

## 基于多伯努利概率假设密度的扩展目标跟踪方法

李文娟 顾红\* 苏卫民

(南京理工大学电子工程与光电技术学院 南京 210094)

**摘要:** 高分辨率雷达系统中, 扩展目标一般会产生多个量测。现有随机有限集(RFS) 类算法一般假定扩展目标的量测数目服从泊松分布, 然而这个假设与实际情况不符。针对这一问题, 该文提出一种多伯努利扩展目标概率假设密度(MB-ET-PHD)跟踪算法。该算法首先假设扩展目标的量测数目服从多伯努利分布, 然后通过有限集统计(FISST)理论的多目标微积分推导得到校正等式, 最后给出了高斯混合(GM)框架的仿真结果。仿真结果表明该算法能够获得比泊松 ET-PHD 算法更好的跟踪性能。

**关键词:** 扩展目标跟踪; 概率假设密度; 多伯努利

中图分类号: TN953

文献标识码: A

文章编号: 1009-5896(2016)12-3114-08

DOI: 10.11999/JEIT160372

## Extended Target Tracking Method Based on Multi-Bernoulli Probability Hypothesis Density

LI Wenjuan GU Hong SU Weimin

(School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

**Abstract:** Extended targets usually generate multiple measurements in high resolution radar systems. Existing algorithms of the Random Finite Set (RFS) assume that the measurement number of extended targets follows Poisson distribution in a general way. However, this assumption is inconsistent with actual situations. Considering this issue, a Multi-Bernoulli Extended Target Probability Hypothesis Density (MB-ET-PHD) tracking method is proposed. First, this method assumes that the measurement number of extended targets is Multi-Bernoulli (MB) distributed. Then, its update equation is derived by using the Finite Set Statistics (FISST) multi-target calculus. Finally, simulated results of Gaussian Mixture (GM) framework are given. The simulation results show that the proposed method can obtain better tracking performance compared with the Poisson ET-PHD method.

**Key words:** Extended target tracking; Probability Hypothesis Density (PHD); Multi-Bernoulli (MB)

### 1 引言

在传统目标跟踪问题中, 一个目标每个时刻最多产生一个量测。然而, 在一些高分辨雷达中, 一个目标会占据多个分辨单元, 这种目标被称为扩展目标。在扩展目标跟踪问题中, 令人感兴趣的是对扩展目标的量测数目建模。文献[1]提出扩展目标的量测数目服从泊松分布的假设, 一个扩展目标产生任意数目的量测且量测互相独立。基于此假设, Mahler<sup>[2]</sup>提出一种泊松扩展目标概率假设密度(Extended Target Probability Hypothesis Density, ET-PHD)滤波算法。PHD<sup>[3-8]</sup>滤波是一种新颖的随

机有限集(Random Finite Set, RFS)多目标跟踪方法。与传统算法相比, PHD 滤波方法易于统筹管理, 避免了大量的数据关联。文献[9,10]给出了泊松 ET-PHD 的高斯混合(Gaussian Mixture, GM)滤波器实现方法, 并提供了一种将未标记的量测集分成几个子集的方法, 每个子集的所有量测应当来自同一个目标或者杂波。基于泊松 ET-PHD 的滤波算法, 扩展目标的其他扩展信息, 如形状和大小等, 的建模和估计都是近年来扩展目标跟踪的研究热点<sup>[11-18]</sup>。

扩展目标占据多个分辨单元, 不是每个单元都能被雷达检测出量测。为了便于表述, 目标占据的单元总数称为量测总数。对于静止的扩展目标, 其量测总数由雷达的分辨率和目标的大小决定。每个时刻目标产生小于或者等于量测总数的量测数目。现有文献假设扩展目标的量测数目服从泊松分布, 泊松分布是多伯努利分布在扩展目标的量测总数趋

收稿日期: 2016-04-18; 改回日期: 2016-08-25; 网络出版: 2016-10-21

\*通信作者: 顾红 guhongjust@163.com

基金项目: 国家自然科学基金(61471198)

Foundation Item: The National Natural Science Foundation of China (61471198)

于无穷大, 检测概率趋于无穷小的极限情况下近似得到的一种分布。然而, 在实际应用中, 扩展目标的量测总数有限, 不可能趋于无穷大, 这个扩展目标的量测数目服从泊松分布的假设显然与实际情况不符。针对这一问题, 本文提出多伯努利扩展目标概率假设密度滤波 (Multi-Bernoulli ET-PHD, MB-ET-PHD) 算法。该算法假设扩展目标量测数目服从多伯努利分布, 利用有限集统计 (Finite Set Statistics, FISST) 理论中的多目标微积分推导出 MB-ET-PHD 的更新等式, 并给出在高斯混合框架下的仿真结果。仿真实验验证了算法的有效性和比泊松 ET-PHD 算法更好的跟踪性能。

## 2 研究背景

### 2.1 多目标状态和量测

考虑多目标场景下的目标跟踪问题。对于多目标状态, 排列无序且目标数目未知。对于接收到的量测, 量测的排列是无序和随机的, 且来源(杂波或者目标)未知。而多目标跟踪的目的是从未知来源和未标记的量测集中联合估计目标的数目和状态。

为了描述多目标跟踪中的不确定性, 用 RFS 表示多目标状态集  $\mathbf{X}_k = \{\mathbf{x}_k^1, \mathbf{x}_k^2, \dots, \mathbf{x}_k^i, \dots, \mathbf{x}_k^{N_k}\} \in \mathbf{F}(\mathbf{X})$  和量测集  $\mathbf{Z}_k = \{z_k^1, z_k^2, \dots, z_k^j, \dots, z_k^{M_k}\} \in \mathbf{F}(\mathbf{Z})$ , 其中,  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  和  $\mathbf{F}(\mathbf{Z})$  分别是所有子集  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Z}$  的集合, 目标和量测数目分别为  $N_k$  和  $M_k$ 。  $\mathbf{x}_k^i = [x_k^i, y_k^i, v_{x,k}^i, v_{y,k}^i]^T \in \mathbf{X}_k$  是  $k$  时刻的第  $i$  个目标的运动状态矢量,  $(x_k^i, y_k^i)$  和  $(v_{x,k}^i, v_{y,k}^i)$  分别是目标  $\mathbf{x}_k^i$  的位置坐标和速度信息,  $\mathbf{z}_k^j = [z_{x,k}^j, z_{y,k}^j]^T$  是  $k$  时刻的第  $j$  个量测矢量,  $(z_{x,k}^j, z_{y,k}^j)$  是量测  $\mathbf{z}_k^j$  在笛卡尔坐标系下的坐标信息。

