\*通信作者:吴凯 ookaykay@163.com

基金项目:国家自然科学基金(51405364, 51305323)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (51405364, 51305323)

形成器设计, POB 由于具有恒模约束, 是非凸多模问题。国内外已存在大量针对 POB 的优化设计和求解方法, 可以总结为 3 类: 启发式方法<sup>[7]</sup>、全局优化<sup>[4, 8]</sup>、局部优化<sup>[3, 5-7, 9-17]</sup>。启发式算法效率低, 其解虽落在可行域内, 但不能保证收敛到全局或局部最优解。全局优化算法的收敛性同样难以保证, 且求解时间长, 难以适用于大规模阵列。局部优化方法虽然不能保证收敛到全局最优解(与构造的目标函数有关), 但由于该类方法具有相对稳定的收敛特性, 且执行效率高, 得到较多的重视和发展。

POB 局部优化的一个重要途径是转化成经典线性或者非线性优化问题, 并通过数值方式求解<sup>[9-13]</sup>。文献[9]利用拉格朗日乘子法去除恒模约束, 通过数值方式求解得到的非线性规划问题, 该方法难以同时形成多个零点。文献[10]采用交替迭代优化的思想, 在假设其余阵元相位固定的情况下依次优化每个阵元的相位加权。文献[11]提出基于谢昆诺夫单位圆的唯相位零陷算法, 将阵列方向图表示成  $z$  平面上多项式乘积的形式, 通过调整多项式根的位置形成干扰零陷。文献[10, 11]算法复杂度高, 且都需要多次迭代, 运算量大, 难以实时实现。文献[12]以阵列输出信干噪比(Signal to Interference and Noise Ratio, SINR)为目标函数, 通过共轭梯度法和牛顿迭代法来搜索唯相位最优权, 需要求解 Hesse 矩阵及其逆矩阵, 且容易陷入局部最优。文献[13]提出基于直接数据域的唯相位最小二乘波束形成算法, 并通过共轭梯度法求解相位权重, 但存在自适应方向图旁瓣电平较高等不足。

POB 设计的另一个重要分支是凸优化和相位扰动: 凸优化技术已广泛应用于阵列天线设计中<sup>[3]</sup>。为了利用凸优化实现非凸 POB, 文献[3, 6]利用半正定松弛技术来优化唯相位问题, 在指定角度范围内可以形成比较宽的凹槽零陷。凸优化方法仅能解决 POB 设计的松弛或近似问题, 难以保证 POB 的设计性能, 且凸优化的求解计算复杂度高, 不利于实时处理<sup>[18]</sup>; 文献[14]在小相位扰动的假设下, 推导了唯相位干扰置零权值的闭式解。文献[15]将相位权重映射到波束空间中, 从而将搜索空间维数从阵元数降到干扰数, 通过小相位扰动算法在指定方向形成零陷。文献[16]提出了大相位扰动算法, 但会在方向图的对称位置形成干扰零陷。文献[17]利用唯相位加权在方向图指定角度范围内形成宽的零陷, 并使用文献[15]中方法在波束空间中使用搜索算法来得到唯相位权重。文献[5]借助小相位扰动, 利用一阶泰勒展开近似, 将非凸 POB 转化成迭代二阶锥规划(Iterative Second Order Cone Programming,

ISOCP)问题, 可利用内点法、序列二次规划等方式求解, 是目前性能较好且实时性较强的设计。扰动法将权值的优化设计转化成扰动量的估计, 但扰动量难以确定, 且 POB 性能易受扰动量的影响。

为了提高 POB 的干扰噪声抑制性能和设计实时性, 本文主要研究了唯相位最小方差无失真响应波束形成器(Minimum Variance Distortion-less Response Beamformer, MVDRB)设计。首先, 将无失真响应约束转化成最大化期望方向阵列响应, 并添加在原最小方差目标函数中; 然后, 借助优化最小化(Majorization Minimization, MM)算法<sup>[19, 20]</sup>, 寻求所得二次型目标函数的上界, 构造了以新的上界函数为目标函数, 满足恒模约束的迭代 POB 算法, 命名为迭代优化最小化(Iterative MM-POB, IMM-POB)算法, 推导了每一次迭代的闭式最优解, 形式简单, 仅包含单次矩阵和向量乘法, 保证了 IMM-POB 算法的实时性。最后, 仿真验证了本文 IMM-POB 的有效性。

## 2 问题描述

考虑任意阵列, 图 1 给出了 3 维直角坐标系下的阵元位置和回波示意图。

假设有  $N$  个阵元和  $K$  个互不相关的回波信号(由 1 个期望信号和  $K-1$  个干扰信号组成)。则  $t$  时刻阵元接收基带信号构成的快拍矢量为

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \mathbf{a}(\theta_2) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_K)] \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{s}(t) \in \mathbb{C}^{K \times 1}$  位于  $K$  维复信号空间, 为  $K$  个回波信号源  $t$  时刻的基带信号,  $\mathbf{n}(t) \in \mathbb{C}^{N \times 1}$  位于  $N$  维复信号空间, 为  $N$  个阵元接收的噪声信号矢量, 且噪声与各回波信号不相关,  $\mathbf{a}(\theta_k) \in \mathbb{C}^{N \times 1} (1 \leq k \leq K)$  为回波信号源对应的阵列导向矢量。

$$\mathbf{a}(\theta_k) = \begin{bmatrix} g_1(\theta_k) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{p}_k} & g_2(\theta_k) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{p}_k} & \cdots & g_N(\theta_k) e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{r}_N \cdot \mathbf{p}_k} \end{bmatrix}^H \quad (2)$$

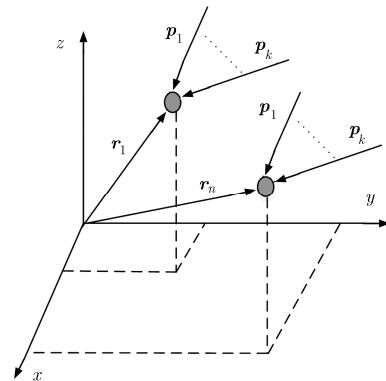


图1 阵列几何模型

其中,  $\lambda$  为信号波长,  $\mathbf{r}_n$  为  $N$  个阵元的位置矢量,  $\mathbf{p}_k$  为  $K$  个回波源各自的单位传播矢量,  $g_n(\theta_k)$  为  $N$  个阵元各自在  $\theta_k$  方向的阵元增益, 其中  $1 \leq n \leq N$ 。在 1 维等距均匀线阵(阵元间距为半波长), 且阵元为全向天线的情况下, 式(2)的通式可以简化为  $e^{j\pi n \sin \theta_k}$ 。  $t$  时刻阵列的合成信号为  $y(t) = \mathbf{w}^H(t)\mathbf{x}(t)$ , 其中  $\mathbf{w}(t)$  为  $t$  时刻的阵列加权矢量。

传统 MVDRB 要求阵列保证特定方向无失真的条件下, 输出功率最小, 因而可以描述为式(3)所示的最优问题:

$$\min_w E[|y(t)|^2] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1 \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{R}_{xx}$  是回波信号的相关矩阵,  $\mathbf{a}(\theta_d)$  为期望方向的导向矢量。在唯相位波束形成器设计中, 仅能对各个阵元接收信号的相位进行调整, 在式(3)优化问题中添加模 1 约束, 得到

$$\begin{aligned} \min_w \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1; |w_n| = 1, 1 \leq n \leq N \end{aligned} \quad (4)$$

该问题为非凸多模问题, 难以在多项式时间内精确求解。为了与文献[5]对比, 首先给出其 ISOCP 算法模型。利用权值扰动, 即在权值  $\mathbf{w}$  的基础上增加相位扰动项  $e^{j\Delta}$ , 并利用一阶泰勒展开, 将式(4)转化成

$$\begin{aligned} \min_{e^{(n+1)}} \quad & \mathbf{w}^{(n)H} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}^{(n)} + \mathbf{g}_1^{(n)H}(\mathbf{w}^{(n)}) e^{(n+1)}, \\ \text{s.t.} \quad & \left| \mathbf{w}^{(n)H} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}^{(n)} + \mathbf{g}_2^{(n)H}(\mathbf{w}^{(n)}) e^{(n+1)} - \frac{l+u}{2} \right| \leq \frac{u-l}{2}, \\ & \|e^{(n+1)}\| \leq e_{\max} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{w}^{(n)} = \mathbf{w}^{(n-1)} \odot \exp(j\mathbf{e}^{(n)})$ ,  $\odot$  表示 Hadamard 乘积,  $\mathbf{g}(\mathbf{w})|_A = \text{Im}[\text{diag}(\mathbf{A}\mathbf{w}\mathbf{w}^H - \mathbf{w}\mathbf{w}^H\mathbf{A})]$ , 其中  $\text{Im}[\cdot]$  表示取复数虚部,  $\text{diag}(\cdot)$  表示取对角元素,  $\mathbf{g}_1(\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w})|_{R_{xx}}$ ,  $\mathbf{g}_2(\mathbf{w}) = \mathbf{g}(\mathbf{w})|_{R_{ss}}$ ,  $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{a}(\theta_d)\mathbf{a}^H(\theta_d)$ ,  $u$  和  $l$  是无失真约束松弛成不等式约束后的上下界,  $\mathbf{e} \in R^{N \times 1}$  由权矢量的相位扰动量构成, 由于一阶泰勒展开成立的条件是扰动值足够小以使高阶展开式可以忽略, 需要给  $\mathbf{e}$  矢量增加范数约束,  $e_{\max}$  是  $\mathbf{e}$  的  $l_2$  范数的上限值。ISOCP 算法存在的主要问题包括: 算法的终止条件难以离线确定, 需要根据实际回波信号、干扰及噪声功率估值设置相应的终止门限, 终止门限选取造成干扰抑制性能和算法实时性之间的矛盾。将通过仿真分析中进一步说明。

### 3 迭代优化最小化(MM)唯相位波束形成器设计

#### 3.1 MM 算法

MM 算法<sup>[19, 20]</sup>将复杂目标函数转化成一系列简

单迭代优化过程。若原问题为  $\hat{x} = \arg \min J(x)$ , MM 算法将在  $x_k$  处寻求目标函数  $J(x)$  的上界  $S(x|x_k)$ , 并得到迭代优化问题  $x_{k+1} = \arg \min S(x|x_k)$ , 要求原目标函数和优化上界函数之间满足如下关系:

$$\left. \begin{aligned} \forall x, S(x|x_k) &\geq J(x) \\ S(x_k|x_k) &= J(x_k) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