用 RFS 描述多目标状态随时间变化的过程。假设  $k-1$  时刻任意目标的状态为  $\mathbf{x}_{k-1}$ , 在  $k$  时刻以存活概率  $p_S(\mathbf{x}_{k-1})$  存活。  $\mathbf{X}_{k-1}$  在时刻  $k$  的存活目标 RFS 表示为  $\Gamma(\mathbf{X}_k)$ 。另外, 在时刻  $k$  出现新生概率为  $b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k)$  的新生目标和衍生概率为  $b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  的衍生目标, 它们的 RFS 分别表示为  $B$  和  $B(\mathbf{X}_k)$ 。所以, 时刻  $k$  的多目标 RFS 为  $\mathbf{X}_k = \Gamma(\mathbf{X}_k) \cup B(\mathbf{X}_k) \cup B$ 。

用 RFS 表示量测的不确定性。假设  $k$  时刻任一量测向量表示为  $\mathbf{z}_k$ , 对于一个给定的目标  $\mathbf{x}_k \in \mathbf{X}_k$ , 检测概率为  $p_d(\mathbf{x}_k)$ 。以目标被检测到为前提, 目标  $\mathbf{x}_k$  映射到量测  $\mathbf{z}_k$  的概率密度为  $\phi_k(\mathbf{z} | \mathbf{x})$ 。由目标状态  $\mathbf{X}_k$  产生的量测 RFS 表示为  $\mathbf{Z}_k^i$ 。在雷达接收到量测中, 除了  $\mathbf{Z}_k^i$  外, 杂波或虚假目标产生的量测 RFS 为  $\mathbf{Z}_k^c$ 。给定时刻  $k$  的多目标状态  $\mathbf{X}_k$ , 雷达接收的多目标量测 RFS 为  $\mathbf{Z}_k = \mathbf{Z}_k^c \cup \mathbf{Z}_k^i$ 。

### 2.2 泊松 ET-PHD 滤波器

对于扩展目标跟踪问题, 现有 PHD 滤波算法假设扩展目标的量测数目服从泊松分布。与传统滤波算法相同, 泊松 ET-PHD 滤波算法分为预测等式和更新等式。假设存活概率和检测概率与目标状态无关, 即  $p_S(\mathbf{x}_k) = p_S, p_d(\mathbf{x}_k) = p_d$ , 那么  $k$  时刻的泊松 ET-PHD 滤波预测等式和更新等式<sup>[9,10]</sup>分别为

$$D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}^{k-1}) = b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k) + \int (b_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \cdot p_S f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})) D_{k-1|k-1}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (1)$$

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}^k) = \left\{ \left( 1 - (1 - e^{-\lambda(\mathbf{x})}) p_d \right) + \left( \sum_{\wp \in \mathcal{Z}_k} w_\wp \sum_{W \in \wp} \frac{e^{-\lambda(\mathbf{x})} p_d \lambda(\mathbf{x})^{|W|}}{d_W} \cdot \prod_{z \in W} \frac{\phi_k(z | \mathbf{x})}{K(z)} \right) \right\} D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}^{k-1}) \quad (2)$$

其中,  $f_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  为状态转移概率密度,  $K(\mathbf{z})$  是杂波强度, 杂波在空间上服从泊松分布,  $\lambda(\mathbf{x})$  是扩展目标的期望平均量测数目,  $(1 - e^{-\lambda(\mathbf{x})}) p_d$  是有效检测概率, 符号  $\wp \in \mathcal{Z}_k$  表示按照一定的距离对  $\mathbf{Z}_k$  进行分类, 不同的距离可以有多种分类情况  $\wp$ , 每种分类情况的权值为  $w_\wp = \prod_{W \in \wp} d_W / \sum_{\wp' \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \wp'} d_W$ 。假设一种给定的分类情况  $\wp$  包含多个非空类  $W$ , 每个类的量测理论上应该来自同一个目标或者杂波。给定一个类  $W$ , 其包含的量测数目为  $|W|$ , 符号  $\mathbb{1}$  表示矢量的势,  $\delta_{|W|,1}$  是克罗内克函数, 当  $|W|=1$  时,  $\delta_{|W|,1} = 1$ , 反之, 则为 0。  $\phi_k(\mathbf{z} | \mathbf{x})$  是似然函数。  $d_W$  的具体表达式为

$$d_W = \delta_{|W|,1} + \left\{ e^{-\lambda(\mathbf{x})} \lambda(\mathbf{x})^{|W|} p_d \prod_{z \in W} \phi_k(z | \mathbf{x}) / K(z) \right\} \cdot D_{k|k-1}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}^{k-1}) \quad (3)$$

为了更好地理解式(2), 假设某一时刻的量测集只有 3 个元素  $\mathbf{Z} = \{z_1, z_2, z_3\}, |\mathbf{Z}| = 3$ 。那么, 最多存在 5 种分类情况, 分别为

$$\left. \begin{aligned} \wp_1 &= \{W_1 = \{z_1, z_2, z_3\}\} \\ \wp_2 &= \{W_1 = \{z_1, z_2\}, W_2 = \{z_3\}\} \\ \wp_3 &= \{W_1 = \{z_1, z_3\}, W_2 = \{z_2\}\} \\ \wp_4 &= \{W_1 = \{z_2, z_3\}, W_2 = \{z_1\}\} \\ \wp_5 &= \{W_1 = \{z_1\}, W_2 = \{z_2\}, W_3 = \{z_3\}\} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