由式(6)容易得到:  $J(x_{k+1}) \leq S(x_{k+1}|x_k) \leq S(x_k|x_k) = J(x_k)$ , 说明上界函数的迭代优化得到的最优解使原目标函数值具有单调非增特性, 为 IMM-POB 的收敛提供了充分条件。

为了采用 MM 算法构造 IMM-POB, 首先介绍一种二次型上界函数的构造方式。凸函数  $J(\mathbf{x})$  曲率有界且二次可微, 如果存在矩阵  $\mathbf{M}$  满足  $\mathbf{M} - \nabla^2 J(\mathbf{x})$  为半正定矩阵, 则有<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &\leq J(\mathbf{x}_k) + \text{Re}[\nabla J^H(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)] \\ &\quad + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^H \mathbf{M}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (7)$$

不等式右侧提供了原函数  $J(\mathbf{x})$  的二次型上界。

#### 3.2 IMM-POB 设计

式(4)中约束  $\mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) = 1$  的物理意义是在最小化阵列输出功率的情况下保证期望信号无损通过, 该约束等价于在最小化阵列输出功率的情况下, 使阵列在期望方向的输出功率最大, 即  $\max_w \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{w}$ , 因而, 式(4)可以转化为

$$\min_w \mathbf{w}^H \mathbf{R}_t \mathbf{w}, \quad \text{s.t. } |w_n| = 1, 1 \leq n \leq N \quad (8)$$

式中,  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{xx} - \mathbf{a}(\theta_d)\mathbf{a}^H(\theta_d)$ 。

**证明** 式(4)和式(8)给出的 POB 设计模型的等价性, 可以通过不含模 1 约束时最优解的等价性得以证明。因而, 将首先证明本文给出的式(8)的构造方式与式(9)给出的传统最大信干噪比(Maximum Signal to Interference and Noise Ratio, MSINR)准则下的最优波束形成器的等价性; 其次, 证明式(9)给出的 MSINR 最优波束形成器与式(4)给出的 MVDR 最优波束形成器等价。

$$\max_w \text{SINR} = \max_w \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{nn} \mathbf{w}} \quad (9)$$

式(9)中,  $\mathbf{R}_{ss}$  和  $\mathbf{R}_{nn}$  分别对应着期望信号和非期望信号的相关矩阵, 其中, 非期望信号包含干扰和噪声两种成分。式(9)的最优权为

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{MSINR}} &= \alpha \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d), \\ \alpha &= \left( \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{w}_{\text{MSINR}} / \mathbf{w}_{\text{MSINR}}^H \mathbf{a}^H(\theta_d) \right) \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{w}_{\text{MSINR}} \end{aligned} \quad (10)$$

在不考虑模 1 约束的条件下, 式(8)给出的最小

问题具有闭式最优解。令其目标函数关于权矢量的导数为0, 得  $\mathbf{R}_{xx}\mathbf{w} = \mathbf{a}(\theta_d)\mathbf{a}^H(\theta_d)\mathbf{w}$ , 则式(8)的最优解为

$$\mathbf{w}_{\text{本文}} = \gamma \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d), \gamma = \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{w}_{\text{本文}} \quad (11)$$

根据式(1)本文建模的回波信号, 得到阵列回波自相关矩阵与回波中的信号自相关和干扰噪声自相关矩阵之间的关系为

$$\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{nn} = \sigma_s^2 \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) + \mathbf{R}_{nn} \quad (12)$$

则由矩阵求逆引理,

$$\mathbf{R}_{xx}^{-1} = \mathbf{R}_{nn}^{-1} - \sigma_s^2 \frac{\mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}_{nn}^{-1}}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)} \quad (13)$$

将式(13)代入式(11)有

$$\mathbf{w}_{\text{本文}} = \bar{\gamma} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d), \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{1 + \sigma_s^2 \mathbf{a}^H(\theta_d) \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d)} \quad (14)$$

对比式(10)和式(14)可以看出, 本文构造的最优波束形成器的最优解与 MSINR 准则下的最优波束形成器的最优解差别仅在解的常复系数  $\alpha$  和  $\bar{\gamma}$ , 该差异并不影响最优波束形成器的性能。

在不考虑模1约束的条件下, 式(4)传统 MVDRB 的最优权为

$$\mathbf{w}_{\text{MVDRB}} = \beta \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d), \beta = 1 / \mathbf{w}_{\text{MVDRB}}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{w}_{\text{MVDRB}} \quad (15)$$

同理, 将式(13)代入式(15), 可得

$$\mathbf{w}_{\text{MVDRB}} = \bar{\beta} \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{a}(\theta_d), \bar{\beta} = 1 / \mathbf{w}_{\text{MVDRB}}^H \mathbf{R}_{nn}^{-1} \mathbf{w}_{\text{MVDRB}} \quad (16)$$

从而证明了传统 MVDRB 和 MSINR 最优波束形成器之间的等价性。

至此, 已证明本文构造的波束形成器和 MVDRB 都与 MSINR 准则下的最优波束形成器等价, 因而本文构造的波束形成器和传统 MVDRB 等价, 即式(4)和式(8)描述的优化问题等价。证毕

式(8)将式(4)转化成仅含模1约束的最小化问题, 且目标函数  $J(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_t \mathbf{w}$  具有二次型形式, 满足曲率有界且二次可微, 利用式(7)容易得到  $J(\mathbf{w})$  在  $\mathbf{w}_k$  处的优化上界为 ( $\mathbf{w}_k$  为权矢量空间中的已知点)

$$\begin{aligned} J(\mathbf{w}) &\leq S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k) = \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_t \mathbf{w}_k \\ &\quad + 2 \operatorname{Re} \left[ \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_t (\mathbf{w} - \mathbf{w}_k) \right] \\ &\quad + (\mathbf{w} - \mathbf{w}_k)^H \mathbf{M} (\mathbf{w} - \mathbf{w}_k) \end{aligned} \quad (17)$$

式(17)中,  $\mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_t \mathbf{w}_k$  为常量,  $\mathbf{M} \succeq \mathbf{R}_t$ , 且为厄米矩阵。当  $\mathbf{M}$  为对角阵时,  $\mathbf{w}^H \mathbf{M} \mathbf{w}$  亦为常量。则在  $\mathbf{M}$  为对角阵的假设下去除式(17)中的常量可得

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k) &= \min_{\mathbf{w}} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[ \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_t \mathbf{w} \right] - \mathbf{w}_k^H \mathbf{M} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{M} \mathbf{w}_k \right\} \\ &= \min_{\mathbf{w}} \left\{ \mathbf{w}_k^H \mathbf{R}_t \mathbf{w} + \mathbf{w}^H \mathbf{R}_t \mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^H \mathbf{M} \mathbf{w} - \mathbf{w}^H \mathbf{M} \mathbf{w}_k \right\} \\ &= \min_{\mathbf{w}} \left\{ \mathbf{w}_k^H (\mathbf{R}_t - \mathbf{M}) \mathbf{w} + \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_t - \mathbf{M}) \mathbf{w}_k \right\} \\ &= \min_{\mathbf{w}} \left\{ 2 \operatorname{Re} \left[ \mathbf{w}^H (\mathbf{R}_t - \mathbf{M}) \mathbf{w}_k \right] \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)可进一步转化为

$$\min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k) = \min_{\mathbf{w}} \left\| \mathbf{w} - (\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_k \right\|_2^2 \quad (19)$$

式中  $\|\cdot\|_2^2$  表示  $l_2$  范数的平方。式(4)可以转化为式(20)所示的 IMM-POB 迭代优化问题:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_k &= \arg \min_{\mathbf{w}} S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_{k-1}), \\ \text{s.t. } &|w_n| = 1, 1 \leq n \leq N \end{aligned} \quad (20)$$

表示在上次迭代结果的基础上, 构造当次迭代的目标上界函数, 最小化上界函数得到当次迭代最优解。从式(20)可进一步推导出第  $k$  次迭代的最优闭式解, 将  $S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k)$  展开可得

$$\begin{aligned} S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k) &= \|\mathbf{w}\|_2^2 + \|(\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_k\|_2^2 \\ &\quad - 2 \|\mathbf{w}\|_2 \left\| (\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_k \right\|_2 \\ &\quad \cdot \cos \left\{ \arg[\mathbf{w}] - \arg[(\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_k] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

式(21)中,  $\arg[\cdot]$  表示取相位操作。不难看出当  $\arg[\mathbf{w}] = \arg[(\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_k]$  时,  $S(\mathbf{w} | \mathbf{w}_k)$  取得最小值, 因而优化问题(12)的解为  $\mathbf{w}_k = \exp \{ j \arg[(\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_{k-1}] \}$ 。因此, 给出本文 IMM-POB 的算法步骤如下:

- (1) 初始化阵列权值  $\mathbf{w}_0$ , 可采用随机模1复矢量, 或者取传统最优 MVDRB 的权相位获得;
- (2) 计算矩阵  $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{xx} - \mathbf{a}(\theta_d) \mathbf{a}^H(\theta_d)$ , 并构造对角厄米矩阵  $\mathbf{M}$ , 满足  $\mathbf{M} \succeq \mathbf{R}_t$ ;
- (3) 利用  $\mathbf{w}_k = \exp \{ j \arg[(\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{w}_{k-1}] \}$  计算第  $k$  次迭代的最优权;
- (4) 终止条件判断, 不满足跳转至步骤(3), 否则停止迭代。

终止条件可以为: 相邻两次迭代最优权的欧式距离小于预设门限。对最终迭代结果相对期望方向增益进行归一化处理, 即  $\mathbf{w}_{\text{final}} / (\mathbf{w}_{\text{final}}^H \mathbf{a}(\theta_d))$ , 即可获得 MVDRB 意义下 IMM-POB 的最优权值。