### 2.3 量测数目模型

给定一个扩展目标  $\mathbf{x}$ , 假设目标  $\mathbf{x}$  占据  $\gamma(\mathbf{x})$  个分辨单元, 且每个分辨单元的检测概率  $p_d$  相同, 各分辨单元互相独立。当  $p_d = 1$  时, 目标产生量测的最大数目为  $\gamma(\mathbf{x})$ , 即为量测总数。扩展目标的量测产生过程等同于对一个分辨单元独立重复地进行  $\gamma(\mathbf{x})$  次目标检测试验, 而每次试验只有两种结果: 产生量测与没有产生量测。很显然, 这是统计学中的多重伯努利试验。因此, 本文算法假设扩展目标的量测数目在空间上服从多伯努利分布。

与扩展目标的量测数目模型不同, 杂波的量测数目应该假设服从泊松分布。跟踪场景的每个分辨单元都有可能检测出杂波。一些高分辨雷达的分辨单元总数可达到  $10^8$  的数量级, 每个分辨单元的虚警概率又很小。当  $n$  很大, 概率很小时, 两者的乘积是一个常值, 这是多伯努利分布的一种极限情况, 称为泊松分布。因此, 可以假设杂波的量测数目在空间上服从泊松分布。

然而, 现有泊松 ET-PHD 滤波算法假设扩展目标的量测数目服从泊松分布, 这显然与实际情况不符。因为与整个跟踪场景的分辨单元数相比, 每个扩展目标占据的分辨单元有限, 不可能趋于无穷大。所以, 假设扩展目标的量测数目服从泊松分布是不妥的。

为了对扩展目标和杂波的量测数目建模, 引入 RFS 理论中一个重要的基本统计描述符: 概率生成泛函(Probability Generating Functional, PGFL)。假设  $\mathbf{X}$  是状态空间  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  上的多目标 RFS, 那么  $\mathbf{X}$  的 PGFL 定义<sup>[3]</sup>为  $G[h] \triangleq \int h^{\mathbf{X}} \cdot f(\mathbf{X}) \delta \mathbf{X}$ , 其中,  $f(\mathbf{X})$  是随机有限集  $\mathbf{X}$  的概率密度函数,  $h(\mathbf{x})$  是关于矢量  $\mathbf{x}$  的检测函数。当  $\mathbf{X} = \emptyset$ ,  $h^{\mathbf{X}} = 1$ ; 否则,  $h^{\mathbf{X}} = \prod_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} h(\mathbf{x})$ 。

多伯努利分布的 PGFL<sup>[3]</sup>为  $G[g | \mathbf{x}] = (1 - p_d + p_d \phi[g])^{\gamma(\mathbf{x})}$ , 其中,  $\phi[g] = \int g(\mathbf{z}) \phi_k(\mathbf{z} | \mathbf{x}) d\mathbf{z}$ ,  $g(\mathbf{z})$  是关于矢量  $\mathbf{z}$  的检测函数,  $\gamma(\mathbf{x})$  是扩展目标的量测总数。泊松分布的 PGFL<sup>[3]</sup>为  $e^{\lambda(\mathbf{x})\phi[g] - \lambda(\mathbf{x})}$ , 其中  $\lambda(\mathbf{x})$  是期望平均量测数目。

进一步阐述  $\gamma(\mathbf{x})$ ,  $\lambda(\mathbf{x})$  和  $\lambda$  的含义。当给定一个扩展目标  $\mathbf{x}$ , 其量测总数和期望平均量测数目分别为  $\gamma(\mathbf{x})$  和  $\lambda(\mathbf{x})$ , 且  $\lambda(\mathbf{x}) = p_d \gamma(\mathbf{x})$ 。对于服从泊松分布的杂波而言, 其期望平均量测数目为  $\lambda$ , 杂波强度  $K(\mathbf{z}) = \lambda c(\mathbf{z})$ ,  $c(\mathbf{z})$  是单位平均的杂波强度。

### 3 MB-ET-PHD 滤波算法推导

由于 MB-ET-PHD 滤波算法的预测等式与泊松

ET-PHD 相同, 见式(1), 下面仅讨论更新步骤的公式推导。

将多伯努利分布的 PGFL 代入两个变量  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{Z}$  的 PGFL<sup>[3]</sup>, 得到  $F[g, h] = e^{\lambda c[g] - \lambda} G[h(1 - p_d + p_d \phi[g])^{\gamma(\mathbf{x})}]$ , 其中,  $c[g] = \int g(\mathbf{z}) c(\mathbf{z}) d\mathbf{z}$ , 杂波在整个跟踪场景中的量测数目期望平均为  $\lambda$ 。而 PHD 的预测 PGFL<sup>[3]</sup>等式为  $G_{k+1|k}[h] = e^{\mu s[h] - \mu}$ , 因此

$$F[g, h] = \exp\left(-\lambda - \mu + \lambda c[g] + \mu s\left[h(1 - p_d + p_d \phi[g])^{\gamma(\mathbf{x})}\right]\right) \quad (5)$$

其中,  $s[h] = \mu^{-1} \int h(\mathbf{x}) D_{k+1|k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ ,  $\mu = \int D_{k+1|k}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ 。

#### 引理 1

$$\delta F[g, h] / \delta \mathbf{Z} = F[g, h] \cdot \Pi_{\mathbf{Z}} \sum_{\varnothing \subset \mathbf{Z}} \prod_{W \in \varnothing} d_W[g, h] \quad (6)$$

其中,  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m\}$ ,  $|\mathbf{Z}| = m$ ,  $\Pi_{\mathbf{Z}} = \prod_{\mathbf{z} \in \mathbf{Z}} \lambda c(\mathbf{z})$ ,  $\ell_W(\mathbf{x}) = \prod_{\mathbf{z} \in W} \ell_z(\mathbf{x})$ ,  $\ell_z(\mathbf{x}) = \phi_k(\mathbf{z} | \mathbf{x}) / \lambda c(\mathbf{z})$ ,  $d_W[g, h] = \delta_{|W|, 1} + \mu s[h \phi_W[g]]$ ,  $\phi_W[g] = (1 - p_d + p_d \phi[g])^{\gamma(\mathbf{x}) - |W|} \cdot p_d^{|W|} \ell_W \gamma(\mathbf{x})! / (\gamma(\mathbf{x}) - |W|)!$ 。

**证明** 当  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1\}$ ,  $|\mathbf{Z}| = 1$ 。此时只有一种分类情况, 对式(5)求导, 可得

$$\delta F[g, h] / \delta \mathbf{z}_1 = F[g, h] \cdot (\lambda c(\mathbf{z}_1)) \cdot \left(1 + \mu s\left[h \gamma(\mathbf{x})(1 - p_d + p_d \phi[g])^{\gamma(\mathbf{x})-1} p_d \ell_{\mathbf{z}_1}\right]\right) \quad (7)$$

假设当  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m\}$ ,  $m > 1$  时, 式(6)成立。下面证明当  $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_{m+1}\}$ ,  $|\mathbf{Z}| = m + 1$  时, 依然能够得到式(6)。根据文献[3]的多目标微积分乘积法则可得

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Z} \delta \mathbf{z}_{m+1}} [g, h] &= F[g, h] \cdot \Pi_{\mathbf{Z} \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}} \\ &\cdot \sum_{\varnothing \subset \mathbf{Z}} \left[ \prod_{W \in \varnothing \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}} d_W[g, h] \right] \\ &+ F[g, h] \cdot \Pi_{\mathbf{Z} \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}} \cdot \sum_{\varnothing \subset \mathbf{Z}} \left[ \prod_{W \in \varnothing} d_W[g, h] \right] \\ &\cdot \left[ \sum_{W \in \varnothing} \frac{d_{W \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}}[g, h]}{d_W[g, h]} \right] \\ &= F[g, h] \cdot \Pi_{\mathbf{Z} \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}} \sum_{\varnothing \subset \mathbf{Z} \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}} \prod_{W \in \varnothing} d_W[g, h] \end{aligned} \quad (8)$$

对式(8)进行进一步的阐释。量测集  $\mathbf{Z} \cup \{\mathbf{z}_{m+1}\}$  的分类有以下两种: (1)对每种分类情况, 保持量测集  $\mathbf{Z}$  ( $|\mathbf{Z}| = m$ ) 的分类  $W$  不变, 将  $\{\mathbf{z}_{m+1}\}$  单独作为

一类，对应式(8)求和符号前面一项。(2)对每一种分类情况，将  $\{z_{m+1}\}$  放入某一类中，其他类保持不变，对应式(8)求和符号后面一项。最后，式(8)可以归纳为引理的等式。 证毕

### 引理 2

$$G_{k+1|k+1}[h] = F_0[h] \cdot \frac{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W[h]}{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W[1]} \quad (9)$$

其中， $F_0[h] = \exp(\mu s[(h-1)(1-p_d)^{\gamma(\mathbf{x})}])$ ， $d_W[h] = d_W[0, h] = \delta_{|W|,1} + \mu s[h\phi_W]$ ，

$$\phi_W = (1-p_d)^{(\gamma(\mathbf{x})-|W|)} p_d^{|W|} \ell_W \gamma(\mathbf{x})! / (\gamma(\mathbf{x})-|W|)! \quad (10)$$

**证明** 根据文献[3]，多扩展目标的校正等式的 PGFL 是

$$G_{k+1|k+1}[h] = \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Z}_{k+1}}[0, h] / \frac{\delta F}{\delta \mathbf{Z}_{k+1}}[0, 1] \quad (11)$$

将式(6)代入式(11)即可得到引理 2。 证毕

**定理 1** MB-ET-PHD 的更新等式为

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^{k+1}) = \left( (1-p_d)^{\gamma(\mathbf{x})} + \sum_{\varphi \in \mathcal{Z}} \omega_\varphi \sum_{W \in \varphi} \frac{\phi_W}{d_W} \right) \cdot D_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^k) \quad (12)$$

其中， $d_W = d_W[1]$ ， $\omega_\varphi = \prod_{W \in \varphi} d_W / \sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W$ 。

**证明** 对式(9)求导，得到

$$\begin{aligned} \frac{\delta G_{k+1|k+1}}{\delta \mathbf{x}}[h] &= \frac{\delta F_0}{\delta \mathbf{x}}[h] \cdot \frac{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W[h]}{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W[1]} \\ &\quad + F_0[h] \cdot \frac{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} \prod_{W \in \varphi} d_W[h]}{\sum_{\varphi \in \mathcal{Z}_{k+1}} \prod_{W \in \varphi} d_W[1]} \end{aligned} \quad (13)$$

其中， $D_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^k) = \mu s(\mathbf{x})$ ， $\frac{\delta F_0}{\delta \mathbf{x}}[h] = F_0[h] \cdot D_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^k) (1-p_d)^{\gamma(\mathbf{x})}$ ， $\frac{\delta d_W[h]}{\delta \mathbf{x}} = D_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^k) \cdot \phi_W$ 。

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{x}} \prod_{W \in \varphi} d_W[h] = \left( \prod_{W \in \varphi} d_W[h] \right) \cdot \sum_{W \in \varphi} \frac{1}{d_W[h]} \frac{\delta d_W[h]}{\delta \mathbf{x}} \quad (14)$$

令式(13)中的  $h = 1$ ，得到

$$\begin{aligned} \delta G_{k+1|k+1}[1] / \delta \mathbf{x} &= D_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^k) \cdot \left( (1-p_d)^{\gamma(\mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\varphi \in \mathcal{Z}} \omega_\varphi \sum_{W \in \varphi} \frac{\phi_W}{d_W} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

将 PHD 的量测更新<sup>[3]</sup>  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x} | \mathbf{Z}^{k+1}) = \delta G_{k+1|k+1}[1] / \delta \mathbf{x}$  代入式(15)，可得定理 1。定理 1 的隐

含条件为  $\gamma(\mathbf{x}) > |W|$ ，为了保证阶乘的非负性，用  $|\gamma(\mathbf{x})-|W||$  取代  $\phi_W$  中的  $(\gamma(\mathbf{x})-|W|)$ ，即

$$\phi_W = \frac{\gamma(\mathbf{x})!}{(|\gamma(\mathbf{x})-|W||)!} (1-p_d)^{(|\gamma(\mathbf{x})-|W||)} p_d^{|W|} \ell_W \quad (16)$$