### 3.3 对角厄米矩阵 $\mathbf{M}$ 的构造

3.2 节分析中, 在厄米矩阵  $\mathbf{M}$  为对角阵的假设下得到了 IMM-POB 优化模型。由  $\mathbf{M} \succeq \mathbf{R}_t$ , 得到: 对  $\forall \mathbf{x}$ , 有  $\mathbf{x}^H (\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{x} \geq 0$ 。  $\mathbf{R}_t$  为厄米正定矩阵, 存在酉特征分解, 即  $\mathbf{R}_t = \mathbf{U}^H \mathbf{L} \mathbf{U}$ , 其中  $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵,  $\mathbf{L}$  为  $\mathbf{R}_t$  的特征值构成的对角矩阵。则由  $\mathbf{x}^H (\mathbf{M} - \mathbf{R}_t) \mathbf{x} \geq 0$  得

$$\mathbf{x}^H (\mathbf{M} - \mathbf{U}^H \mathbf{L} \mathbf{U}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \mathbf{U}^H (\mathbf{M} - \mathbf{L}) \mathbf{U} \mathbf{x} \geq 0 \quad (22)$$

对  $\forall \mathbf{x}$ , 存在  $\mathbf{M} = \max(\mathbf{L}) \mathbf{I} = \lambda_{\max}(\mathbf{L}) \mathbf{I}$ , 式(14)成立。实际工程应用中, 为了避免矩阵分解, 可直接采用近似上界  $k \times \operatorname{tr}(\mathbf{L}) \mathbf{I}$  构造矩阵  $\mathbf{M}$ , 其中  $\operatorname{tr}(\mathbf{L})$  表示取矩阵  $\mathbf{L}$  的迹, 比例系数  $k \in [0, 1]$  表示最大干扰成分占总接收能量的比例, 可根据系统参数预估。

## 4 仿真分析

本节通过与文献[4]、文献[5]和传统最优 MVDRB 的对比,验证本文算法的有效性和优越性。不失一般性,将采用均匀等距线阵对所提算法性能进行仿真分析,阵元间距为半波长。文献[4]是一种 POB 设计的全局算法,在传统导向矢量加权向量的基础上,基于遗传算法(Genetic Algorithm, GA)寻找最优的权值扰动量,以实现干扰置零。本文仿真中,GA 算法的种群个数为 200,初始化种群为扰动量之间的均匀分布样本,采用自适应交叉和变异算子,增强算法的全局收敛特性,采用精英策略,保护优质基因,交叉和精英比分别为 0.8 和 0.05。文献[5]的 ISOCP 算法(由式(5)给出)是目前性能较好且实时性较强的设计,为了便于对比,采用与之相同的回波场景。远场窄带回波中的期望信号、干扰和噪声互不相关。假设期望信号回波方向为  $10^\circ$ ,信号功率为 0 dB,且信噪比为 0 dB。两个干扰信号波达角分别设置为  $-30^\circ$  和  $40^\circ$ ,干噪比均为 30 dB。

$\mathbf{M} = \text{tr}(\mathbf{L})\mathbf{I}$ , 本文 IMM-POB 的迭代终止条件定为相邻两次迭代权值的欧式距离小于  $\varepsilon = 10^{-10}$ 。文献[5]算法其他参数设置为  $u$  和  $l$  分别为 1.1 和 0.9,  $e_{\max} = 0.02$ , 当输出功率小于 1.05 时算法终止。文中,所有仿真结果均为 100 次 Monte Carlo 实验的平均或统计结果。

首先,对比传统 MVDRB(权值没有模 1 约束)、文献[4]GA 算法、文献[5]ISOCP 算法、以及本文 IMM-POB 在输入 SNR 递增的情况下,输出 SINR 随输入 SNR 的变化关系。仿真过程中,信号和干扰功率始终保持不变,噪声功率从 15 dB 以 5 dB 步长减至 -15 dB。图 2 以误差棒图形式给出了各算法在每种输入 SNR 下,平均输出 SINR 及方差。对于文献[4]GA 算法,由于算法本身的不确定性较强,导致输出 SINR 的方差较大,因而仅给出了 100 次独立实验的均值。从图 2 可以看出本文 IMM-POB 算法的输出 SINR 在低输入 SNR 情况下与传统 MVDRB 重合,随着输入 SNR 升高,最终输出 SINR 略高于传统 MVDRB。文献[4]GA 算法和文献[5]ISOCP 算法的输出 SINR 随输入 SNR 增加近似呈线性增长,且为两条相交线,在低输入 SNR 情况下,后者有较高的 SINR 输出,而在 SNR 较高时,前者输出 SINR 逐渐增加,接近甚至略高于传统 MVDRB。

图 3 进一步给出了 4 种算法的输出干扰功率和噪声功率随输入 SNR 的变化。4 条实线代表干扰输出功率,对应的点划线代表噪声输出功率。可以看

出本文 IMM-POB 算法和传统 MVDRB 均具有较强的干扰抑制能力,且各输入 SNR 情况下,两者的干扰抑制能力基本相当。文献[4]GA 算法的干扰和噪声抑制能力随 SNR 增大均线性增强,当 SNR 达到 15 dB 时,干扰剩余与传统 MVDRB 相同,噪声剩余比传统 MVDRB 低约 2 dB,因此 SINR 输出略高出 2 dB,与图 2 吻合。在图 2 和图 3 的仿真过程中,文献[5]的 ISOCP 算法终止条件始终为总信号输出功率低于 1.05,图 2 中 ISOCP 算法的输出 SINR 随 SNR 几乎线性增长,图 3 中 ISOCP 算法的输出噪声功率随 SNR 几乎负线性增长,因而在总输出功率固定的情况下,干扰输出功率近似保持不变,与图 2 变化趋势相符。与文献[5]的 ISOCP 算法不同的是,本文 IMM-POB 算法采用相邻迭代之间的权值变化为算法的终止依据,并没有约束算法的输出功率。文献[5]如果要获得相同的输出 SINR 改善,需要在迭代过程中不断减小终止门限,但会增长优化时间,且在仿真过程中出现了不收敛的现象。