## 4 实验结果与分析

实验 1 和实验 2 分别在线性系统和非线性系统下比较本文算法和泊松 ET-PHD 的目标估计数目和最佳子模式分配(Optimal SubPattern Assignment, OSPA)距离误差。两种滤波器保持真实航迹数据和算法参数不变，蒙特卡罗仿真 100 次，每次仿真的观测数据独立产生。假设存活概率和检测概率与目标状态无关，即  $p_s = 0.99$ ，检测概率  $p_d = 0.9$ 。实验 1 和实验 2 均采用 ET-PHD 滤波的高斯混合实现方法，高斯分量的修剪阈值  $T = 10^{-4}$ ，合并阈值  $U = 1$ ，以及最大分量数目  $J = 100$ 。其中，实验 2 采用不敏卡尔曼(Unscented Kalman, UK)和 PHD 相结合的滤波器进行仿真实验。

**实验 1 考虑线性系统的多目标运动场景** 线性系统的动态方程和量测方程分别为  $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}^i + \mathbf{v}_k^i$  和  $\mathbf{z}_k^j = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^i + \mathbf{e}_k^j$ 。其中， $k$  表示采样时刻，

$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \Delta \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$  是系统转移矩阵， $\mathbf{v}_k^i$  是过程噪声，

其协方差为  $\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix}$  是量测矩阵， $\mathbf{e}_k^j$  是量测噪声， $\mathbf{I}_2$  和  $\mathbf{0}_2$  是 2 维的单位矩阵和全零矩阵，采样间

隔  $\Delta = 1$  s， $\mathbf{Q} = \sigma_w^2 \begin{bmatrix} \frac{\Delta^4}{4} \mathbf{I}_2 & \frac{\Delta^3}{2} \mathbf{I}_2 \\ \frac{\Delta^3}{2} \mathbf{I}_2 & \Delta^2 \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$  和  $\mathbf{R} = \sigma_e^2 \mathbf{I}_2$  分

别是过程噪声和测量噪声的协方差，过程噪声的标准差  $\sigma_w = 5$  m/s<sup>2</sup>，测量噪声的标准差  $\sigma_e = 5$  m/s<sup>2</sup>。在一个  $[-1000 \ 1000] \text{ m} \times [-1000 \ 1000] \text{ m}$  的 2 维仿真场景中，目标运动的最大时间为 100 s。杂波强度为  $\kappa_k(\mathbf{z}) = \lambda_c c(\mathbf{z})$ ， $c(\mathbf{z}) = 0.25 \times 10^{-6} \text{ m}^{-2}$ 。场景中目标的新生和死亡发生在不同的时间和地点，场景中最多同时存在 10 个目标，目标的轨迹如图 1 所示。分别有 8 个目标与其他目标空间邻近，目标两两邻近，且邻近的两个目标量测总数分别为 10 和 30，具体如下：从第 41 s 到 80 s，两个目标平行同向运动，任意时刻纵坐标只相差 10 m。在第 51 s 和第 64 s，目标轨迹发生交叉。在第 71 s，产生一个衍生目标。衍生目标的强度为  $v_\beta(\mathbf{x} | \mathbf{x}') = 0.05(\mathbf{x}; \mathbf{x}', \mathbf{Q}_\beta)$ ，其中， $\mathbf{Q}_\beta = \text{diag}([100, 100, 400, 400]^T)$ 。剩余目标的量测总数均为 10。新生目标的强度为

$$v_b(\mathbf{x}) = 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(1)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(2)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(3)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(4)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(5)}, \mathbf{P}_b)$$

其中,

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_b^{(1)} &= [250, 250, 0, 0]^T, & \mathbf{m}_b^{(2)} &= [-250, -250, 0, 0]^T, \\ \mathbf{m}_b^{(3)} &= [-800, -200, 0, 0]^T, & \mathbf{m}_b^{(4)} &= [-800, -190, 0, 0]^T, \\ \mathbf{m}_b^{(5)} &= [0, 0, 0, 0]^T, & \mathbf{P}_b &= \text{diag}([100, 100, 25, 25])^T \end{aligned}$$

假设在整个运动过程中, 每个目标的量测总数不随时间变化。量测、真实目标位置和 MB-ET-GM-PHD 滤波器的估计值如图 2 所示。滤波估计结果表明 MB-ET-GM-PHD 滤波算法能够正确跟踪多个目标。为了更好地评估本文算法, 实验 1 分别在不同杂波强度、不同检测概率以及时变的量测总数情况下比较本文算法与泊松 ET-GM-PHD 滤波算法的跟踪性能。

假设每个目标的量测总数保持不变, 检测概率为 0.9。当杂波强度不同时, 两种算法的目标估计数目和 OSPA 误差距离如图 3 所示(从上到下, 相应的

杂波数目分别是 10, 30, 50)。可以发现以下几点: (1)随着杂波强度不断增大, MB-ET-GM-PHD 算法的目标数目估计和 OSPA 误差几乎不受影响。相反, 泊松 ET-GM-PHD 算法的 OSPA 误差距离有小幅度的增长; (2)除目标空间邻近时刻外, 两种算法的跟踪性能相差不大; (3)当不同大小的目标空间邻近时, MB-ET-GM-PHD 算法的目标数目估计更为准确, OSPA 误差更小。

假设每个目标的量测总数保持不变, 杂波数目为 10, 图 4 给出了两种滤波算法在不同检测概率下的目标数目估计和 OSPA 误差距离。可以看出, 当两个大小不一的目标靠的很近时, 不管检测概率如何变化, MB-ET-GM-PHD 算法的跟踪性能总是比泊松 ET-GM-PHD 算法好; 当检测概率从 0.9 降低到 0.7 时, 两种滤波算法的 OSPA 误差幅度变化不大; 当检测概率较低(0.5)时, 两种滤波算法的目标数目估计和 OSPA 距离均增大。究其原因, 这两种滤波算法都依赖于目标的量测数目, 当检测概率较低, 检测到的属于目标的量测数目较少, 从而导致两种滤波算法的跟踪性能降低。

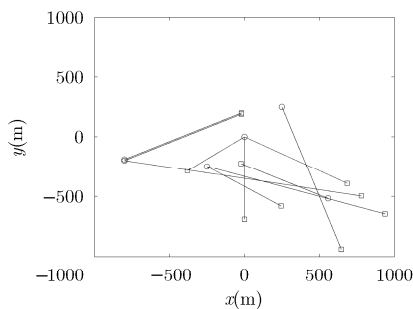


图 1 线性系统的目标真实轨迹

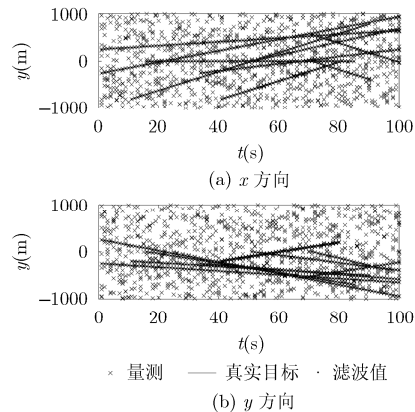


图 2 量测、真实目标位置和本文算法的估计值

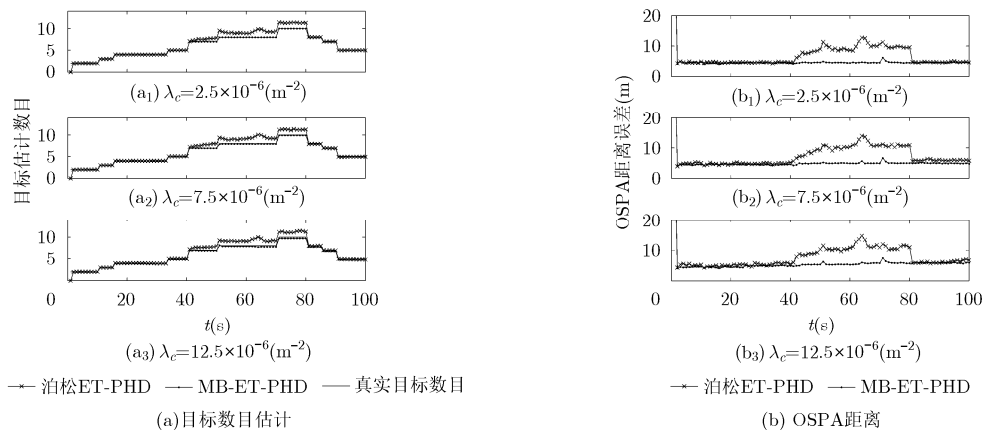


图 3 线性系统不同杂波强度下两种算法的跟踪性能对比

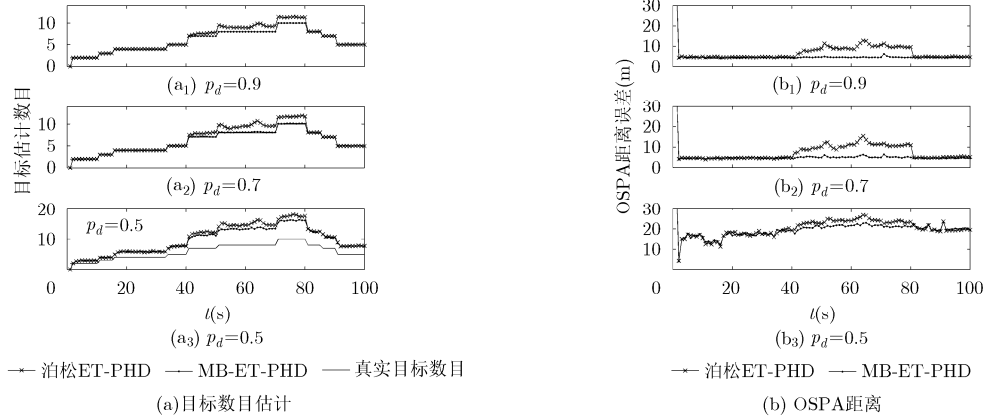


图 4 线性系统不同检测概率下两种算法的跟踪性能对比

在实际应用中，目标的量测总数随着时间不断变化，与目标的径向距离和目标的尺寸有关。对于一个确切的目标，它的量测总数只跟径向距离有关，即  $\gamma(\mathbf{x}) = \gamma(\rho)$ 。检测后的量测数目小于或者等于量测总数，其量测数目是随机的，相应的平均期望是量测总数和检测概率的乘积。为了清楚明白地展示两种算法在量测总数随时间不断变化时的跟踪性能，只选择跟踪在第 64 s 交叉的两个目标。这两个目标轨迹不同，但任意时刻的径向距离和量测总数均相同。两个目标分别运行 100 s，随径向距离变化的量测总数函数为

$$\gamma(\rho) = \begin{cases} 5, & \rho < 330 \\ [0.078\rho - 20.74], & 330 \leq \rho \leq 970 \\ 55, & \rho > 970 \end{cases} \quad (17)$$

其中， $\lfloor \cdot \rfloor$  是下取整函数。

两种算法的目标数目估计和 OSPA 距离如图 5 所示。可以看出，当两个大小相同的目标相距较远时，两种算法都能够获得准确的目标数目估计和相差不大的 OSPA 距离。在两个大小相同的目标空间邻近时刻附近，两种算法均高估目标的数目，这是合乎情理。因为，当两个目标靠的很近而且量测总数相同时，每个目标对应的高斯分量有两个较大权值，滤波器无法取舍，从而高估目标数目。