从图 3 中输出噪声功率的变化可知,文献[5]和本文算法的输出噪声功率曲线几乎重合,而传统 MVDRB 的输出噪声功率随着 SNR 的增大剩余增多。输出噪声功率主要取决于形成的波束方向图。图 4 给出了不同输入 SNR 得到的  $\pm 50^\circ$  之间的波束方向图,并对两个方位的干扰零陷进行局部放大,可以看出,随着 SNR 的增加,传统 MVDRB 的波束方向图主瓣和整体副瓣电平变化较为明显;文献[4]GA 算法因为权值扰动,在形成深零陷的同时,波束方向图出现畸变,整体副瓣电平抬高。文献[5]零陷深度几乎不随 SNR 变化,始终在 -55 dB 左右;而本文算法得到的零点深度与传统 MVDRB 算法在不同信噪比下几乎完全相同,且随着输入 SNR 的增加干扰零陷变深。

图 5 给出了 4 种算法得到的积分波束响应(仅取了  $[-10^\circ, 30^\circ]$  主瓣方位区间)随输入 SNR 的变化。传统 MVDRB 算法的积分波束响应随 SNR 的增大而增大,文献[5]与本文 IMM-POB 算法的积分波束响应几乎都固定在 -11 dB,文献[4]GA 算法则呈现出不规律的变化,这与 GA 算法本身的不确定性与基于 GA 算法的 POB 设计模型有关,也是 GA 算法应用于 POB 设计的局限。当输入 SNR 达到 15 dB 时,传统 MVDRB 积分主瓣电平比文献[5]ISOCP 和本文 IMM-POB 算法要高出 8 dB 左右,比文献[4]GA 算法高出 2 dB 左右。相应地,图 3 中的噪声剩余功率同样高出约 8 dB 和 2 dB,这是因为剩余噪声功率主要取决于形成波束的主瓣增益。