**实验 2 考虑一个多目标非线性运动场景** 目标状态为  $\mathbf{x}_k = [\mathbf{y}_k^T, w_k]^T$  的目标服从非线性近似常速圆周运动，其动态方程和量测方程分别为  $\mathbf{y}_k = \mathbf{F}(w_{k-1}) \cdot \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}w_{k-1}$  和  $\mathbf{z}_k = [\arctan(p_{x,k}/p_{y,k})\sqrt{p_{x,k}^2 + p_{y,k}^2}]^T + \mathbf{e}_k$ ，其中， $\mathbf{y}_k = [p_{x,k}, p_{y,k}, \dot{p}_{x,k}, \dot{p}_{y,k}]$ ， $w$  为转弯角速

$$\text{度}, \quad \mathbf{F}(w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{\sin w\Delta}{w} & -\frac{1 - \cos w\Delta}{w} \\ 0 & 1 & \frac{1 - \cos w\Delta}{w} & \frac{\sin w\Delta}{w} \\ 0 & 0 & \cos w\Delta & -\sin w\Delta \\ 0 & 0 & \sin w\Delta & \cos w\Delta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta^2}{2} \\ \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix}, \quad w_k = w_{k-1} + \Delta u_{k-1}, \quad \Delta = 1 \text{ s},$$

$$w_k \sim N(0, \sigma_w^2 \mathbf{I}_2), \quad \sigma_w^2 = 5 \text{ m/s}^2, \quad u_k \sim N(0, \sigma_u^2), \\ \sigma_u = (\pi/180) \text{ rad/s}, \quad \mathbf{e}_k \sim N(0, \mathbf{R}_k), \quad \mathbf{R}_k = \text{diag}([\sigma_\theta^2, \sigma_r^2]^T), \quad \sigma_\theta = (\pi/360) \text{ rad/s}, \quad \sigma_r = 5 \text{ m}.$$

目标的真实轨迹如图 6 所示，目标运动的最大时间为 50 s。目标的起始位置和终止位置分别用圆圈和方形表示。场景中最多同时存在 6 个目标，在第 30 s 两个大小不一的目标相遇，其量测总数分别是 10 和 20。其余目标目标的量测总数为 20。

假设没有衍生目标，新生目标的强度为

$$v_b(\mathbf{x}) = 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(1)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(2)}, \mathbf{P}_b) \\ + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(3)}, \mathbf{P}_b) \\ + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(4)}, \mathbf{P}_b) + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(5)}, \mathbf{P}_b) \\ + 0.1N(\mathbf{x}; \mathbf{m}_b^{(6)}, \mathbf{P}_b)$$

$$\mathbf{m}_b^{(1)} = [-950, 500, 50, 0, 0]^T,$$

$$\mathbf{m}_b^{(2)} = [650, 1137, -50, 0, 0]^T,$$

$$\mathbf{m}_b^{(3)} = [-200, 200, 0, 40, 0]^T$$

$$\mathbf{m}_b^{(4)} = [-600, 200, 30, 40, 0]^T,$$

$$\mathbf{m}_b^{(5)} = [500, 1000, -20, -40, 0]^T,$$

$$\mathbf{m}_b^{(6)} = [0, 1000, 0, -60, 0]^T$$

$$\mathbf{P}_b = \text{diag}([2500, 2500, 2500, 2500, 25(\pi/180)^2])^T$$

杂波服从均匀泊松分布，监控区域为  $[0, \pi] \text{ rad} \times [0, 1200] \text{ m}$ 。分别给出不同杂波强度和不同检测概率下两种算法的 OSPA 距离，如图 7 和图 8 所示。

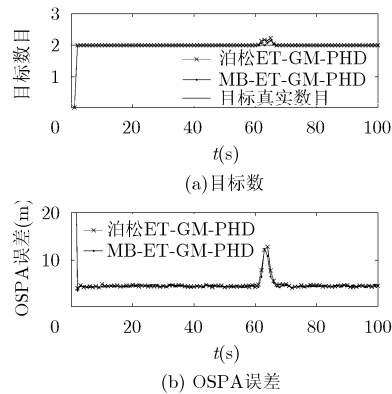


图 5 线性系统下量测总数时变时两种算法的跟踪性能

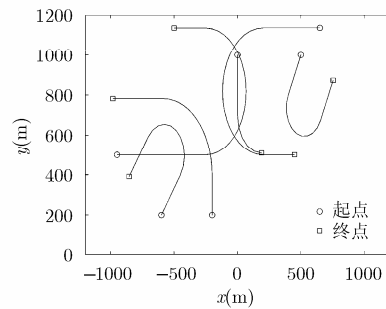


图 6 非线性系统的目标真实轨迹

可以看出, 与实验 1 的结果类似, 除了目标空间邻近的时刻外, 在不同杂波强度和检测概率下, MB-ET-GM-PHD 和泊松 ET-GM-PHD 的跟踪性能几乎一致的。当检测概率较低时, 两种算法的跟踪性能均降低。在第 30 s 两个不同大小的目标空间邻近时, 相比于泊松 ET-GM-PHD 算法, MB-ET-GM-PHD 算法的 OSPA 误差距离更小。而且, 由于相遇的两个目标的量测总数差距仅为 10, 所以两种算法得到的 OSPA 差距较小。

事实上, 两种算法唯一不同的是校正器(式(2)和式(12)), 算法复杂度相差不大。在杂波数目为 10, 检测概率为 0.9 且目标的量测总数不变的条件下, MB-ET-GM-PHD 算法和泊松 ET-GM-PHD 算法在线性系统下的蒙特卡罗平均运算时间分别是 15.79 s 和 15.97 s, 在非线性系统下的蒙特卡罗平均运算时间分别是 3.47 s 和 3.30 s。综合实验 1 和实验 2, 可以得出以下结论: 不论线性系统还是非线

性系统, 对于空间邻近的不同大小的目标, MB-ET-GM-PHD 算法的跟踪性能比泊松 ET-GM-PHD 的更好。对于相隔较远的多目标、空间邻近的相同大小的目标或者量测总数时变的目标, 在相同的检测概率和杂波强度下, MB-ET-GM-PHD 算法和泊松 ET-GM-PHD 的跟踪性能差距不大。

## 5 结束语

针对现有扩展目标量测数目的泊松模型与实际情况不符的问题, 本文提出了一种基于新的量测数目模型的 MB-ET-PHD 滤波算法。该算法通过引入多伯努利分布对扩展目标的量测数目建模, 利用 FISST 多目标微积分和 PHD 滤波器推导得到 MB-ET-PHD 的更新等式。仿真结果表明, 相比于泊松 ET-PHD 多目标跟踪算法, MB-ET-PHD 算法的目标数目估计更为准确, OSPA 距离误差更小, 跟踪空间邻近目标的能力更强。