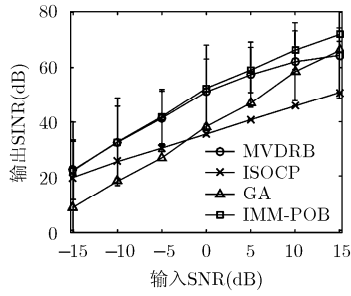


图 2 4 种算法下输出 SINR 随输入 SNR 的变化

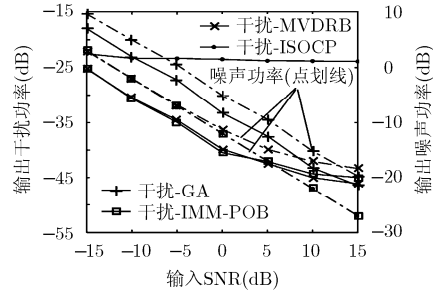


图 3 4 种算法下输出干扰和噪声功率随输入 SNR 的变化

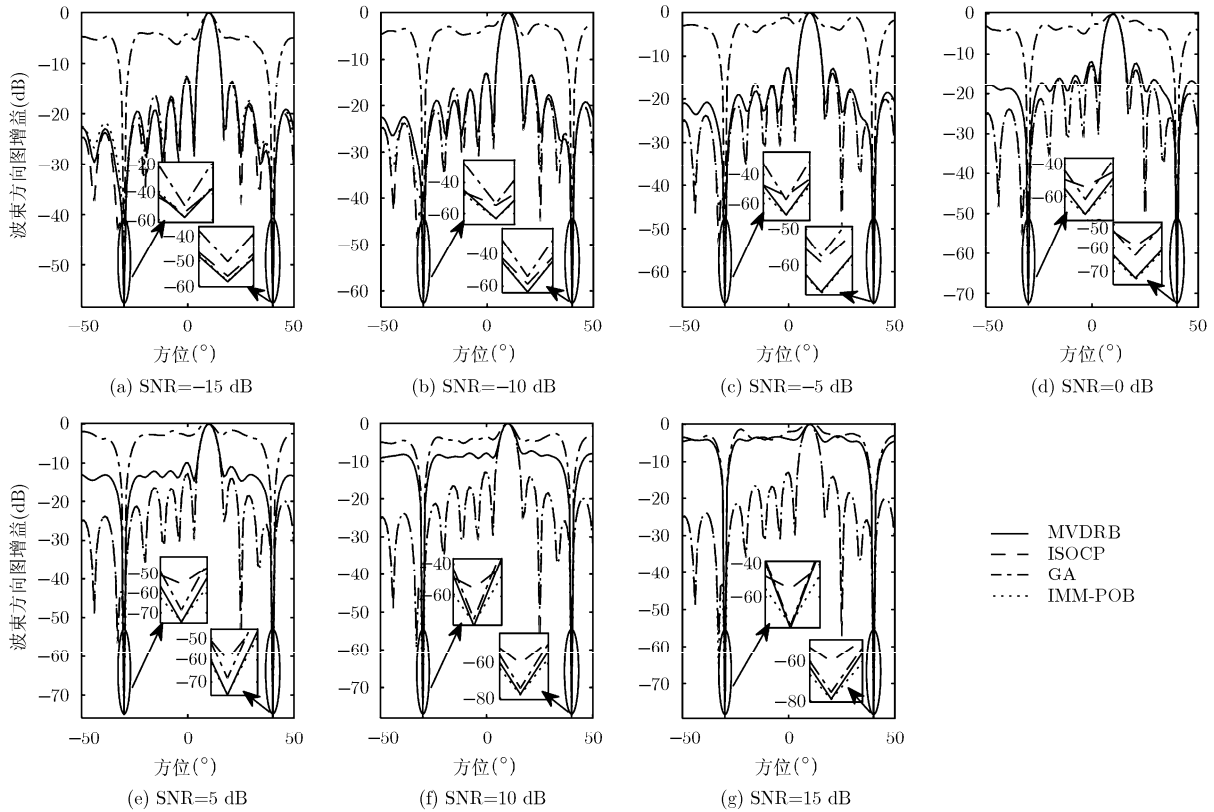


图 4 不同输入 SNR 情况下 4 种算法形成波束方向图对比

图 6 对比了输入 SNR 为 10 dB，信号和干扰功率不变的情况下，传统 MVDRB 算法和本文 IMM-POB 算法采用不同快拍数估计回波信号的相关矩阵时，输出 SINR 受影响的程度，仿真中样本数从 100 以 50 为步长递增至 1000。可以看出本文算法在快拍数较少的情况下仍能获得较高的 SINR 改善。

表 1 对比了本文算法与文献[4]GA 算法和文献[5]ISOCP 算法的运行时间。仿真平台配置为：Intel 4 核 CPU，主频为 3.4 GHz，内存 16 GB，采用 MATLAB 2016a 仿真软件。文献[4]GA 算法的运行时间较长，且波动较大。由于文献[5]中 ISOCP 的具体实现方式未知，本文采用 MATLAB 中的 fmincon 函数实现 ISOCP 的求解。对其时间的统计略大于文

献[5]给出的运行时间，但是从加速倍数中可以得出与之相近的结论，即文献[5]方法随阵元个数的增加变化较小(因为加速倍数逐渐减小)。本文算法由于每一步迭代都存在闭式解，因而求解效率较高。

### 5 结论

针对唯相位波束形成器的非凸性，本文提出迭代优化最小化唯相位波束形成算法 IMM-POB。借助曲率有界且二次可微目标函数的上界，构造了迭代优化最小化设计模型，推导出每次迭代的闭式最优解，形式简单，仅包含单次矩阵和向量乘法，使算法具有较强的实时性且适用于大规模阵列。仿真验证了算法的有效性，相比已有迭代算法和传统最优 MVDRB 具有更好的信噪比改善，零点深度逼近最优 MVDRB，运行时间远小于已有迭代算法。

表 1 运行时间(s)及加速比对比

	阵元个数								
	15	20	25	30	35	40	45	50	55
文献[4]方法	3.8633	4.8756	7.1450	10.0946	16.3536	20.4737	20.5244	32.7115	31.7282
文献[5]方法	2.3676	2.2302	2.4594	2.5206	2.8655	3.2754	3.3791	3.4156	3.4814
本文算法	0.2305	0.2591	0.3044	0.3450	0.4189	0.4834	0.5819	0.6585	0.7675
加速比( $t_{\text{本文}}/t_{\text{文献[5]}}$ )	10.2716	8.6075	8.0795	7.3061	6.8405	6.7758	5.8070	5.1869	4.5360

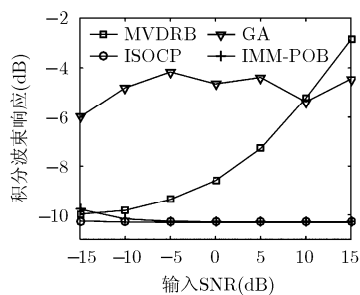


图 5 积分波束响应随输入 SNR 的变化

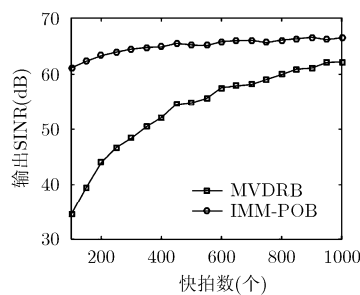


图 6 输出 SINR 随快拍数的变化

## 参考文献

- [1] WU Kai and SU Tao. Design of generalised sidelobe canceller-based adaptive wideband beamformer without pre-steering delays[J]. *Electronics Letters*, 2016, 52(3): 177-179. doi: 10.1049/el.2015.3488.
- [2] 吴凯, 苏涛, 靳标, 等. 具有固定反馈权的自适应宽带波束形成器设计[J]. *吉林大学学报(工学版)*, 2016, 46(1): 303-310. doi: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201601046.  
WU Kai, SU Tao, JIN Biao, et al. Design of adaptive broadband beamformer with fixed feedback weights[J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2016, 46(1): 303-310. doi: 10.13229/j.cnki.jdxbgxb201601046.
- [3] FUCHS Benjamin. Application of convex relaxation to array synthesis problems[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 62(2): 634-640. doi: 10.1109/TAP.2013.2290797.
- [4] 王学斌, 李会勇, 何子述. 一种基于遗传算法的唯相位宽带零陷波束赋形方法[J]. *中国电子科学研究院学报*, 2011, 6(6): 634-638.  
WANG Xuebin, LI Huiyong, and HE Zishu. Wide null steering based on genetic algorithm by controlling only the current phase[J]. *Journal of China Academy of Electronics and Information Technology*, 2011, 6(6): 634-638.
- [5] 路成军, 盛卫星, 韩玉兵, 等. 基于迭代二阶锥的唯相位波束形成[J]. *电子与信息学报*, 2014, 36(2): 266-270. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00593.  
LU Chengjun, SHENG Weixing, HAN Yubing, et al. Phase-only beamforming based on iterative second-order cone[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2014, 36(2): 266-270. doi: 10.3724/SP.J.1146.2013.00593.
- [6] KAJENSKI P J. Phase only antenna pattern notching via semidefinite programming relaxation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2012, 60(5): 2562-2565. doi: 10.1109/TAP.2012.2189709.
- [7] SCHOLNIK D P. A parameterized pattern-error objective for large-scale phase-only array pattern design[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2016, 64(1): 89-98. doi: 10.1109/TAP.2015.2500239.
- [8] NAYERI P, YANG F, and ELSHERBENI A. Design of single-feed reflect array antennas with asymmetric multiple beams using the particle swarm optimization method[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2013, 61(9): 4598-4605. doi: 10.1109/TAP.2013.2268243.
- [9] SHORE R A. The use of nonlinear programming techniques for phase-only[C]. *Antennas and Propagation Society International Symposium*, Houston, TX, USA, 1983, 21: 23-26. doi: 10.1109/APS.1983.1149075.
- [10] KHZMALYAN A D and KONDRAT'YEV A S. Fast iterative methods for phase-only synthesis of antenna array pattern nulls[J]. *Electronics letters*, 1995, 31(8): 601-602. doi: 10.1049/el:19950432.
- [11] MISMAR M J, ISMAIL T H, and ABU-AL-NADI D I. Analytical array polynomial method for linear antenna arrays with phase-only control[J]. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, 2007, 61(7): 485-492. doi: 10.1016/j.aeu.2006.06.009.
- [12] SMITH S T. Optimum phase-only adaptive nulling[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, 47(7): 1835-1843.

- doi: 10.1109/78.771033.
- [13] CHOI W S and SARKAR T K. Phase-only adaptive processing based on a direct data domain least squares approach using the conjugate gradient method[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2004, 52(12): 3265–3272. doi: 10.1109/TAP.2004.836410.
- [14] STEYAKAL H. Simple method for pattern nulling by phase perturbation[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1983, 31(1): 163–166. doi: 10.1109/TAP.1983.1142994.
- [15] BAIRD C A and RASSWEILER G G. Adaptive sidelobe nulling using digital controlled phase-shifters[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1976, 24(5): 638–649. doi: 10.1109/TAP.1976.1141415.
- [16] SHORE R A. Nulling at symmetric pattern location with phase only weight control[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1984, 32(5): 530–533. doi: 10.1109/TAP.1984.1143360.
- [17] GIUSTO R and VINCENT P D. Phase-only optimization for the generation of wide deterministic nulls in the radiation pattern of phased arrays[J]. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 1983, 31(5): 814–817. doi: 10.1109/TAP.1983.1143137.
- [18] 吴梦, 刘宏伟, 王旭. 一种循环迭代的 MIMO 雷达发射方向图设计方法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(2): 322–327. doi: 10.11999/JEIT141043.
- WU Meng, LIU Hongwei, and WANG Xu. A cyclic iterative method for MIMO radar transmit beam pattern design[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(2): 322–327. doi: 10.11999/JEIT141043.
- [19] HUNTER D R and LANGE K. A tutorial on MM algorithms [J]. *The American Statistician*, 2004, 58(1): 30–37. doi: 10.1198/0003130042836.
- [20] 冯灿, 肖亮, 韦志辉. 压缩感知 ISAR 成像的全变差优化最小算法[J]. *太赫兹科学与电子信息学报*, 2013, 11(5): 775–781. doi: 10.11805/TKYDA201305.0775.
- FENG Can, XIAO Liang, and WEI Zhihui. ISAR compressive imaging based on majorization-minimization of total variation[J]. *Journal of Terahertz Science and Electronic Information Technology*, 2013, 11(5): 775–781. doi: 10.11805/TKYDA201305.0775.
- 吴 凯: 男, 1990 年生, 博士生, 研究方向为宽带阵列信号处理.  
 苏 涛: 男, 1968 年生, 博士生导师, 研究方向为实时信号处理及系统设计、自适应信号处理、阵列信号处理、目标检测、ISAR 成像等.  
 李 强: 男, 1992 年生, 博士生, 研究方向为实时信号处理设计与实现、雷达系统设计.