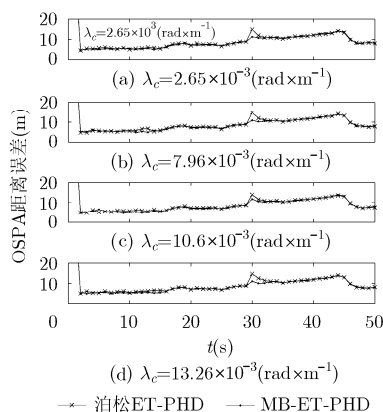


图 7 非线性系统不同杂波强度下两种算法的 OSPA 距离

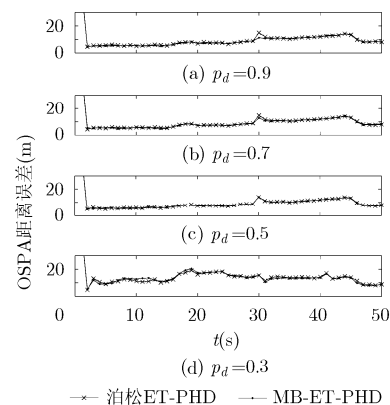


图 8 非线性系统不同检测概率下两种算法的 OSPA 距离

## 参考文献

[1] GILHOLM K and SALMOND D. Spatial distribution model for tracking extended objects[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2005, 152(5): 364-371. doi: 10.1049/ip-rsn:20045114.

[2] MAHLER R. PHD filters for nonstandard targets I: extended targets[C]. *International Conference on Information Fusion*, Seattle, WA, USA, 2009: 915-921.

- [3] MAHLER R. Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion[M]. Artech House, Norwood, MA, 2007: 193–360.
- [4] MAHLER R. Multi target Bayes filtering via first-order multi target moments[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2003, 39(4): 1152–1178. doi: 10.1109/TAES.2003.1261119.
- [5] VO B, SINGH S, and DOUCENT A. Sequential Monte Carlo methods for multi-target filtering with random finite sets[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2005, 41(4): 1224–1245. doi: 10.1109/TAES.2005.1561884.
- [6] 胡子军, 张林让, 张鹏, 等. 基于高斯混合带势概率假设密度滤波器的位置杂波下多机动目标跟踪算法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(1): 116–122. doi: 10.11999/JEIT140218.  
HU Zijun, ZHANG Linrang, ZHANG Peng, *et al.* Gaussian mixture cardinalized probability hypothesis density filter for multiple maneuvering target tracking under unknown clutter situation[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(1): 116–122. doi: 10.11999/JEIT140218.
- [7] 吴卫华, 江晶, 冯讯, 等. 基于高斯混合势化概率假设密度的脉冲多普勒雷达多目标跟踪算法[J]. *电子与信息学报*, 2015, 37(6): 1490–1494. doi: 10.11999/JEIT141232.  
WU Weihua, JIANG Jing, FENG Xun, *et al.* Multi-target tracking algorithm based on Gaussian mixture cardinalized probability hypothesis density for pulse Doppler radar[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2015, 37(6): 1490–1494. doi: 10.11999/JEIT141232.
- [8] VO B and MA W. The Gaussian mixture probability hypothesis density filter[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(11): 4091–4104. doi: 10.1109/TSP.2006.881190.
- [9] GRANSTROM K, LUNDQUIST C, and ORGUNER U. Extended target tracking using a Gaussian mixture PHD filter[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(4): 3268–3286. doi: 10.1109/TAES.2012.6324703.
- [10] GRANSTROM K, LUNDQUIST C, and ORGUNER U. A Gaussian mixture PHD filter for extended target tracking[C]. International Conference on Information Fusion, Edinburgh, Scotland, UK, 2010: 1–8. doi: 10.1109/ICIF.2010.5711885.
- [11] LAN Jian and LI Xiaorong. Tracking of maneuvering non-ellipsoidal extended object or target group using random matrix[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(9): 1042–1059. doi: 10.1109/TSP.2014.2309561.
- [12] FELDMANN M, FRANKEN D, and KOCH W. Tracking of extended objects and group targets using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(4): 1409–1420. doi: 10.1109/TSP.2010.2101064.
- [13] GRANSTROM K and ORGUNER U. A PHD filter for tracking multiple extended targets using random matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2012, 60(11): 5657–5671. doi: 10.1109/TSP.2012.2212888.
- [14] GENNARELLI G, VIVONE G, BRACA P, *et al.* Multiple extended target tracking for through-wall radars[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(12): 6482–6494. doi: 10.1109/TGRS.2015.2441957.
- [15] WAHLSTROM N and OZKAN E. Extended target tracking using Gaussian processes[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(16): 4165–4178. doi: 10.1109/TSP.2015.2424194.
- [16] GRANSTROM K, NATALE A, BRACA P, *et al.* Gamma Gaussian inverse Wishart probability hypothesis density for extended target tracking using X-band marine radar data[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2015, 53(12): 6617–6631. doi: 10.1109/TGRS.2015.2444794.
- [17] BEARD M, REUTER S, GILHOLM K, *et al.* Multiple extended target tracking with labeled random finite sets[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2016, 64(7): 1638–1653. doi: 10.1109/TSP.2015.2505683.
- [18] MA Dongdong, LIAN Feng, and LIU Jing. Sequential Monte Carlo implementation of cardinality balanced multi-target multi-Bernoulli filter for extended target tracking[J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2016, 10(2): 272–277. doi: 10.1049/iet-rsn.2015.0081.
- 李文娟：女，1990年生，博士生，研究方向为场面监视雷达信号处理、目标跟踪与识别。
- 顾红：男，1967年生，教授，博士生导师，主要研究方向为雷达信号处理、噪声雷达体制、稀疏阵列信号处理。
- 苏卫民：男，1959年生，教授，博士生导师，主要研究方向为阵列信号处理、雷达成像。